UNIVERSITY OF NICOSIA

# Δυσαριθμησία μαθητών: δείκτες της διαταραχής στην ηλικιακή περίοδο των 8-9 ετών και η συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης στην αντιμετώπισή της.

Τσικριτσή Αικατερίνη

Διδακτορικό στις Επιστήμες της Αγωγής

Τμήμα Παιδαγωγικών Σπουδών

Σχολή Επιστημών Αγωγής

Σεπτέμβριος 2020

# Δυσαριθμησία μαθητών: δείκτες της διαταραχής στην ηλικιακή περίοδο των 8-9 ετών και η συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης στην αντιμετώπισή της.

Τσικριτσή Αικατερίνη

Διατριβή που υποβλήθηκε

στο Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

σύμφωνα με τις προϋποθέσεις

του Διδακτορικού Τίτλου Σπουδών στις Επιστήμες Αγωγής

του Τμήματος Παιδαγωγικών Σπουδών

της Σχολής Επιστημών Αγωγής

Σεπτέμβριος 2020

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η δυσαριθμησία, μια νευροαναπτυξιακή διαταραχή, που εκδηλώνεται με δυσκολίες στην *αίσθηση των αριθμών*, στην *απομνημόνευση αριθμητικών δεδομένων*, στον *ακριβή ή ευχερή υπολογισμό* και στον *ακριβή μαθηματικό λογισμό*, αποτελεί πηγή διχογνωμίας στην τρέχουσα βιβλιογραφία, για τους μηχανισμούς που μεσολαβούν την εμφάνισή της. Η παρούσα έρευνα προσπάθησε να προσδιορίσει, αφενός τους δείκτες και προβλεπτές της διαταραχής της δυσαριθμησίας, στην ηλικία των 8-9 ετών, μέσα από τη διερεύνηση των υποκείμενων ικανοτήτων στη μη συμβολική και στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία, και των γνωστικών μηχανισμών, που υπονομεύουν την απόκτηση της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών, υπό το πρίσμα της σύγκλισης τριών υφιστάμενων θεωριών, ήτοι, της θεωρίας του *ελλείμματος αναπαράστασης μεγεθών* (magnitude representation deficit) ή του *ελλείμματος αίσθησης αριθμού* (number sense deficit) (Dehaene, 2011), της θεωρίας του *ελλείμματος πρόσβασης* (access deficit hypothesis) (Noël, & Rousselle, 2011) και της θεωρίας *του μοντέλου των γνωστικών ελλειμμάτων* (Geary, 2004, 2011), και αφετέρου τη συμβολή των σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών, κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας. Η θεωρητική λογική αυτής, θεμελιώνεται στο μεταθετικιστικό παράδειγμα έρευνας με επιλογή της εμπειρικής ερευνητικής μεθόδου, μέσω μιας συσχετιστικής-προβλεπτικής φάσης και μιας πειραματικής. Στη συσχετιστική φάση της έρευνας συμμετείχαν 60 μαθητές, ηλικίας 8-9 ετών, οι οποίοι αποτέλεσαν την ομάδα μαθητών με δυσαριθμησία, (34 αγόρια, 26 κορίτσια Μ.Η = 101,53 μήνες, Τ.Α. = 1,17) και 60 μαθητές την ομάδα τυπικά αναπτυσσόμενων μαθη-

τών (29 αγόρια, 31 κορίτσια Μ.Η = 101,8 μήνες, Τ.Α. = 1,25), βάσει μιας σειράς διαγνωστικών ελέγχων. Στην πειραματική φάση, συμμετείχε ένα τυχαίο δείγμα 10 μαθητών, από την ομάδα των 60 μαθητών με δυσαριθμησία, το οποίο χωρίσθηκε σε δύο ισοπληθείς ομάδες των πέντε ατόμων, όπου στην πρώτη ομάδα εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση, έναντι της δεύτερης, που συνιστούσε την ομάδα ελέγχου. Υπό το φως των ευρημάτων της συσχετιστικής-προβλεπτικής φάσης της έρευνας, οι μαθητές με δυσαριθμησία παρουσιάζουν μια αναπαραστατική εξασθένιση μη συμβολικών αριθμητικών μεγεθών, η οποία συνιστά μια διακριτή διαφορά των προτύπων ενεργοποίησης των εγγενών αριθμητικών συστημάτων σε σχέση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους, εμφανίζουν χαμηλές επιδόσεις στις συμβολικές αριθμητικές αναπαραστάσεις, οι οποίες συνιστούν σημαντικές πηγές μαθηματικών μηχανισμών που σχετίζονται με την κακή αριθμητική απόδοση και διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς τα δομήματα των γνωστικών λειτουργιών, εργαζόμενη μνήμη και επιτελικές λειτουργίες. Τα ευρήματα παλινδρόμησης της μελέτης, αναδεικνύουν ως σημαντικότερο προβλέπτη την ικανότητα Subitizing, και ακολουθούν η γνωστική εναλλαγή, η επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου, ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing, και ο χρόνος απόκρισης κατά τη διάκριση ποσοτήτων (R.T W), ως προβλέπτες που συνεισφέρουν στην πρόβλεψη. Η εστίαση της προκύπτουσας ερευνητικής εργασίας στη συμβολή της πειραματικής παρέμβασης, αναδεικνύει την αιτιώδη συνάφεια μεταξύ των σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων, με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, στη βελτίωση της αλγοριθμικής επίλυσης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, στην εγγενή ικανότητα Subitizing, του χειρισμού συμβολικών αριθμητικών πληροφοριών, και δομημάτων γνωστικών λειτουργιών, όπως της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής.

**ABSTRACT**

The dyscalculia, a neurodevelopmental disorder, that characterized by difficulties in *sensing numbers, memorizing arithmetic data, accurate or easy computation* and *accurate mathematical calculus*, is a source of controversy in the current literature on the mechanisms that mediate her appearance. The present study attempted to determine, on the one hand the indicators and predictors of dyscalculia at the age of 8-9 years, through the investigation of the underlying abilities in non-symbolic and symbolic numerical processing and the cognitive mechanisms that undermine students' mathematical ability acquisition, in the light of the convergence of three existing theories, namely, the theory of *magnitude representation deficit* or *number sense deficit* (Dehaene, 2011), the theory of *access deficit hypothesis* (Noël, & Rousselle, 2011) and the theory of *cognitive deficits model* (Geary, 2004, 2011), and on the other hand the contribution of formatting/ modeling, as a means of representing arithmetic quantities for actively mobilizing the complex relationships of non-symbolic numerical discrimination, symbolic numerical processing and cognitive functions, while learning the algorithms of arithmetic operations with the cognitive learning strategy. The theoretical logic of study is based on the post-empirical example of research by choosing the empirical method through a correlative- predictive phase and an experimental one. In the correlative phase of the study participated 60 students, aged 8-9 years, who were the group of students with dyscalculia (34 boys, 26 girls, M.A.= 101.53 months, S.D.= 1.17) and 60 students were the group of typically developing students (29 boys, 31 girls, M.A.= 101.18 months, S.D.= 1.25), based on a series of diagnostic tests. In the experimental phase, participated a random sample of 10 students, from the group of 60 students with dyscalculia, which was divided into two equal groups of five, where in the first group applied the experimental intervention, versus the second,

which constituted the control group. In the light of the findings of the correlative-predictive phase of research, students with dyscalculia present a representational attenuation of non-symbolic numerical magnitude, which constitutes a distinct difference of the patterns of activation of inherent numerical systems compared to typically developing peers, perform poorly on symbolic arithmetic representations, which are important sources of mathematical mechanisms associated with poor numerical performance and vary significantly in structure of cognitive functions, working memory and executing functions. The study's regression findings highlight as the most important predictor the ability of Subitizing, followed by cognitive rotation, effect of one-digit distance, response time of the ability of Subitizing, and quantity response time (R.T.W.), as predictors that contribute to the forecast. The focusing of the resulting experimental research to the contribution of the experimental intervention highlights the causal link between formatting/ modeling, by supporting cognitive learning strategy in the improvement of the algorithmic solving of addition and subtraction in the inherent ability of Subitizing, in the handling of symbolic arithmetic information and structures of cognitive functions, such as verbal numeric working memory, inhibition, attention- processing speed and cognitive rotation.

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος στο Τμήμα Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Λευκωσίας. Για τις αναρίθμητες λεπτομέρειες που συνιστούν τη συγγραφή αυτής, πολύτιμη στάθηκε η συμβολή ορισμένων ανθρώπων, τα σχόλια και οι παρατηρήσεις των οποίων, σε διάφορα στάδια εκπόνησης αυτής, στάθηκαν πολύτιμα ερεθίσματα στη βελτίωση της προσπάθειας συγγραφής της. Μετά την ολοκλήρωση της, κρίνεται σκόπιμο να αποδοθούν ευχαριστίες στους ανθρώπους αυτούς και σε όσους συμμετείχαν στη διεξαγωγή της, ως ελάχιστη έκφραση της ευγνωμοσύνης μου.

Αρχικά, επιθυμώ να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Σαλβαρά Ιωάννη, Καθηγητή Διδακτικής του Πανεπιστημίου Λευκωσίας, ο οποίος υποστήριξε την ιδέα μου για τους δείκτες της διαταραχής της δυσαριθμησίας, και την προέκτεινε με την πρότασή του για τη συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης στην αντιμετώπιση αυτής. Ήταν εκείνος που αφιέρωσε αρκετό χρόνο και μεγάλη φροντίδα για να προσφέρει αναλυτικά σχόλια πάνω στο αρχικό σχέδιο της διατριβής. Ελάχιστοι καθηγητές με τα δικά του προσόντα αφιερώνουν τον χρόνο και την προσπάθεια που κατέβαλε εκείνος για το συγκεκριμένο εγχείρημα. Είμαι υπόχρεη για την αμέριστη συμπαράστασή του, τη διαρκή καθοδήγησή του, την ενθάρρυνση και την υπομονή που έδειξε καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της ερευνητικής μου εργασίας. Η συστηματικότητά του, η προθυμία του να διαλευκάνει τις απορίες μου και να κατευνάσει τα άγχη μου, οι τακτικές μας συνομιλίες ήταν για μένα ανεκτίμητης σημασίας. Η συμβολή της διάθεσης του πολύτιμού του χρόνου και της αφειδούς ηθικής και πρακτικής βοήθειας στον σχεδιασμό της πειραματικής διαδικασίας με μεθοδολογικά εργαλεία και οργάνωση, σύμφωνα με προδιαγραφές προτύπων επιστημονικών ερευνών, η έμφαση σε θέματα μεθοδολογίας, δεοντολογίας και ακριβείας στον επιστημονικό λόγο, στάθηκε καθοριστική και πολύτιμη για τη συγγραφή αυτής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες, αισθάνομαι ότι οφείλω απέναντι στο δεύτερο μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, κ. Στασινό Δημήτρη, Καθηγητή Ειδικής Αγωγής και Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Λευκωσίας, ο οποίος ως καθηγητής μου στο μάθημα της «Ειδικής Αγωγής και Εκπαίδευσης», με βοήθησε ολοκληρωτικά για τη βαθύτερη κατανόηση των σχετικών ζητημάτων της Ειδικής Αγωγής που άπτονται της έρευνας. Θεωρώ ότι ήμουν τυχερή που τον γνώρισα, ως καθηγητή και ως άνθρωπο, και συνεργάστηκα μαζί του. Η εμπεριστατωμένη προσέγγισή του απέναντι σε αυτήν την εργασία, οι συμβουλές και η καθοδήγησή του, στάθηκαν αρωγοί στην εκπόνηση αυτής.

Ξεχωριστές ευχαριστίες, οφείλω επίσης, στο τρίτο μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, κ. Μοσκοφόγλου – Χιονίδου Μαρία, Αναπληρώτρια καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Η καθοδήγησή της σε θέματα Διδασκαλίας των Μαθηματικών, οι εύστοχες υποδείξεις της σε όλες τις φάσεις της έρευνας, σε συνδυασμό με την αστείρευτη προθυμία και θετική διάθεση για βοήθεια, απετέλεσαν σημαντικά εφόδια στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Τέλος, μεγάλο ευχαριστώ, στο Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων για την έγκριση των φάσεων της έρευνας, κατόπιν της θετικής γνωμοδοτήσεως του Τμήματος Ερευνών του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π), στους διευθυντές και στους εκπαιδευτικούς των σχολείων Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης του Νομού Λάρισας, που με υποδέχτηκαν στα σχολεία και κατέστησαν εφικτή την πρόσβαση του δείγματος της έρευνας, στους γονείς για την εμπιστοσύνη που μου επέδειξαν και συναίνεσαν για τη συμμετοχή των παιδιών τους στην έρευνα, καθώς και στους ίδιους τους μαθητές που συμμετείχαν με ενθουσιασμό και εργατικότητα.

**Δήλωση**

Δηλώνω ότι το προϊόν της διατριβής αυτής διεξήχθη σύμφωνα με τους κανονισμούς του Πανεπιστημίου Λευκωσίας. Είναι προϊόν αποκλειστικά δικής μου εργασίας, ε-κτός εάν αναφέρεται διαφορετικά μέσω παραπομπών, σημειώσεων ή άλλου είδους δηλώσεων.

Τσικριτσή Αικατερίνη Ημερομηνία, 14/09/2020

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{\text{Ο}}$

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5$^{\text{Ο}}$

## ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ/ΕΙΚΟΝΩΝ

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

# Κεφάλαιο 1ο ΕΙΣΑΓΩΓΗ

*Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ έχει ως σκοπό να θέσει το ερευνητικό πρόβλημα, το οποίο προσδιορίζεται με σαφήνεια και ακρίβεια, να αναπτύξει τη σημασία της έρευνας, να προσδιορίσει το σκοπό και τα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία αποτελούν το επίκεντρο της έρευνας, να διατυπώσει τις υποθέσεις της έρευνας, όπου εξειδικεύεται η σχέση μεταξύ των μεταβλητών, να διευκρινίσει σημαντικούς όρους της έρευνας και να πραγματοποιήσει μια στοχευμένη αναφορά σημαντικών ερευνών που έχουν άμεση σχέση με το ερευνητικό πρόβλημα.*

## 1.1. Το ερευνητικό πρόβλημα και η σημασία του

Η μαθηματική ικανότητα, σύμφωνα με το National Research Council (NBC) (όπ. αναφ. στο Κολέζα, 2009, σελ. 179), είναι μια σύνθετη ικανότητα που συγκροτείται από πέντε επιμέρους στοιχεία ήτοι: εννοιολογική κατανόηση, στρατηγική ικανότητα, προσαρμοστικό συλλογισμό, διαδικαστική άνεση και παραγωγική διάθεση. Η ανάπτυξη αυτής μπορεί να γίνει κατανοητή, ως ένα πολύπλοκο αποτέλεσμα πολυάριθμων γενετικών και περιβαλλοντικών παραγόντων (Παπαδάτος, 2011), και συνιστά σημαντικό δείκτη ακαδημαϊκών και επαγγελματικών επιτευγμάτων (Estrada, Martin-Hryniewicz, Peek, Collins, & Byrd, 2004).

Η απόκτηση μιας σταθερής αίσθησης των αριθμών και η ικανότητα του διανοητικού χειρισμού αυτών βρίσκεται αρχικά στο επίκεντρο αυτής. Έρευνες διαπιστώνουν ότι τα βρέφη ήδη διαθέτουν μια βασική αντίληψη των ποσοτήτων (Libertus, Starr, & Brannon, 2014· Mou, & vanMarle, 2014) ωστόσο, μια μακρά προσπάθεια απαιτείται έως ότου το παιδί αποκτήσει τις απαραίτητες δεξιότητες τη δομής και της λειτουργίας του αριθμητικού συστήματος (Butterworth, 2005· D’Amico, & Passolunghi, 2009· Mazzocco, & Kover, 2007).

Κι ενώ η μαθηματική επάρκεια είναι εφικτή στους περισσότερους μαθητές στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης, η ουσιώδη αυτή γνωστική ικανότητα υπονομεύεται στους μαθητές που εμφανίζουν Ειδική Μαθησιακή Δυσκολία στα μαθηματικά ή σύμφωνα με τον όρο του DSM-5[1] (2013) Ειδική Μαθησιακή Διαταραχή με Δυσκολία στα Μαθηματικά (Ε.Μ.Δ.Μ.) και εναλλακτικά Δυσαριθμησία. Ο συγκεκριμένος όρος αναφέρεται στις «*απρόσμενες και σημαντικές δυσκολίες στην κατάκτηση και λειτουργική χρήση των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων*» (Αγαλιώτης, 2013, σελ. 162). Στη σχετική βιβλιογραφία ο όρος περιγράφεται ως δυσκολία στη νοητική αντιπροσώπευση και του νοητικού χειρισμού αριθμητικών μεγεθών (Szűcs, & Goswami 2013), καθώς και ως έλλειμμα στις συνδέσεις συμβολικής, μη συμβολικής και λεκτικής αναπαράστασης (Butterworth, 2010· De Smedt, Noël, Gilmore, & Ansari, 2013). Αυτή η δυσκολία είναι δυσανάλογη του διανοητικού επιπέδου του παιδιού, της ηλικίας του και της ποιότητας της εκπαίδευσής του (Kucian, & von Aster, 2015), προσδίδοντας εξέχουσα βαρύτητα στην ασύγχρονη ανάπτυξη[2] που παρατηρείται στον μαθηματικό τομέα.

Αν και την τελευταία δεκαετία η έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο διανύει μια περίοδο μεγαλύτερης ανάπτυξης, η οποία συναρτάται αφενός με τη δυσμένεια που μπορεί η διαταραχή να επιφέρει σε πολλαπλούς τομείς στη ζωή του παιδιού[3] και αφετέρου με το υψηλό ποσοστό επιπολασμού[4] αυτής, παρατηρείται μια εκπληκτική έλλειψη συναίνεσης στην ακαδημαϊκή και εκπαιδευτική κοινότητα, όσον αφορά τους

---

[1] Σύμφωνα με το DSM – V (2013, σελ 67), η συγκεκριμένη νευροαναπτυξιακή διαταραχή εμφανίζεται ως προσδιοριστής της Ειδικής Μαθησιακής Διαταραχής κωδικοποιείται με τον αριθμό 315.1 (F81.2) ως Ειδική Μαθησιακή Διαταραχή με δυσκολία στα μαθηματικά ή/και εναλλακτικά δυσαριθμησία, με δυσκολίες στην *αίσθηση των αριθμών*, στην *απομνημόνευση αριθμητικών δεδομένων*, στον *ακριβή ή ευχερή υπολογισμό* και στον *ακριβή μαθηματικό λογισμό*. Ο προσδιορισμός «νευροαναπτυξιακή» που συνοδεύει τη διαταραχή, υπονοεί ότι οι δυσκολίες του παιδιού εκδηλώνονται αφετηριακά στην αρχική μάθηση της αριθμητικής και δεν οφείλονται σε απώλεια των δεξιοτήτων αυτών σε ένα μεταγενέστερο ηλικιακό στάδιο (Butterworth, Varma, & Laurillard, 2011).

[2] Σε σύγκριση με τους τυπικούς συνομηλίκους οι δυσαριθμητικοί μαθητές, υπολείπονται κατά δύο ή και περισσότερα χρόνια ως προς τη μαθηματική επίδοση (Cawley & Miller, 1989, όπ. αναφ. στο Αγαλιώτης, 2013, σελ 172).

[3] Τα άτομα που πλήττονται συχνά υποφέρουν από δευτερογενείς, συναφείς διαταραχές (Αγαλιώτης, 2013) και βρίσκονται σε μειονεκτική θέση στην αγορά εργασίας (Ritchie, & Bates, 2013).

[4] Το ποσοστό επιπολασμού είναι συγκρίσιμο με αυτό της διαταραχής της ανάγνωσης (Peterson, & Pennington, 2012) και ανέρχεται στο 3-6,5% του πληθυσμού (Cornoldi, & Lucangeli, 2004).

μηχανισμούς που μεσολαβούν την εμφάνισή της. Ένα σώμα ερευνητών υποστηρίζει ότι η δυσαριθμησία είναι μονολιθική αναπηρία που προκαλείται από νευρογνωστική δυσλειτουργία (Piazza, Facoetti, Trussardi, Berteletti, Conte, Lucangeli, Dehaene, & Zorzi, 2010) σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αριθμών στον εγκέφαλο (Butterworth, 2010· Dehaene, 2011).

Στα πλαίσια αυτής της νευρογνωστικής προσέγγισης, δύο θεωρίες καθοδηγούν τη σύγχρονη έρευνα στην ερμηνεία της φύσης του ελλείμματος της εν λόγω διαταραχής. Η πρώτη, γνωστή ως *έλλειμμα αναπαράστασης μεγεθών* (magnitude representation deficit) ή ως *έλλειμμα αίσθησης αριθμού* (number sense deficit) διατείνεται πως η δυσαριθμησία είναι αποτέλεσμα ελλείμματος στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα (Butterworth, 2010), το οποίο έλλειμμα με τη σειρά του εμποδίζει την κατάκτηση συμβολικών ικανοτήτων και κατά συνέπεια την οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης. Η δεύτερη, γνωστή ως *έλλειμμα πρόσβασης* (access deficit hypothesis), εισηγείται πως η προέλευση αυτής της αναπηρίας έγκειται στην έλλειψη πρόσβασης σε συμβολικές αριθμητικές αναπαραστάσεις και αυτή η έλλειψη εμποδίζει στη συνέχεια την ανάπτυξη των ανώτερων μη συμβολικών ικανοτήτων (Noël, & Rousselle, 2011· Rousselle, & Noël, 2007).

Η σύγχυση ωστόσο, που παρατηρείται εξαιτίας αντικρουόμενων αποτελεσμάτων ερευνών δεν επιτρέπει προς το παρόν την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων προς αποδοχή, από την επιστημονική κοινότητα, της πρώτης ή της δεύτερης θεωρίας, καθώς υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι βρήκαν δυσλειτουργία στα μη συμβολικά έργα προς υποστήριξη της θεωρίας του ελλείμματος αναπαράστασης μεγεθών σε παιδιά με δυσαριθμησία (Bugden, & Ansari, 2016· Libertus, Feigenson, Halberda, 2013· Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011a· Piazza et al., 2010· Price, Holloway, Räsänen, Vesterinen, & Ansari, 2007· Skagerlund & Träff, 2014), σε αντίθεση με άλλους ερευνητές που διαπίστωσαν δυσλειτουργία στα συμβολικά έργα προς υποστήριξη της υπόθεσης της έλλειψης πρόσβασης (Canizares, Crespo, Alemany 2013· De Smedt, & Gilmore, 2011· Iuculano, Tang, Hall, & Butterworth, 2008· Mejias, Grégoire, & Noël, 2012· Olsson, Östergren, & Träff, 2016).

Από την άλλη, υπάρχουν ερευνητές που θεωρούν ότι η δυσαριθμησία είναι μια ανομοιογενής διαταραχή η οποία είναι αποτέλεσμα *ελλειμμάτων σε γνωστικές λειτουργίες* (Geary, 2004, 2011· McLean & Hitch, 1999· Meyer, Salimpoor, Wu, Geary, & Menon, 2010).

Σύμφωνα με τους οπαδούς του μοντέλου των γνωστικών ελλειμμάτων, η δυσαριθμησία δεν προκαλείται από κάποια θεμελιώδη ζητήματα που σχετίζονται με τη γνώση του αριθμού, αλλά από τους υποστηρικτικούς γνωστικούς τομείς (προσοχή, μνήμη, ικανότητα συλλογισμού) οι οποίοι αποτελούν μέρος μιας ενοποιημένης διαδικασίας χειρισμού των αριθμών. Ωστόσο η ανασκόπηση, για το συγκεκριμένο θέμα ερευνών, αποκάλυψε ότι ο αιτιώδης ρόλος της μνήμη εργασίας στο χαρακτηρισμό της δυσαριθμησίας συνιστά πηγή συγκρούσεων και διχογνωμίας μέσα στη βιβλιογραφία, καθώς μερικές μελέτες βρήκαν ελλείμματα στη μνήμη εργασίας σε παιδιά με δυσαριθμησία (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012· Meyer et al., 2010· McLean, & Hitch, 1999), ενώ άλλες δεν έχουν βρει ελλείμματα σε σύγκριση με τους τυπικούς συνομήλικους (Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004).

Εξαιτίας του παραπάνω αντιφατικού προτύπου αποτελεσμάτων σύγχρονων δημοσιευμένων ερευνών που αφορούν στη δυσαριθμησία - η ανάδυση του οποίου προήλθε από την ανασκόπηση που έγινε στο εν λόγω πεδίο - παραμένει ανοικτό ερευνητικό ερώτημα αν πρόκειται για μια διαταραχή στο μη συμβολικό σύστημα των αριθμών το οποίο αναστέλλει την οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης ή διαταραχή υποκείμενης απομείωσης στον τρόπο που ο εγκέφαλος (Lyons, Ansari, & Beilock,

2012) συνδέει τις έννοιες της ποσότητας με τα σύμβολα των αριθμών, η έκφραση της οποίας διαπιστώνεται σε συμβολικό επίπεδο μόνο, καθώς και στον τρόπο με τον οποίο συνδέεται η μνήμη εργασίας και οι εκτελεστικές λειτουργίες με αυτή τη μορφή της διαταραχής.

Το πρόταγμα για τη διερεύνηση του παραπάνω ερωτήματος (αν πρόκειται για πιθανή μονολιθική ανεπάρκεια είτε παράλληλη ανεπάρκεια τριπλής διάστασης) δεν κινείται στα πλαίσια μιας ντετερμινιστικής ερμηνείας της αιτιολογίας (Ένγκελς, 2016), που καθιστά μοιραία και αναπόδραστη κάθε συμπεριφορική εκδήλωση στη μαθηματική ικανότητα - εξάλλου η ίδια η φύση των δυσαριθμητικών δυσκολιών σε συμπεριφορικό επίπεδο δεν είναι πάγιες και μονοσήμαντες καταστάσεις, αλλά ένα σύνολο χαρακτηριστικών που εξελίσσονται στο διάβα του χρόνου, καθιστά την αντίληψη της απόλυτα αιτιακής σχέσης προβληματική - αλλά στην εξεύρεση δεικτών και προβλεπτών της εν λόγω διαταραχής, σε συγκεκριμένη ηλικία, μέσω της εξέτασης μιας πιθανολογικής αιτιολογικής αλυσίδας, που εμπλέκει τους προαναφερθέντες παράγοντες στους οποίους η μέχρι σήμερα έρευνα καταδεικνύει, και συνυφαίνεται με τη διερεύνηση του ρόλου μιας αντισταθμιστικής παρέμβασης μείζονος σημασίας, μέσω της αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσου κωδικοποίησης και ως διαμεσολαβητικού παράγοντα τύπου σκαλωσιάς με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας (Σαλβαράς, 2013α), για την ενεργό κινητοποίηση της σύμπλοκης σχέσης των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, των ικανοτήτων της αναπαράστασης συμβολικών μεγεθών και των γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων.

Η μοντελοποίηση / σχηματοποίηση είναι μια δραστηριότητα σχηματικής απεικόνισης – αναπαράστασης μιας αλγοριθμικής διαδικασίας ή ενός προβλήματος ή ευρύτερα μιας μαθηματικής σχέσης (Κολέζα, 2009, σελ. 362, Σαλβαράς, 2011, σελ. 121). Αποτελεί μέσο αναπαράστασης των σημαντικότερων χαρακτηριστικών γνωρισμάτων μιας έννοιας με μια μορφή που είναι πιο εύκολη να ερμηνευθεί. Η μοντελοποίηση / σχηματοποίηση θεωρείται ότι λειτουργεί υποστηρικτικά της διαίσθησης, καθώς παρέχει ιδέες που η διαίσθηση δεν μπορεί να παρέχει (Gravemeijer, 1999), και αποτελεί το συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις πραξιακές και συμβολικές κωδικοποιήσεις (Σαλβαράς, 2011, σελ. 121). Σύμφωνα με τον Gravemeijer (1999), αποτελεί γέφυρα μεταξύ των «*άτυπων πλαισιοθετημένων διαδικασιών λύσης και του τυπικού μαθηματικού συλλογισμού, ο οποίος συνδέεται με τη δημιουργία μιας νέας, για τους μαθητές, μαθηματικής πραγματικότητας*» (σελ. 150). Δηλαδή, «κάτι» συμβολίζεται (*model of*) και ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται ως βάση για τον τυπικό συλλογισμό (*model for*) (Gravemeijer, 1999).

Κι ενώ ευρύτερα η ικανότητα της μοντελοποίησης αποτελεί στόχο των προγραμμάτων σπουδών στα μαθηματικά (Π. Ι., 2007, σελ. 7), στα πλαίσια του σχολείου η διαδικασία μοντελοποίησης απουσιάζει ή συρρικνώνεται στην έκθεση απλά των υπαρχόντων μοντέλων που το διδακτικό εγχειρίδιο προσφέρει (Κολέζα, 2009· Σαλβαράς, 2011), χωρίς περαιτέρω χρόνο διερεύνησης και χωρίς οργανωτικές διαδικασίες μοντελοποίησης, ώστε οι μαθητές με δυσαριθμησία να διευκολυνθούν στη διαμόρφωση ολοκληρωμένων σχημάτων των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Έρευνες αναδεικνύουν (Riccomini, Hwang, & Morano, 2016· Rosenshine, 2012), ότι οι δάσκαλοι των τυπικών τάξεων στερούνται της απαιτούμενης εκπαίδευσης στην παιδαγωγική της γνωστικής υποστήριξης των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, και αυτή η έλλειψη, σύμφωνα με τους Riccomini και συν. (2016), «*συμβάλλει στη μαθηματική αποτυχία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, μεταξύ άλλων λόγων*» (σελ. 40), ενώ έρευνα της Μοσκοφόγλου-Χιονίδου (1999, σελ.

6-7), συνεπικουρεί στη σημαντικότητα του θεωρητικού και πρακτικού υπόβαθρου των εκπαιδευτικών στην επίδοση των μαθητών. Σύμφωνα με τη Μοσκοφόγλου-Χιονίδου (1999), όταν οι εκπαιδευτικοί έχουν παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου, δηλαδή γνώση αποτελεσματικών τρόπων αναπαράστασης και διατύπωσης του περιεχομένου των μαθηματικών, λαμβάνοντας υπόψη τα ενδιαφέροντα των μαθητών, το γνωστικό τους επίπεδο, τις εγγενείς δυσκολίες του περιεχομένου των μαθηματικών, τις ενδεχόμενες μαθησιακές δυσκολίες των μαθητών, μπορούν να παρουσιάσουν το μαθηματικό περιεχόμενο με τρόπο που να γίνεται κατανοητό στους μαθητές, να κατασκευάσουν μοντέλα, παραδείγματα, λεκτικές αναδιατυπώσεις και αναπαραστάσεις που θα προωθήσουν τη μαθηματική σκέψη αυτών.

Στον χώρο της ειδικής αγωγής ενώ η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά αποτελεί μια έντονα συνιστώμενη πρακτική (Σαλβαράς, 2011), και παρεμβατικές μελέτες πιστοποιούν τα οφέλη αυτής (Griffin, & Jitendra, 2009· Jitendra, Griffin, McCoey, Gardill, Bhat, & Riley, T. 1998· Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bhat, & Riley, 1998· Jitendra, Hoff, & Beck, 1999· van Garderen, 2007), λίγα είναι γνωστά για τη γνώση και την εκπαιδευτική έμφαση που δίνουν σε αυτές οι ειδικοί εκπαιδευτικοί. Ευρήματα πρόσφατης μελέτης των van Garderen, Scheuermann και Poch (2016), αποκαλύπτουν ότι: (α) ενώ οι εκπαιδευτικοί της ειδικής εκπαίδευσης κατέχουν γνώσεις για τις οπτικές αναπαραστάσεις, οι εξηγήσεις που δίνουν γι' αυτές στερούνται βάθους και χρειάζονται επέκταση και τελειοποίηση, και (β) λόγω των περιορισμένων γνώσεών τους, η χρήση των οπτικοποιήσεων περιορίζεται σε ένα περιφερειακό ρόλο στην εκπαίδευση των μαθηματικών.

Από την άλλη, η βιβλιογραφία σχετικά με την πιο αποτελεσματική στρατηγική διδασκαλίας, στην ανάπτυξη ενός στέρεου εννοιολογικού και διαδικαστικού υπόβαθρου στις βασικές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, παραμένει λιγοστή

(Arslan, & Yavuz, 2012), και ακόμη περισσότερο η έρευνα σχετικά με τη διαδικαστική διευκόλυνση των αλγόριθμων των πράξεων μέσω της στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας. Οι παρεμβατικές μελέτες με τη στρατηγική της γνωστικής μαθητείας εντοπίζονται κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Collins, 1991· Νικολουδάκης, 2009· Sharma, 2016) και όχι στην πρωτοβάθμια, στο θέμα και στην ηλικία που αφορά την παρούσα έρευνα.

Κατά συνέπεια, το αρχικό ερευνητικό πρόβλημα της ανάγκης διερεύνησης της διαταραχής σε επίπεδο τριπλής διάστασης, επεκτείνεται σε ανάγκη διερεύνησης της συνεισφοράς της μοντελοποίησης / σχηματοποίησης, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών μεγεθών, μέσω της διδακτικής στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας, στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στην επεξεργασία συμβολικών ποσοτήτων και στις γνωστικές λειτουργίες, κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων των πράξεων.

Το δίπτυχο (αξιολόγηση - παρέμβαση) ερευνητικό ερώτημα που τίθεται αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα και σημασία, διότι αναδεικνύει τη σημαντικότητα αυτής της ερευνητικής περιοχής, που χρήζει συστηματικής διερεύνησης σε επίπεδο μη συμβολικών – συμβολικών και γνωστικών ικανοτήτων - υπό το πρίσμα του ελέγχου ή του βαθμού σύγκλισης τριών υφιστάμενων θεωριών - εξαιτίας της επιτακτικής ανάγκης έγκαιρης και αξιόπιστης εκτίμησης της διαταραχής, μέσω ασφαλών δεικτών διαφοροποίησης των εν λόγω μαθητών, συνυφαίνεται με παρέμβαση στόχευσης αυτών των ικανοτήτων και εξόχως αναδεικνύεται η πρωτοτυπία του θέματος του παρόντος ερευνητικού σχεδίου μέσω των παρακάτω διαπιστώσεων:

α. Οι λίγες πειραματικές δοκιμές των δύο πρώτων υποθέσεων ερμηνείας της δυσαριθμησίας, δεν απέδωσαν ένα σταθερό μοτίβο δεικτών που διαφοροποιούν τα παιδιά με δυσαριθμησία από τους τυπικούς συνομήλικους.

β. Ορισμένες έρευνες εστιάζουν στη μελέτη μιας εκ των δύο εννοιών του μη συμβολικού συστήματος αριθμών και σε εντελώς διαφορετικό ηλικιακό δείγμα που προτίθεται η παρούσα έρευνα να διενεργήσει. Επί παραδείγματι οι έρευνες των Piazza και των συνεργατών (2010), των Mazzocco και συν. (2011) και των Bugden και Ansari (2016), εστιάζουν μόνο στη μελέτη *του συστήματος των κατά προσέγγιση αριθμών* (Approximate Number System, ANS), σε δεκάχρονα παιδιά η πρώτη και η τρίτη, και σε μεγαλύτερο ηλικιακό φάσμα η δεύτερη ενώ κάποιες άλλες μελέτησαν το δεύτερο εγγενές μη συμβολικό σύστημα μέσω του subitizing (Ashkenazi, & Henik, 2012· Ashkenazi, Mark-Zigdon, & Henik, 2013· Fischer, Gebhardt, & Hartnegg, 2008). Στην παρούσα έρευνα θα καλύψουμε αυτό το ερευνητικό κενό εξετάζοντας και τις δύο διαστάσεις.

γ. Σε κάποιες έρευνες, δεν καταγράφεται ο χρόνος απόκρισης των συμβολικών ικανοτήτων. Στην παρούσα έρευνα όλες οι μετρήσεις των μη συμβολικών και συμβολικών ικανοτήτων θα γίνουν μέσω εργαλείων που κατασκευάστηκαν γι' αυτό το σκοπό στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, όπου θα προσμετρούνται οι χρόνοι απόκρισης και οι σωστές απαντήσεις των μαθητών.

δ. Σε επίπεδο διεθνούς βιβλιογραφίας εντοπίζεται υλικό γύρω από τις έννοιες των θεωριών που μας απασχολούν, ωστόσο είναι αποσπασματική σε σχέση με την προβληματική του παρόντος ερευνητικού σχεδίου, καθώς στόχος είναι μια συσχετιστική προβλεπτική μελέτη έρευνας, υπό το πρίσμα της σύγκλισης και των τριών θεωριών ερμηνείας της δυσαριθμησίας. Στην παρούσα μελέτη, επιδιώκουμε να παρέχουμε μια ευρύτερη και γενικότερη κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των μη συμβολικών και συμβολικών αναπαραστάσεων αριθμητικών μεγεθών και τη μοναδική τους σχέση με τις γνωστικές λειτουργίες. Ταυτοχρόνως δεν εντοπίζεται να έχει γίνει κάποια άλλη επιστημονική έρευνα διερεύνησης της συνεισφοράς των μοντελοποιήσε-ων/σχηματοποιήσεων στις ικανότητες της μη συμβολικής, της συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και των γνωστικών λειτουργιών μέσω της στρατηγι-κής της γνωστικής μαθητείας.

ε. Σε επίπεδο ελληνικής βιβλιογραφίας διαπιστώνεται έλλειψη διερεύνησης του φαινομένου τόσο σε επίπεδο μελέτης των ειδικών (μη συμβολικών και συμβολικών) και γνωστικών ελλειμμάτων, όσο και σε επίπεδο συνεισφοράς παρέμβασης σε αυτά τα ελλείμματα.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις παρώθησαν την ερευνητική αναζήτηση και αποτέλεσαν κίνητρο μείζονος διερεύνησης: (i) του ρόλου της ικανότητας της μη συμβολικής α-ριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας της αναπαράστασης συμβολικών αριθμητικών ποσοτήτων και των γνωστικών λειτουργιών της μνήμης και των επιτελικών λειτουρ-γιών, αλλά και της σύμπλοκης σχέσης τους, διαμορφώνοντας δείκτες και προβλεπτές της ειδικής μαθησιακής διαταραχής – δυσαριθμησίας, και να συμβάλλουν στην οργά-νωση αποτελεσματικών διδακτικών παρεμβάσεων, και (ii) του ρόλου της αναπαρά-στασης των αριθμητικών ποσοτήτων και τη σχέση τους με τη μορφή σχηματοποιή-σεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσου κωδικοποίησης και ως διαμεσολαβητικού παρά-γοντα τύπου σκαλωσιάς για την ενεργό κινητοποίηση της σύμπλοκης σχέσης τους κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων.

Βάσει των παραπάνω ερευνητικών αναζητήσεων και προβληματισμών τίθεται ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας.

### 1.2. Ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα

Η παρουσίαση του ερευνητικού προβλήματος στην παραπάνω ενότητα και η μείζονος σημασίας διερεύνησής του, δίνουν τη διττή διάσταση του σκοπού της προτεινόμενης έρευνας. Έτσι, σκοπός αφενός είναι (i) η διερεύνηση των υποκείμενων ικανοτήτων στη μη συμβολική και στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία, αλλά και των γνωστικών μηχανισμών που υπονομεύουν την απόκτηση της μαθηματικής ικανότητας παιδιών ηλικίας 8-9 ετών[5], με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, υπό το πρίσμα της σύγκλισης τριών υφιστάμενων θεωριών, η οποία σύγκλιση επιχειρείται λόγω της μεταβλητότητας και της ετερογένειας του φαινότυπου που παρουσιάζουν τα μαθησιακά προβλήματα στα μαθηματικά με ευρύτερο στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων, μέσα από αξιοποιήσιμα δεδομένα, σχετικά με τους δείκτες εκείνους που διαφοροποιούν τα εν λόγω παιδιά από τους τυπικούς συνομήλικους και τους προβλεπτές, δηλαδή τους παράγοντες εκείνους που ερμηνεύουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τη διαταραχή, και αφετέρου (ii) η διερεύνηση της συμβολής των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεων τους για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Ο προαναφερθέν διττός σκοπός της έρευνας θεμελιώνει την ανάγκη να αξιολογηθούν και να απαντηθούν μια σειρά από μείζονα ερευνητικά ερωτήματα.

**Ερευνητικά ερωτήματα**

Τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία βασίζονται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση που έπεται και στον διατυπωμένο διττό σκοπό της έρευνας τον οποίο διευκρινίζουν και

[5] Η επιλογή της συγκεκριμένης ηλικίας γίνεται: α) γιατί δεν έχει μελετηθεί επαρκώς καθώς οι περισσότερες έρευνες εστίασαν ή σε μικρότερες ηλικίες των 7 ετών ή μεγαλύτερες των 9 β) γιατί ενώ τα παιδιά έχουν δεχτεί ήδη δύο χρόνια τυπικής εκπαίδευσης διαπιστώνεται ελάχιστη πρόοδος και επιπρόσθετη αργοπορία εντοπισμού θα είναι καταστρεπτική. Αν και στόχος δεν είναι να επεκταθούμε στις κοινωνικοσυναισθηματικές πτυχές μιας αποκαταστασιακής προσπάθειας, είναι όμως απαραίτητο να τονιστεί ότι η αποδοχή του παιδιού με όλες τις δυσκολίες και τις δυνατότητές του, πρέπει να στηρίζεται σε μια ανάλυση της γνωσιακής του κατάστασης. Η βαθύτερη κατανόηση των δυσκολιών και των δυνατοτήτων του από τους σημαντικούς ενήλικες (εκπαιδευτικούς και γονείς) της ζωής του θα πρέπει να είναι από τους πρώτους στόχους μιας ενιαίας διαδικασίας εντοπισμού – παρέμβασης στα μαθηματικά.

οριοθετούν είναι τα εξής κάτωθι:

1. Ποια είναι η σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας (η οποία μεταφράζεται σε χαμηλά αριθμητικά επιτεύγματα) των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και του μη συμβολικού αριθμητικού συστήματος[6];
2. Ποια είναι η σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και της ικανότητας της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας[7];
3. Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των χαμηλών αριθμητικών επιτευγμάτων των παιδιών με δυσαριθμησία και της επίδοσης στις γνωστικές λειτουργίες[8];
4. Διαπιστώνεται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των παιδιών με την εν λόγω διαταραχή και τους τυπικούς συνομήλικους στις δοκιμασίες που αφορούν στην ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας;

[6] Ειδικότερα το πρώτο ερώτημα της έρευνας διαρθρώνεται σε τέσσερα υποερωτήματα: 1α) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών και του συστήματος των κατά προσέγγιση αριθμών; 1β) Υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών και της ικανότητας της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (subitize); 1γ) Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία αναφορικά με το ANS; 1δ) Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες αναφορικά με το subitize;

[7] Το 2$^{ο}$ ερώτημα της έρευνας, πλαισιώνουν επιπροσθέτως τα παρακάτω υποερωτήματα: 2α) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία με την επίδοσή τους στις απαριθμητικές ικανότητες; 2β) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία με την επίδοσή τους στη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών; 2γ) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών και της επίδρασης της απόστασης στους μονοψήφιους αριθμούς; 2δ) Συσχετίζεται σημαντική η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με την επίδοσή τους στη σύγκριση διψήφιων αριθμών; 2ε) Συσχετίζεται σημαντικά η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με την επίδραση της απόστασης στους διψήφιους αριθμούς; 2στ) Συσχετίζεται σημαντικά η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με την επίδραση του μεγέθους των αριθμών; 2ζ) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία και της αντίστροφης καταμέτρησης;

[8] 3α1) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία και της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης; 3α2) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της αριθμητικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία και των επιδόσεών τους στις οπτικοχωρικές δεξιότητες; 3β) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία και των εκτελεστικών λειτουργιών; 3β1) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία και της ικανότητας της προσοχής και της ταχύτητας επεξεργασίας; 3β2) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της ικανότητας αναστολής του φυσικού μεγέθους εμφάνισης του αριθμού; 3β3) Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία και της γνωστικής ευελιξίας;

5. Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των επιδόσεων των παιδιών με δυσαριθμησία και των τυπικών παιδιών στην εργαζόμενη μνήμη και στις εκτελεστικές λειτουργίες;
6. Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων στα παιδιά με δυσαριθμησία ή πρόκειται για δύο ανεξάρτητες ικανότητες;
7. Ποιες στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις προκύπτουν μεταξύ της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων με τον τομέα των γνωστικών μηχανισμών (μνήμη εργασίας, εκτελεστικές λειτουργίες);
8. Ποια είναι η ισχύς, σε ένα μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων, και των γνωστικών λειτουργιών στην ηλικία των 8-9 ετών;
9. Συμβάλλει η αναπαράσταση αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους, με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης και διαμεσολαβητικού παράγοντα ενεργοποίησης της σύμπλοκης σχέσης που αναμένεται να παρουσιάσουν οι ικανότητες στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, οι ικανότητες στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία των μαθητών και οι γνωστικές λειτουργίες, με τη στρατηγική της γνωστικής μαθητείας, στην εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων;
10. Υπάρχει στατιστικά σημαντική βελτίωση της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών από την αναπαράσταση των αριθμητικών πο-

σοτήτων και των σχέσεών τους, με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, από τη διαμεσολάβηση της διδακτικής παρέμβασης (πριν – μετά);

Μετά τον προσδιορισμό των άνωθεν ερευνητικών ερωτημάτων, έπεται η παρουσίαση των βασικών υποθέσεων της παρούσας έρευνας και η ανάλυση αυτών σε υποθέσεις μηδενικές και εναλλακτικές, καθώς σχετίζονται άμεσα με το σχεδιασμό της εμπειρικής έρευνας.

### 1.3. Οι βασικές υποθέσεις της έρευνας

Οι βασικές υποθέσεις της έρευνας είναι οι ακόλουθες δύο:

**Πρώτη υπόθεση της έρευνας**

Υποθέτουμε ότι η ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, η ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και οι γνωστικές λειτουργίες, αλλά και η σύμπλοκη σχέση μεταξύ τους σχετίζονται σε σημαντικό βαθμό με τη δυσαριθμησία και λειτουργούν ως αιτιολογικός παράγοντας εμφάνισής της. Διότι, η δυσαριθμησία εκλαμβάνεται ως έλλειψη «αίσθησης των αριθμών» και ως δυσκολία «πρόσβασης στην αποκωδικοποίηση» (Butterworth, 2005, 2010· Dehaene, 2011), εξαιτίας της αποσύνδεσης των αριθμητικών συμβόλων και των αναπαραστάσεών τους (Rousselle, & Noël, 2007), αλλά και ως έλλειψη στη λειτουργία των ανώτερων επιτελικών λειτουργιών και της μνήμης (Szücs, Devine, Soltesz, Nobes, & Gabriel, 2014). Η δυσαριθμησία ως διαταραχή στην αναπαράσταση των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεων τους προβάλλει ως προϊόν πολυμεταβλητής αιτιολογίας.

**Δεύτερη υπόθεση της έρευνας**

Υποθέτουμε ότι οι ικανότητες στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα, οι ικανότητες συμβολικής επεξεργασίας αριθμητικών μεγεθών και οι γνωστικές λειτουργίες που επηρεάζουν τη δυσαριθμησία ως αιτιολογικοί παράγοντες εμφάνισής της, θα βελτιωθούν από τη διαμεσολάβηση των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους στην εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας. Διότι, οι σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις ενεργοποιούν τις διαδικασίες αναπαράστασης, κωδικοποίησης, κατηγοριοποίησης, με τις οποίες οι μαθητές συγκροτούν τις δομές των αλγόριθμων των αριθμητικών πράξεων (Van de Walle, 2005· Kalantzis, & Cope, 2013). Η δε στρατηγική της γνωστικής μαθητείας έχει κριθεί κατάλληλη για μαθήσεις που ενεργοποιούν τις ανώτερες επιτελικές λειτουργίες και επιδιώκουν την εκμάθηση προτύπων (Collins, 2006· Engeström, 2001· Kalantzis, & Cope, 2013· Σαλβαράς, 2013β).

Ειδικότερα, οι δύο υποθέσεις της έρευνας, βάσει των ερευνητικών ερωτημάτων που προηγήθηκαν, αναλύονται ως ακολούθως:

($α_1$) Υπόθεση μηδενική: Η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες δεν είναι σημαντικά στατιστικά συσχετισμένη με το ANS.

($α_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες είναι σημαντικά στατιστικά συσχετισμένη με το ANS.

($β_1$) Υπόθεση μηδενική: Η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες δεν είναι σημαντικά στατιστικά συσχετισμένη με το Subitize.

($β_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες είναι σημαντικά στατιστικά συσχετισμένη με το Subitize.

($γ_1$) Υπόθεση μηδενική: Δεν διαπιστώνεται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και τυπικών παιδιών, στο σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών (Approximate Number System, ANS).

($γ_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Διαπιστώνεται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και τυπικών παιδιών, στο σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών (Approximate Number System, ANS).

($δ_1$) Υπόθεση μηδενική: Τα παιδιά με δυσαριθμησία δεν παρουσιάζουν μειωμένο εύρος subitize σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους.

($δ_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Τα παιδιά με δυσαριθμησία παρουσιάζουν μειωμένο εύρος subitize, σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους.

($ε_1$) Υπόθεση μηδενική: Η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με δυσαριθμησία δεν είναι σημαντικά στατιστικά συσχετισμένη με την επίδοση στις συμβολικές ικανότητες.

($ε_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με δυσαριθμησία είναι σημαντικά στατιστικά συσχετισμένη με την επίδοση στις συμβολικές ικανότητες.

($στ_1$) Υπόθεση μηδενική: Δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των χαμηλών αριθμητικών επιτευγμάτων των παιδιών με δυσαριθμησία και της επίδοσης στις γνωστικές λειτουργίες.

($στ_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των χαμηλών αριθμητικών επιτευγμάτων των παιδιών με δυσαριθμησία και της επίδοσης στις γνωστικές λειτουργίες.

($ζ_1$) Υπόθεση μηδενική: Η ικανότητα στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση (ANS και subitize) και η ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας όπως, απαρίθμηση, σύγκριση μονοψήφιων-διψήφιων, επίδραση φαινομένου απόστασης-μεγέθους και αντίστροφη καταμέτρηση, δεν αλληλοσυσχετίζονται.

($ζ_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Η ικανότητα στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση

(ANS και subitize) και η ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας όπως, απαρίθμηση, σύγκριση μονοψήφιων-διψήφιων, επίδραση φαινομένου απόστασης-μεγέθους και αντίστροφη καταμέτρηση, αλληλοσυσχετίζονται.

($η_1$) Υπόθεση μηδενική: Δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του μη συμβολικού αριθμητικού συστήματος, του συμβολικού αριθμητικού συστήματος, της εργαζόμενης μνήμης και των εκτελεστικών λειτουργιών.

($η_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του μη συμβολικού αριθμητικού συστήματος, του συμβολικού αριθμητικού συστήματος, της εργαζόμενης μνήμης και των εκτελεστικών λειτουργιών.

($θ_1$) Υπόθεση μηδενική: Η αναπαράσταση των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους, με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης αυτών, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, δε θα βελτιώσει την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων.

($θ_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Η αναπαράσταση των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους, με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης αυτών με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας θα βελτιώσει την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων.

($ι_1$) Υπόθεση μηδενική: Η παρέμβαση μέσω των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων των αριθμητικών ποσοτήτων κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, δε θα βελτιώσει την ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, την ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και τις γνωστικές λειτουργίες.

($ι_2$) Υπόθεση εναλλακτική: Η παρέμβαση μέσω των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων των αριθμητικών ποσοτήτων κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, θα βελτιώσει την ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, την ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και τις γνωστικές λειτουργίες.

Έχοντας προσδιορίσει την προβληματική της έρευνας, τη διατύπωση του διττού σκοπού, των ερευνητικών ερωτημάτων και των υποθέσεων αυτής, ακολουθούν οι εννοιολογήσεις των σημαντικών όρων της έρευνας, με σκοπό την επαρκή οριοθέτηση αυτών (Mertens, 2009, σελ. 511), για την κατανόηση του αντικειμένου της έρευνας.

### 1.4. Σημαντικοί όροι της έρευνας

Στην ενότητα αυτή διασαφηνίζονται οι σημαντικοί όροι της έρευνας, οι οποίοι αποτελούν τα σημεία εστίασης της θεματικής που διερευνάται. Αναμένεται, οι εννοιολογικές οριοθετήσεις αυτών να υποβοηθήσουν σε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τα θέματα που αποτελούν το αντικείμενο της παρούσας έρευνας.

Σημαντικοί όροι της έρευνας, που άπτονται εννοιολογικής οριοθέτησης, είναι η *ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης*, η *ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, οι γνωστικές λειτουργίες, οι σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις* και η *στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.*

#### 1.4.1. Η ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης ή αίσθηση αριθμού

Η *ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης* ή *αίσθηση αριθμού* αναφέρεται σε μια έμφυτη ικανότητα αναπαράστασης μη συμβολικών αριθμητικών ποσοτήτων, η οποία δίνει τη δυνατότητα της κατά προσέγγιση εκτίμηση της πληθικότητας ενός συνόλου αντικειμένων, της επιτυχούς εκτίμησης των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αριθμητικών ποσοτήτων (π.χ. ποιες κουκκίδες είναι περισσότερες οι μπλε ή οι κίτρινες, ποια ομάδα κύβων έχει τους περισσότερους κύβους), και ταυτοχρόνως τη δυνατότητα της ακριβούς εκτίμησης ολιγάριθμων ποσοτήτων (από ένα έως τέσσερα αντικείμενα), χωρίς προσφυγή στην καταμέτρηση (Butterworth, 2005, 2010·

Dehaene, 2011· Wilson, & Dehaene, 2007).

Η ικανότητα αυτή, πιστεύεται ότι είναι φυλογενετικά προσδιορισμένη με προκαθορισμένα εγκεφαλικά νευρωνικά δίκτυα. Αυτά τα νευρωνικά δίκτυα εμπλέκονται εξ' ολοκλήρου στις αναπαραστάσεις αριθμητικών μεγεθών και προηγούνται της ύπαρξης της γλώσσας και των αραβικών ψηφίων (Dehaene, 2011· Piazza, 2010).

Τη βάση του προλεκτικού (μη συμβολικού) συστήματος αριθμών αποτελούν δύο διακριτά συστήματα, τα οποία είναι παρόντα στα βρέφη (Mou, & vanMarle, 2014) και σε άλλα είδη ζώων (Agrillo, Piffer, Bisazza, & Butterworth, 2012): Το *σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών* (Approximate Number System, ANS) και το *σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης* (Parallel Individuation, PI) ή *σύστημα εντοπισμού αντικειμένων* (Object Tracking System, OTS) (Piazza, 2010).

Το *σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών* (ANS) είναι ένα γνωστικό σύστημα που υποστηρίζει την εκτίμηση του μεγέθους μιας ποσότητας (δηλαδή την κατά προσέγγιση εκτίμηση της πληθικότητας ενός συνόλου αντικειμένων) (Dehaene, 2011) και ταυτόχρονα την κατά προσέγγιση αποτύπωση και αναπαράσταση των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αριθμητικών ποσοτήτων (Barth, La Mont, Lipton, Dehaene, Kanwisher, & Spelke, 2006).

Το δεύτερο σύστημα *PI ή OTS* είναι επίσης ένα μη συμβολικό εγγενές σύστημα, που επιτρέπει την ακριβή και ταχεία διάκριση μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (Piazza, 2010) μέσα από μια διαδικασία που ονομάζεται subitizing (χωρίς καταμέτρηση ή γνώση της ποσότητας με μια ματιά).

Ο όρος *Subitizing* (γνώση της ποσότητας με μια ματιά) αναφέρεται στην ικανότητα της γρήγορης και ακριβούς εκτίμησης του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων, που αριθμητικά κυμαίνονται από ένα έως και τέσσερα αντικείμενα, σε χρόνους που δεν επιτρέπουν την προσφυγή στην καταμέτρηση. Πρόκειται για μια ικανότητα ολικής αντίληψης αυτών των ολιγάριθμων συλλογών (Dehaene, 2011· Fischer, Gebhardt, & Hartnegg, 2008· Mazza, Pagano, & Caramazza, 2012).

### 1.4.2. Η ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας

Η *ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας* αναφέρεται στην ικανότητα κατανόησης, αναπαράστασης, παραγωγής και επεξεργασίας αριθμητικών ποσοτήτων με τη χρήση αφηρημένων πολιτισμικών συμβόλων, όπως οι αριθμολέξεις «τέσσερα», «δέκα» ή «συν», τα αραβικά ψηφία όπως «4», «10» ή τα σύμβολα «+» (Lyons, & Beilock, 2013). Ειδικότερα, πρόκειται για μια ικανότητα επεξεργασίας ποσοτικών πληροφοριών μέσω συμβόλων. Η ανάπτυξη αυτής συνυφαίνεται με την ανάπτυξη και κατάκτηση της *έννοιας του αριθμού*, η οποία κατάκτηση διαμεσολαβείται από τη διδακτική πράξη, και σύμφωνα με τους Thornton και Tucker (1989, σελ. 21), «*η κατάκτηση αυτής γίνεται ομαλά εάν υπάρχει μια συνεχής εστίαση της διδασκαλίας προς αυτόν τον στόχο, μέρα με τη μέρα, και αν σε κάθε μάθημα υπάρχουν σχετικές ερωτήσεις*».

Ως προς τις μαθηματικές συμπεριφορές, η κατάκτηση της έννοιας του αριθμού περιλαμβάνει ένα σύνολο ικανοτήτων (Κολέζα, 2009, σελ. 255), όπως:

1. ικανότητες *απαρίθμησης* όπου οι λέξεις – αριθμοί λέγονται σε μια κατάσταση οντοτήτων και κάθε λέξη – αριθμός αναφέρεται σε μια οντότητα, με την τελευταία αριθμολέξη να δηλώνει τον πληθάριθμο των οντοτήτων. Οι αριθμολέξεις αναφέρονται σε οντότητες και αποδίδονται σε αυτές με τη διαδικασία της απαρίθμησης, αλλά οι αριθμολέξεις δεν περιγράφουν κάποιο χαρακτηριστικό των οντοτήτων αυτών (Λεμονίδης, 2016, 2017, σελ. 47),
2. το νόημα του αριθμού (π.χ. τι σημαίνει το αραβικό ψηφίο 8 – αναφορά στην πληθικότητα - ή τι σημαίνει το 2/3), δηλαδή σύνδεση των αριθμητικών συμβόλων με τις ποσότητες που εκφράζουν, και σύνδεση των αριθμητικών συμβόλων και των λεκτικών τους αναφορών,

3. την αξία της θέσης των ψηφίων ενός αριθμού (π.χ. όταν δίνεται ο αριθμός 1.234 να μπορεί να γίνει διαφοροποίηση μεταξύ του ό,τι το 3 είναι το ψηφίο των δεκάδων, αλλά ο αριθμός έχει 123 δεκάδες),
4. τους τρόπους αναπαράστασης ενός αριθμού (με αριθμολέξη, με αραβικό ψηφίο, το κλάσμα με δεκαδικό αριθμό, με ποσοστό κ.τ.λ.),
5. τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών (κατανόηση ισοδύναμων εκφράσεων),
6. το σχετικό μέγεθος και η απόσταση των αριθμών, και
7. την ικανότητα χρήσης των αριθμών για την επίλυση προβλημάτων.

Η μέτρηση των συμβολικών ικανοτήτων συναρτάται με τον ορισμό που χρησιμοποιεί ο κάθε ερευνητής για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού και αντιστοίχως οι αναπτυξιακές δοκιμασίες μέτρησης των συμβολικών ικανοτήτων διαφοροποιούνται. Στη μέχρι τώρα βιβλιογραφία, υπάρχουν ερευνητές που χρησιμοποιούν απαριθμητικές δοκιμασίες (Jordan, Kaplan, Locuniak, & Ramineni, 2007), ερευνητές που χρησιμοποιούν διαδικασίες σύγκρισης αριθμών (Olsson, Östergren, & Träff, 2016) και ερευνητές που χρησιμοποιούν την εκτίμηση στην αριθμογραμμή (Piazza, 2010).

Στην παρούσα έρευνα η μέτρηση της ικανότητας της συμβολικής έννοιας του αριθμού θα γίνει μέσω της *ικανότητας της απαρίθμησης,* της *σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών,* της *επίδρασης της απόστασης των αριθμών,* της *επίδρασης του μεγέθους του αριθμού,* της *σύγκρισης των διψήφιων αριθμών* και της συνακόλουθης *επίδρασης απόστασης* και *μεγέθους,* και *της αντίστροφης καταμέτρησης,* έτσι ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένες μετρήσεις αυτής της ικανότητας.

Η *ικανότητα της απαρίθμησης* μιας συλλογής αντικειμένων – οντοτήτων αναφέρεται στην ικανότητα της αντιστοίχισης ένα προς ένα των αριθμολέξεων της προφορικής ακολουθίας των αραβικών ψηφίων με τα στοιχεία της συλλογής. Η τελευταία αριθμολέξη που αντιστοιχεί στο τελευταίο στοιχείο της συλλογής αναπαριστά το πλήθος (πληθάριθμο) της συλλογής (Λεμονίδης, 2016, 2017, σελ. 47).

Η ικανότητα της απαρίθμησης σύμφωνα με τους Gelman και Gallistel (1978) (όπ. αναφ. στο Λεμονίδης, 2013, σελ 45), δεν είναι απλή και μονοσήμαντη, αλλά μια πενταεπίπεδη ιεραρχική ικανότητα η οποία περιλαμβάνει:

1. Τη γνώση της λεκτικής εκφοράς της ακολουθίας των αριθμολέξεων (ένα, δύο, τρία…), (*αρχή της σταθερής ακολουθίας*).
2. Τη γνώση της αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, σύμφωνα με την οποία κάθε στοιχείο μιας συλλογής πρέπει να ονομάζεται από μια και μόνο αριθμολέξη, (*αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα*).
3. Την κατανόηση της αρχής της πληθικότητας, σύμφωνα με την οποία η αριθμολέξη που χρησιμοποιείται για να ονομάσει το τελευταίο στοιχείο μιας συλλογής αναπαριστά το συνολικό αριθμό των στοιχείων (*αρχή της πληθικότητας*). Η έννοια της πληθικότητας (numerosity) χρησιμοποιείται στο κείμενο του Butterworth (2005, σελ. 3), ως το γνωστικό ομόλογο του όρου πληθάριθμος (cardinality), που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά και τη λογική, και έπεται των δύο προαναφερόμενων αρχών. Σύμφωνα με την Wynn (1992), η κατάκτηση της αρχής της πληθικότητας είναι προαπαιτούμενο των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.
4. Την αρχή της αφαίρεσης που επιτρέπει την ομαδοποίηση μιας συλλογής στοιχείων διαφορετικής φύσης με σκοπό να τα απαριθμήσουμε (*αρχή της αφαίρεσης*).
5. Την αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς, σύμφωνα με την οποία η σειρά με την οποία απαριθμούμε τα στοιχεία μιας συλλογής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα μιας απαρίθμησης, με την προϋπόθεση ότι τηρείται η αρχή του ένα προς ένα (*αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς*).

Για παράδειγμα, σύμφωνα με τις προηγούμενες πέντε αρχές, όταν ζητάμε από το παιδί να μετρήσει 8 κουκκίδες εκείνο θα πρέπει:

1. Να ξέρει να απαγγέλει προφορικά από το «ένα» μέχρι το «οκτώ» και κάθε φορά να κρατάει τη σταθερή σειρά των αριθμολέξεων (*αρχή σταθερής ακολουθίας*).
2. Σε κάθε κουκκίδα πρέπει να αντιστοιχεί μια και μόνο αριθμολέξη (*αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα*).
3. Η αριθμολέξη «οκτώ» που αντιστοιχεί στην τελευταία κουκκίδα δείχνει το συνολικό αριθμό από τις κουκκίδες δηλαδή τον πληθάριθμο των κουκκίδων (*αρχή της πληθικότητας*).
4. Το πόσες είναι οι κουκκίδες δεν εξαρτάται από το χρώμα τους, το μέγεθός τους, το αν είναι όμοιες (*αρχή της αφαίρεσης*).
5. Μπορεί να απαριθμήσει τις κουκκίδες ξεκινώντας από όποια θέλει, αρκεί να τις μετρήσει όλες (*αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς*).

Η *σύγκριση μονοψήφιων αριθμών* αφορά στην ικανότητα σύγκρισης αριθμών από το ένα έως το εννέα μεταξύ αριθμητικών συμβόλων, όπως για παράδειγμα «Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος το 8 ή το 9;» Η ικανότητα της σύγκρισης αντανακλά την ικανότητα της νοητικής αναπαράστασης των αριθμών και της συνακόλουθης ποσότητας που εκφράζουν. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που καλείται να απαντήσει στην παραπάνω ερώτηση σύγκρισης, θα πρέπει να κατέχει ορισμένα από τα συστατικά της έννοιας του αριθμού, όπως ότι α) οι αριθμοί εκφράζουν μεγέθη – ποσότητες και επομένως μπορούν να συγκριθούν, β) οι αριθμοί καταλαμβάνουν συγκεκριμένη θέση σε μια μετρητική ακολουθία με αυξητική πορεία και, συνεπώς, αυτοί που εμφανίζονται ψηλότερα στην ακολουθία είναι μεγαλύτεροι (φανερώνουν μεγαλύτερη ποσότητα) και γ) διαδοχικοί αριθμοί της ακολουθίας διαφέρουν ακριβώς κατά μια μονάδα, ανεξάρτητα από το μέγεθος τους (π.χ. να μπορεί να αναγνωρίσει ότι το 8 διαφέρει από το 9 κατά μία μονάδα όπως ακριβώς συμβαίνει με τους αριθμούς 18 και 19 ή 118 και 119 κ.τ.λ.) (Αγαλιώτης, 2013· Λεμονίδης, 2013).

Θεωρούμε πως η σύγκριση των αριθμητικών συμβόλων, δηλαδή η σύγκριση δεδομένων πληθικοτήτων, έπεται της γνώσης της απαρίθμησης που είναι συνδεδεμένη με την πληθικότητα, καθώς το παιδί πρέπει να αναπαραστήσει κατά τη σύγκριση αυτές τις πληθικότητες (τους πληθάριθμους ή τις ποσότητες) και να δηλώσει ποιος πληθάριθμος είναι μεγαλύτερος.

Η *επίδραση της απόστασης του αριθμού*, αναφέρεται στο γεγονός ότι είναι ευκολότερη και ταχύτερη η διάκριση μεταξύ ποσοτήτων όσο μεγαλώνει η αριθμητική απόσταση μεταξύ τους. Το φαινόμενο στο συμβολικό επίπεδο μπορεί να παρατηρηθεί, όταν οι συμμετέχοντες καλούνται να προσδιορίσουν ποιο από τα δύο αραβικά αριθμητικά στοιχεία που παρουσιάζονται ταυτόχρονα είναι το μεγαλύτερο. Για παράδειγμα οι συμμετέχοντες απαντούν γενικά πιο γρήγορα όταν συγκρίνονται αριθμοί με μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους (π.χ. το 4 με το 9) απ’ ό,τι σε μικρότερη απόσταση (π.χ. το 4 με το 5) (Krajcsi, Lengyel, & Kojouharova, 2016· Moyer, & Landauer, 1967· Sekuler, & Mierkiewicz, 1977).

Η *επίδραση του μεγέθους του αριθμού,* αναφέρεται στην παρατήρηση ότι είναι ευκολότερη η διάκριση μικρών ποσοτήτων έναντι μεγαλύτερων παρά την ίδια αριθμητική απόσταση. Στο συμβολικό επίπεδο, το φαινόμενο αναφέρεται στην παρατήρηση ότι η επιλογή του μεγαλύτερου από τους δύο αριθμούς είναι ταχύτερος όταν οι αριθμοί που συγκρίνονται είναι μικροί (3 έναντι 4) από ό, τι όταν είναι μεγάλοι (8 έναντι 9) (Krajcsi et al., 2016· Moyer, & Landauer, 1967· Sekuler, & Mierkiewicz, 1977).

Η *σύγκριση διψήφιων αριθμών* αφορά στην ικανότητα σύγκρισης αριθμών από το έντεκα έως το ενενήντα εννέα, μεταξύ αραβικών ψηφίων, όπως για παράδειγμα «Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος το 31 ή το 35;» Η ικανότητα της σύγκρισης αντανακλά την ικανότητα της νοητικής αναπαράστασης των αριθμών και της συνακόλουθης ποσότητας που εκφράζουν, των σχέσεων μεταξύ τους, καθώς και τη γνώση της θεσιακής αξίας των συγκεκριμένων αριθμών.

Η *αντίστροφη καταμέτρηση*, αναφέρεται στην ικανότητα του μαθητή να εκτιμά τη χωρική θέση των αριθμητικών αναπαραστάσεων, δηλαδή την ανάπτυξη της γραμμικότητας της συμβολικής διανοητικής γραμμής (Piazza, 2010).

### 1.4.3. Οι γνωστικές λειτουργίες

Οι γνωστικές λειτουργίες είναι ανώτερες, επιμέρους εσωτερικές νοητικές διεργασίες όπως *η αντίληψη, η προσοχή, η μνήμη, η σκέψη, ο λόγος, οι αναπαραστάσεις* κ.ά. οι οποίες είτε ατομικά είτε σε συνδυασμό μεταξύ τους εμπλέκονται άμεσα ή έμμεσα στη διαδικασία της εγγραφής και επεξεργασίας των πληροφοριών στον εγκέφαλο, εισρέουν μέσω των αισθητηριακών διόδων επικοινωνίας, και οδηγούν στην αποθήκευση, οργάνωση και χρήση της γνώσης (Neisser, 1967).

Ανάμεσά τους, η *μνήμη* θεωρείται μία από τις υψηλότερες νοητικές διεργασίες του ανθρώπινου εγκέφαλου (Στασινός, 2015, σελ. 121), η οποία περιλαμβάνει τις λειτουργίες της κωδικοποίησης, της αποθήκευσης και της ανάκτησης των πληροφοριών στη συνείδηση (Μάνιου – Βακάλη, 1995, σελ. 18· Παπαδάτος, 2011, σελ. 152).

Η διερεύνηση της φύσης της ξεκίνησε από τα χρόνια της κλασικής αρχαιότητας (Στασινός, 2015, σελ. 121), και απασχολεί σήμερα διάφορες περιοχές της έρευνας και επαγγελματικές ομάδες από τους τομείς της εκπαίδευσης, της ιατρικής και της ψυχολογίας. Από το χώρο της ψυχολογίας οι γνωστικοί ψυχολόγοι προσπαθούν να εξηγήσουν την εμπλοκή της στη γνωστική ικανότητα του ατόμου, ενώ οι νευροεπιστήμονες στοχεύουν στον προσδιορισμό των εγκεφαλικών περιοχών των μνημονικών λειτουργιών (Στασινός, 2015, σελ. 121), καθώς διαφορετικοί τύποι μνήμης αποθηκεύονται σε διαφορετικά νευρωνικά συστήματα (Παπαδάτος, 2011, σελ. 153).

Η μνήμη, σύμφωνα με τη σύγχρονη επιστημονική θεώρηση, δεν είναι ενιαία και είναι δυνατό να διακριθεί σε άδηλη και έκδηλη με βάση τον τρόπο αποθήκευσης των πληροφοριών (Παπαδάτος, 2011, σελ. 156). Η άδηλη μνήμη (μη δηλωτική) έχει έναν αντανακλαστικό ή αυτόματο χαρακτήρα. Πρόκειται για μια ανομοιόμορφη συγκέντρωση από ασυνείδητες ικανότητες και επίκτητες δεξιότητες. Παραδείγματα άδηλης μνήμης περιλαμβάνουν αντιληπτικές και κινητικές δεξιότητες (ικανότητα του ατόμου να κάνει ποδήλατο, η εκμάθηση του αυτοκινήτου), καθώς και την εκμάθηση τύπων διαδικασιών και κανόνων (π.χ. κανόνες γραμματικής, αποστήθιση προπαίδειας). Γενικά, στην άδηλη μνήμη δεν απαιτείται σκόπιμη ανάκληση και παρεμβαίνουν διάφορες αντιληπτικές και αντανακλαστικές οδοί (Παπαδάτος, 2011).

Η έκδηλη (δηλωτική) μνήμη αναφέρεται στη μνήμη για δεδομένα, γεγονότα, έννοιες και χωρίζεται σε τρία επιμέρους είδη μνήμης: τη βραχύχρονη μνήμη, την εργαζόμενη μνήμη και τη σημασιολογική μνήμη.

Η ερευνητική ανίχνευση της παρούσας έρευνας εστιάζει στην εργαζόμενη μνήμη, που στηρίζεται στο πολυπαραγοντικό μοντέλο των Baddeley και Hitch (1974) με αναφορά στη βραχύχρονη μνήμη, καθώς η ενεργός μνήμη αποτελεί σύμφωνα με το ίδιο το μοντέλο, προέκταση αυτής[9]. Η ερευνητική αυτή ανίχνευση συνδέεται αφενός με το γεγονός, ότι οι συνιστώσες αυτής είναι σαφώς περιγεγραμμένες και συνεπώς δύναται να οριστούν τόσο εννοιολογικά όσο και λειτουργικά με σχετική ακρίβεια, στη βιβλιογραφία απαντώνται πολλά γνωστικά έργα για τη μέτρησή τους, οι διάφορες συνιστώσες αυτής φαίνεται να εμπλέκονται σε μαθηματικά έργα, και αφετέρου με την αντικρουόμενη συνεισφορά των ευρημάτων ερευνών στο χαρακτηρισμό τής

[9] Οι όροι «βραχύχρονη μνήμη» και «ενεργός μνήμη» αν και διαφοροποιούνται, εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται μερικές φορές εναλλακτικά στη βιβλιογραφία (Baddeley, 2012).

δυσαριθμησίας.

Η *βραχύχρονη μνήμη* αναφέρεται στην ικανότητα της συγκράτησης των πληροφοριών αμέσως μετά τη διέλευσή τους από τα αισθητήρια όργανα. Η ικανότητα συγκράτησης διαρκεί 15 έως 20 δευτερόλεπτα (Παρασκευόπουλος, 1985, σελ. 102). Παράδειγμα συγκράτησης στη βραχυπρόθεσμη μνήμη είναι η ικανότητα της άμεσης επανάληψης μιας σειράς λέξεων ή αριθμών (π.χ. η συγκράτηση και η άμεση ανάκληση ενός αριθμού τηλεφώνου που μόλις ακούσαμε). Το σύστημα της βραχύχρονης μνήμης έχει περιορισμένη χωρητικότητα, έτσι ο μέσος όρος μιας σειράς αριθμών που μπορεί κανείς να επαναλάβει είναι «*επτά*»[10] (Miller, 1956). Οι συναφείς με τη βραχύχρονη μνήμη περιοχές του εγκεφάλου που την υποστηρίζουν αφορούν στους προμετωπιαίους λοβούς (prefrontal lobes) (Στασινός, 2015, σελ. 121), τον μετωπιαίο και τον βρεγματικό φλοιό με πολλαπλές συνδέσεις μεταξύ τους (Παπαδάτος, 2011).

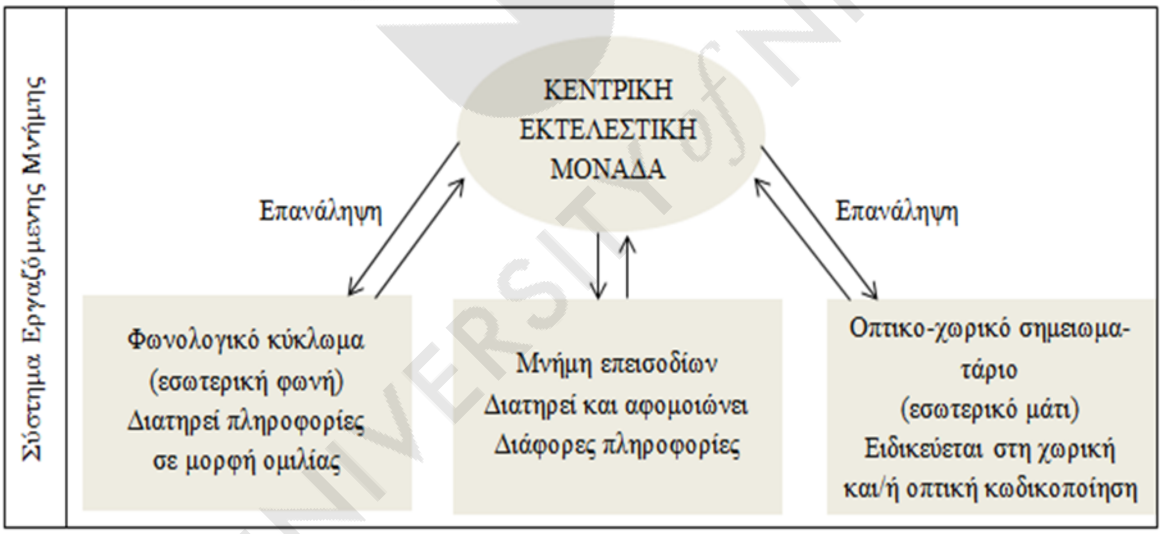
Ο όρος *εργαζόμενη μνήμη* αναφέρεται σε ένα νοητικό σύστημα που διαθέτει τις λειτουργίες της γνωστικής επεξεργασίας και της προσωρινής αποθήκευσης των πληροφοριών (Eysenck, 2010, σελ. 226). Το 1974, οι δύο βρετανοί ψυχολόγοι, Baddeley και Hitch, υποστήριξαν ότι χρησιμοποιούμε τη βραχύχρονη μνήμη όταν αναλαμβάνουμε ένα πολυσύνθετο γνωστικό έργο, η ολοκλήρωση του οποίου απαιτεί πολλές επεξεργασίες. Ωστόσο, πρέπει να έχουμε μια ταχεία αποθήκευση των πληροφοριών για τα αποτελέσματα των πρώτων επεξεργασιών στη βραχύχρονη μνήμη καθώς μετακινούμαστε προς τις επόμενες επεξεργασίες. Για παράδειγμα σε ένα σύνθετο πρόβλημα πρόσθεσης όπως 15 + 16 + 25 αυτό που θα κάνουμε πιθανότατα είναι να προσθέσουμε πρώτα το 15 + 16 και να κρατήσουμε την απάντηση (δηλαδή 31) στη βραχύχρονη μνήμη. Μετά να προσθέσουμε το 31 + 25 και να παράγουμε τη σωστή

[10] Η αντίληψη του Miller (1956) για τον «μαγικό αριθμό επτά» (μείον ή και δύο) μπορεί να είναι χρήσιμη κατά τον προγραμματισμό των πληροφοριών που πρέπει να μεταδοθούν ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, είναι ευκολότερο να θυμάται ένα άτομο μια πρόταση πέντε έως επτά λέξεων από μια μακρύτερη. Με τον ίδιο τρόπο, είναι πολύ πιο εύκολο να θυμηθούμε πέντε νέες έννοιες από τις εννέα.

απάντηση 56.

Οι Baddeley και Hitch (1974) χρησιμοποίησαν τον όρο *εργαζόμενη μνήμη* για να αναφερθούν σε ένα σύστημα που συνδυάζει την επεξεργασία με λειτουργίες βραχύχρονης μνήμης. Ειδικότερα, σύμφωνα με τον ορισμό των Baddeley και Logie (1999, σελ. 28) «*η εργαζόμενη μνήμη περιλαμβάνει πολλά εξειδικευμένα τμήματα γνωστικής λειτουργίας που επιτρέπουν στους ανθρώπους να κατανοούν και να αναπαριστούν νοητικά το άμεσο περιβάλλον τους, να συγκρατούν πληροφορίες για εμπειρίες του άμεσου παρελθόντος, να υποστηρίζουν την απόκτηση νέας γνώσης, να επιλύουν προβλήματα και να διατυπώνουν, συσχετίζουν και επενεργούν σε τρέχοντες στόχους*».

Το σύστημα της εργαζόμενης μνήμης στο μοντέλο του Baddeley είναι ιεραρχικό στη φύση του και πολυδομικό, αφού το συναποτελούν τέσσερα υποσυστήματα (Βλ. Σχήμα 1.1).




*Σχήμα 1.1. Σύστημα Εργαζόμενης Μνήμης του Baddeley. Σχήμα προσαρμοσμένο από Eysenck (2010, σελ. 227) και Baddeley (2000, σελ. 421).*

Το φωνολογικό κύκλωμα, το οπτικό – χωρικό σημειωματάριο και η μνήμη επεισοδίων[11] είναι συστήματα «σκλάβοι» στη βάση της ιεραρχίας (Baddeley, 2000,

[11] Το 2000, ο Baddeley προσάρμοσε στο μοντέλο της μνήμης εργασίας την ενδιάμεση μνήμη επεισοδίων, ως ένα τμήμα που μπορεί να συγκρατεί πληροφορίες από το φωνολογικό κύκλωμα, το οπτικοχωρικό σημειωματάριο και τη μακρόχρονη μνήμη (σελ. 421). Η μνήμη επεισοδίων εξηγεί πώς αλληλεπι-

σελ. 421). Είναι συστήματα σκλάβοι με την έννοια ότι χρησιμοποιούνται για διάφορους σκοπούς από την κεντρική εκτελεστική μονάδα του συστήματος που ευθύνεται για την προσοχή. Όλα τα ανωτέρα τμήματα της βασικής εργαζόμενης μνήμης έχουν περιορισμένη χωρητικότητα. Ωστόσο, το κάθε τμήμα μπορεί να λειτουργεί σχετικά ανεξάρτητα από τα άλλα, εκτός από την περίπτωση που ένα σύστημα – σκλάβος, με την έννοια του υποσυστήματος, επηρεάζεται από τις υποδείξεις της κεντρικής εκτελεστικής μονάδας.

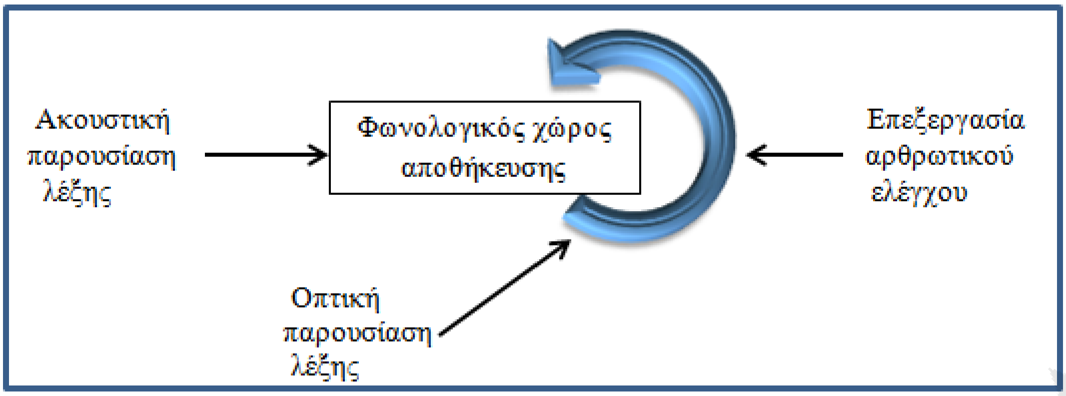
Η *Λεκτική (ακουστική) εργαζόμενη μνήμη* είναι ένα τμήμα της εργαζόμενης μνήμης στο οποίο διατηρούνται πληροφορίες βάσει του λόγου και συμβαίνει άφωνη άρθρωση τους, δηλαδή υποφωνητική εσωτερική επανάληψη (εσωτερική φωνή) εντός του φωνολογικού κυκλώματος, η οποία ενδυναμώνει τη συγκράτηση των λεκτικών πληροφοριών (Eysenck, 2010). Η υποφωνητική εσωτερική επανάληψη ταυτίζεται με τον ομόλογο όρο του Baddeley «επεξεργασία αρθρωτικού ή φωνολογικού ελέγχου» η οποία είναι υπεύθυνη για την επεξεργασία των λεκτικών πληροφοριών (Baddeley, 2000).

Ειδικότερα, ο Baddeley (όπ. αναφ. στο Eysenck, 2010, σελ. 230) έκανε τη διάκριση μεταξύ του φωνολογικού βραχύχρονου χώρου αποθήκευσης λεκτικών πληροφοριών και της επεξεργασίας αρθρωτικού ελέγχου (Βλ. Σχήμα 1.2.).

Ο πρώτος χώρος είναι ένας παθητικός χώρος αποθήκευσης της πληροφορίας και ο δεύτερος συνδέεται με την επανάληψη των πληροφοριών δίνοντας έτσι πρόσβαση στο φωνολογικό χώρο αποθήκευσης. Σύμφωνα με τους Baddeley, Gathercole και Papagno (1998), η επεξεργασία αρθρωτικού ελέγχου προκαλεί επαναδραστηριοποίηση της πληροφορίας μέσω μιας διαδικασίας εσωτερικής επανεμφάνισης. Ασθενείς που έχουν ανέπαφο φωνολογικό αποθηκευτικό χώρο, αλλά κατεστραμμένη επε-

δρά η μνήμη εργασίας με τη μακρόχρονη μνήμη και ενσωματώνει πληροφορίες από όλα τα άλλα συστήματα σε μια ενοποιημένη εμπειρία.

ξεργασία φωνολογικού ελέγχου, στερούνται της δυνατότητας εσωτερικής υποφωνητικής επανάληψης (Vallar, Di Betta, & Silveri, 1997), και κατ' επέκταση τη συγκράτηση και αναπαραγωγή λεκτικών πληροφοριών.

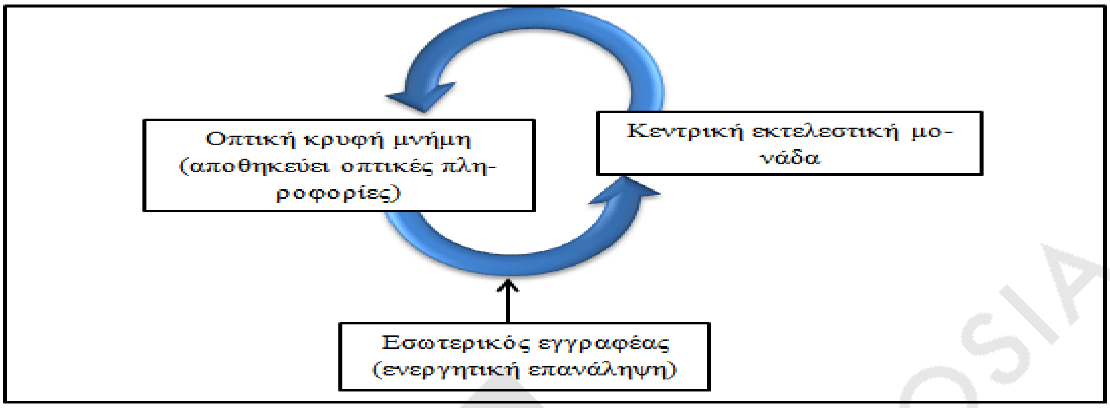



*Σχήμα 1.2. Το σύστημα του φωνολογικού κυκλώματος του Baddeley. Σχήμα προσαρμοσμένο από Eysenck (2010, σελ. 230)*

Χρήση του παραπάνω συστήματος της εργαζόμενης μνήμης κάνουν οι μαθητές όταν για παράδειγμα πρέπει να θυμούνται με τη σειρά τρεις ή περισσότερους αριθμούς ή ασύνδετες λέξεις μεταξύ τους και να μπορούν να ανακαλέσουν αυτές τις πληροφορίες και με την αντίστροφη σειρά, όταν επαναλαμβάνουν χαμηλοφώνως ή εσωτερικά τις λεκτικές πληροφορίες (διαδοχικά βήματα) για την επίλυση ενός αλγόριθμου ενώ ταυτόχρονα εκτελούν τον αλγόριθμο, όταν ακολουθούν πολύπλοκες προφορικές οδηγίες όπως: «Τοποθετήστε όλοι τις φωτοτυπίες στο θρανίο, βάλτε τις καρτέλες της αριθμητικής μέσα στο κουτί, αφήστε τα μολύβια σας κι ελάτε να καθίσετε στον κύκλο», και γενικότερα όταν κρατάν κατά νου τις πληροφορίες ενώ τις επεξεργάζονται.

Η *οπτικο-χωρική εργαζόμενη μνήμη* είναι ένα τμήμα της εργαζόμενης μνήμης που εμπλέκεται στην οπτική και χωρική επεξεργασία των πληροφοριών, δηλαδή είναι υπεύθυνη για την προσωρινή αποθήκευση και διαχείριση των οπτικών μοτίβων και των κινήσεων στο χώρο. Σύμφωνα με τον Logie (1995) ( Βλ. Σχήμα 1.3), την οπτικο-χωρική εργαζόμενη μνήμη τη συναποτελούν δύο συστατικά:

1. Η οπτική κρυφή μνήμη, η οποία αποθηκεύει πληροφορίες για την οπτική μορφή και το χρώμα.
2. Ο εσωτερικός εγγραφέας ο οποίος επεξεργάζεται τις πληροφορίες της οπτικής κρυφής μνήμης και μεταφέρει πληροφορίες από την οπτική κρυφή μνήμη στην κεντρική εκτελεστική μονάδα.




*Σχήμα 1.3. Σχήμα οπτικοχωρικής εργαζόμενης μνήμης, προσαρμοσμένο από Logie (1995).*

Η οπτικοχωρική εργαζόμενη μνήμη επομένως, λειτουργεί ως ένα νοητικό εργαστήριο μη λεκτικής πληροφορίας που βοηθάει τους μαθητές να θυμούνται πρότυπα, εικόνες, ακολουθίες γεγονότων, ιχνηλατικές διαδικασίες (όπως για παράδειγμα να ξέρει σε ποιο σημείο βρίσκεται όταν αντιγράφει μια πρόταση από τον πίνακα) κ. ά. Στα μαθηματικά βοηθάει στην αναπαράσταση των ψηφίων, όπως τη θέση τους σε αριθμητικές γραμμές (π.χ. δεκάδα, εκατοντάδα, χιλιάδα) και τη θέση τους σε πίνακες αριθμών, στις αριθμητικές πράξεις και σε υπολογισμούς.

Εκτός των δύο προαναφερθέντων συστημάτων «σκλάβων» το μοντέλο περιλαμβάνει την κεντρική εκτελεστική μονάδα η οποία αποτελεί το πιο σημαντικό και πολύπλευρο συστατικό του συστήματος εργαζόμενης μνήμης, καθώς είναι ένα σύστημα ελέγχου της *προσοχής*, της ικανότητας *αναστολής* διαφόρων άσχετων με το εκτελούμενο έργο ερεθισμάτων και του *συντονισμού των γνωστικών διεργασιών* των υποσυστημάτων της εργαζόμενης μνήμης. Παίζει καθοριστικό ρόλο στη στοχοθέτηση (γνωστικές αυτοκατευθυνόμενες δράσεις) και τον έλεγχο της συμπεριφοράς (αυτορρύθμιση) ή την ικανοποίηση των προθέσεων (συναισθηματικός αυτοέλεγχος) (Μάνιου – Βακάλη, 1995, σελ. 148).

Σύμφωνα με τον Baddeley (2000), η κεντρική εκτελεστική μονάδα είναι ενιαία, με την έννοια ότι υπάρχει ένας μοναδικός εκτελεστικός μηχανισμός. Αντίθετα, έρευνα των Miyake, Friedman, Emerson, Witzki, Howerter και Wager (2000), υποστηρίζει ότι οι εκτελεστικές (επιτελικές) λειτουργίες (executive functions) συσχετίζονται μετρίως μεταξύ τους, αλλά παρόλα αυτά μπορούν να ξεχωριστούν σαφώς. Το συμπέρασμα είναι ότι οι διάφορες επιτελικές λειτουργίες διαφέρουν ως προς τις επεξεργασίες που εμπλέκονται, αν και έχουν κάποιες κοινές επεξεργασίες.

Οι επιτελικές λειτουργίες θεωρούνταν ότι βρίσκονται σε μεγάλο βαθμό υπό τον έλεγχο του μετωπιαίου λοβού του εγκεφάλου, ωστόσο ευρήματα ερευνών (Collette, & Van der Linden, 2002), υποδηλώνουν ότι δεν υποστηρίζονται όλες οι επιτελικές λειτουργίες αποκλειστικά από τους μετωπιαίους λοβούς. Οι Collette και Van der Linden (2002) ανασκόπησαν πολυάριθμες μελέτες με εγκεφαλική απεικόνιση που εμπεριείχαν αρκετές λειτουργίες της κεντρικής εκτελεστικής μονάδας. Τα στοιχεία έδειξαν ότι: «*Ορισμένες προμετωπιαίες περιοχές δραστηριοποιούνται συστηματικά από μια μεγάλη σειρά εκτελεστικών έργων. Ωστόσο, άλλες μετωπιαίες ακόμα και βρεγματικές περιοχές βρίσκονται συχνά στη διάρκεια της επιτέλεσης εκτελεστικών έργων*» (σελ. 120).

Πρόσφατες έρευνες δείχνουν ότι οι εκτελεστικές λειτουργίες της *προσοχής*, (Lefevre, Berrigan, Vendetti, Kamawar, Bisanz, Skwarchuk, & Smith-Chant, 2013), *της αναστολής* άσχετων πληροφοριών με το επιτελούμενο έργο και η *γνωστική εναλλαγή* (ευέλικτη σκέψη), παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων (Bull, & Lee, 2014).

*Προσοχή* είναι η γνωστική λειτουργία που αντανακλά την ικανότητα του ατόμου να επικεντρώνεται στην πληροφορία και στο γνωστικό έργο που έχει μπροστά του αγνοώντας δευτερεύοντα και άσχετα στοιχεία και ερεθίσματα (Hunt, & Marshall, 2005). Πολλοί επιστήμονες αναφέρονται σε αυτή τη διεργασία με το όνομα επιλεκτική προσοχή[12], ενώ στη διατήρηση της προσοχής αυτής στο χρόνο με το όνομα συντηρούμενη προσοχή.

Διαταραχή της προσοχής μπορεί να οδηγήσει το μαθητή σε μαθηματικές συμπεριφορές όπως οι ακόλουθες: (α) Κατά την απαρίθμηση ο μαθητής μπορεί να διαθέτει μέρος της προσοχής για να παρατηρήσει το υλικό, το χρώμα και το μέγεθος των αντικειμένων που πρέπει να απαριθμήσει, με αποτέλεσμα να κάνει λάθος στην αντιστοίχιση των αριθμολέξεων με την ποσότητα που απαριθμεί και να καταλήξει σε ανακριβές αποτέλεσμα. (β) Κατά την επίλυση των αλγόριθμων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού να μην προσέξει το σύμβολο της πράξης και να κάνει π.χ. πρόσθεση αντί για αφαίρεση ή να κάνει αφαίρεση αντί για πολλαπλασιασμό. Η διαταραχή της προσοχής μπορεί επίσης να επεκτείνεται στη μη διατήρηση της ακολουθίας των συγκεκριμένων βημάτων των αλγόριθμων, στην αδυναμία εκτέλεσης νοερών υπολογισμών και στη χρησιμοποίηση των κρατουμένων. (γ) Κατά την αντιγραφή ή κατά την υπαγόρευση αριθμών μπορεί άλλο να σκέφτεται ή λέει και άλλο να γράφει.

Η *αναστολή* (inhibition) αναφέρεται στην ικανότητα της εμπρόθετης ελεγχόμενης αναστολής κυρίαρχων, αυτόματων ή ανταγωνιστικών αντιδράσεων όταν χρειάζεται (Βλ. Szücs et al., 2013, σελ. 508). Πρόκειται για μια ικανότητα αποκλεισμού διαφόρων άσχετων με το επιτελούμενο έργο ερεθισμάτων, από το να παρεισφρήσουν στη διαδικασία επεξεργασίας των πληροφοριών και να περιορίσουν την αποτελεσματικότητα

[12] Ο όρος «επιλεκτική προσοχή» χρησιμοποιείται για να δηλώσει την εστίαση της διαθέσιμης από τον οργανισμό γνωστικής ενέργειας σε έναν ερεθισμό και τον παράλληλο αποκλεισμό άλλων (Βλ. Κωνσταντίνου, & Κοσμίδου, 2011, σελ. 19).

της προσοχής. Για παράδειγμα ένα παιδί αντιδρά κατάλληλα σε περιπτώσεις που ενέχουν κίνδυνο, μοιράζεται παιχνίδια χωρίς να αρπάζει, μπορεί να περιμένει για λίγο αν του το ζητήσει ένας ενήλικας. Στη μαθηματική συμπεριφορά η αδυναμία αναστολής άσχετων με το επιτελούμενο έργο ερεθισμάτων, μπορεί να επιφέρει αδυναμία διάκρισης του μεγαλύτερου μεταξύ δύο αριθμών που διαφέρουν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το 2), λάθη κατά τις απαριθμητικές δοκιμασίες, λάθη στη θεσιακή αξία των αριθμών, λάθη στην εύρεση και χρήση αριθμητικών συνδυασμών, λάθη κατά την εκτέλεση των αλγόριθμων των πράξεων και την επίλυση προβλημάτων.

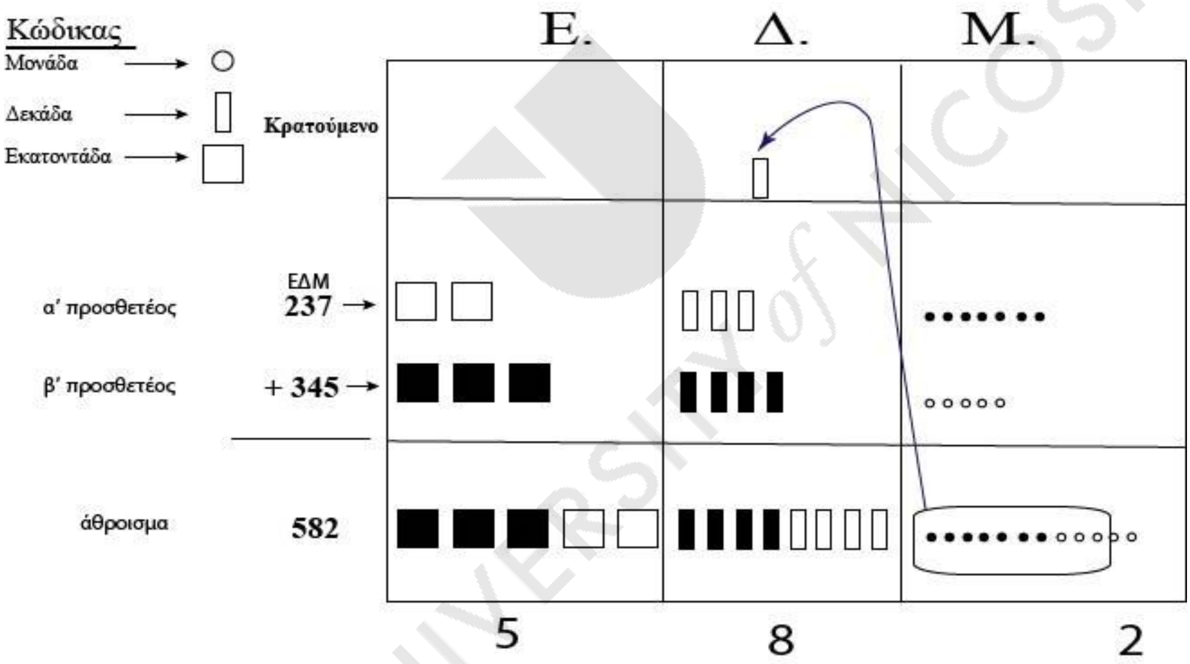
Η *γνωστική εναλλαγή* ή *γνωστική ευελιξία* (ευελιξία στη σκέψη) (Cognitive Flexibility) αφορά στην ικανότητα αποτελεσματικής μετάβασης μεταξύ διαφορετικών έργων και διαδικασιών (van der Sluis et al., 2004, σελ. 240), δηλαδή στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο όποτε αυτό είναι απαραίτητο, για τη λειτουργική εκτέλεση μιας πράξης. Η γνωστική ευελιξία περιγράφεται ευρύτερα ως η ικανότητα αλλαγής ή προσαρμογής της σκέψης και της προσοχής κάποιου, μεταξύ διαφορετικών καθηκόντων ή λειτουργιών, συνήθως ως απάντηση σε μια αλλαγή στους κανόνες ή τις απαιτήσεις (Miyake et al., 2000), καθώς και ως ικανότητα προσαρμογής της σκέψης στις ανάγκες των συνεχώς μεταβαλλόμενων καταστάσεων (van der Sluis et al., 2004).

Για παράδειγμα, ένα παιδί καταφέρνει να προσαρμόζεται σε αλλαγές σχεδίων ή δραστηριοτήτων στο σχολείο, ηρεμεί εύκολα μετά από ανατροπή του προγράμματος του ή μετά από κάποια αναστάτωση. Στη μαθηματική συμπεριφορά, κατά την επίλυση επί παραδείγματι ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος δύο πράξεων, ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να εκτελέσει την πρώτη πράξη (π.χ. μια πρόσθεση), να αρχίσει να ασχολείται με τη δεύτερη πράξη (π.χ. μια αφαίρεση) με εξίσου την ικανότητα της γρήγορης ανάκλησης των αριθμητικών συνδυασμών που εμπλέκονται σε αυτή, και να φτάσει στη σωστή λύση του προβλήματος. Δηλαδή, ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να μετατοπίζει την προσοχή του στα σημαντικά στοιχεία του προβλήματος για να καταλάβει ποιες πράξεις θα πρέπει να χρησιμοποιήσει, καθώς και τον τρόπο επίλυσης αυτών. Ένα άλλο παράδειγμα γνωστικής ευελιξίας στα μαθηματικά είναι η ικανότητα του μαθητή της μετατόπισης από τα φωνολογικά ισοδύναμα των λέξεων του προβλήματος σε αριθμητικά σύμβολα, αλλά και η πλήρης κατανόηση των γνωστών και άγνωστων στοιχείων του προβλήματος, η οποία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον προσδιορισμό των ενεργειών που απαιτούνται για να λυθεί το πρόβλημα (Bull, & Lee, 2014).

### 1.4.4. Οι σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις

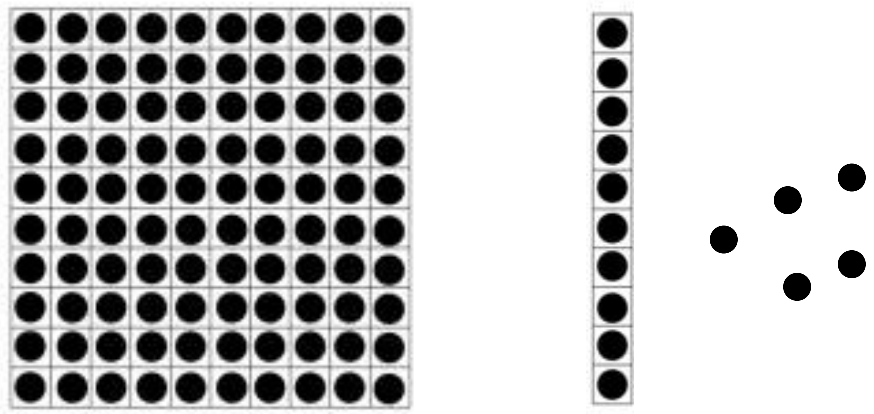
Με τις σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις υποστηρίζονται οι συνθήκες υλοποίησης εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων (Σαλβαράς, 2011, σελ. 51). Οι μαθητές καλούνται πρώτα να αναπαραστήσουν εικονικά, π.χ. το ένα αντικείμενα με (○), τα δέκα αντικείμενα με (▯) και τα εκατό αντικείμενα με (□), και ύστερα σχηματικά να δείξουν οργανώνοντας λογικά οι ενέργειές τους πάνω στα αντικείμενα. Η σχηματοποίηση / μοντελοποίηση υποβοηθεί τους μαθητές να περάσουν βαθμιαία από το συγκεκριμένο στο σχηματικό και στο συμβολικό. Συμβάλλει στη συγκρότηση της γνωστικής δομής (Novak, 1998· Σαλβαράς, 2011· Van de Walle, 2005), όπως δείχνει η σχηματοποίηση / μοντελοποίηση που ακολουθεί (Βλ. Σχήμα 1.4.).

Οι μαθητές απεικονίζουν τους αριθμούς σύμφωνα με τον κώδικα και κάνουν την πρόσθεση …επτά και πέντε … δώδεκα, αφήνουν τις δύο μονάδες (○ ○) και τα άλλα δέκα τα ομαδοποιούν και τα ανταλλάσουν με μια δεκάδα (▯) και τα κρατούν ως κρατούμενο στη θέση των δεκάδων … βγάζουν και τον κανόνα «τα δέκα κάνουν ένα» και προχωρούν. Σκοπός αρχικά σε αυτό το στάδιο είναι η συνειδητοποίηση των νοητικών πράξεων της ομαδοποίησης και της ανταλλαγής (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011), και στη συνέχεια η υιοθέτηση της *στρατηγικής αρίθμησης από τον μεγαλύτερο*. Επιλέγεται ο μεγαλύτερος από τους δύο προσθετέους και ανεβαίνουν τόσο βήματα όσα είναι ο μικρότερος προσθετέος. Στο παράδειγμα της σχηματοποίησης και στη στήλη των δεκάδων οι μαθητές θα πούνε τέσσερα και τρία μας κάνουν πέντε, έξι, επτά και ένα το κρατούμενο οκτώ. Με αυτή τη στρατηγική εφαρμόζεται άτυπα η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και μειώνεται το γνωστικό φορτίο της μνήμης, καθώς είναι η πιο γρήγορη και αποτελεσματική στρατηγική αρίθμησης στην πρόσθεση. Η συγκεκριμένη στρατηγική συναντάται και με την ονομασία «min» (Λεμονίδης, 2013, σελ. 97).




*Σχήμα 1.4. Σχηματοποιημένο μοντέλο πρόσθεσης*

Η σχηματοποίηση / μοντελοποίηση που υιοθετείται στην παρούσα έρευνα, προκύπτει ως αφαιρετική δομή του ομαδοποιημένου μοντέλου δεκαδικής βάσης ή μοντέλου ανταλλαγής (Van de Walle, 2005, σελ. 212-213), καθώς πρώτα οι μαθητές με χρήση υλικών και με τη χρήση του παρακάτω πίνακα (Βλ. Σχήμα 1.4.) θα εξασκηθούν στις μετατροπές του δεκαδικού συστήματος, ότι δέκα μονάδες μιας τάξης μετατρέπονται σε μια μονάδα της αμέσως μεγαλύτερης τάξης, δηλαδή τα παιδιά να γνωρίζουν πόσες μονάδες φτιάχνουν τη δεκάδα, πόσες δεκάδες φτιάχνουν την εκατοντάδα και πόσες μονάδες έχει η εκατοντάδα.



*Σχήμα 1.5. Ομαδοποιημένο μοντέλο δεκαδικής βάσης*

### 1.4.5. Η στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας

Επιδιώκει την εκμάθηση προτύπων του αναγνώστη, του γραφέα, του λύτη του προβλήματος, του χαρτογραφητή εννοιών, του λύτη μιας αλγοριθμικής διαδικασίας κ.τ.λ. για τη συγκρότηση στρατηγικών μάθησης (Collins, 2006· Novak, 1998· Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011).

Η στρατηγική της γνωστικής μαθητείας διαρθρώνεται σε τέσσερις φάσεις (Βλ. Σχήμα. 1.5.): *το μαθησιακό συμβόλαιο*, όπου ο εκπαιδευτικός και μαθητές συμφωνούν το «τι θα μάθουμε» (το έργο), πώς θα το μάθουμε (τη διαδικασία) και τι θα κάνει καθένας εκπαιδευτικός και μαθητής (τους ρόλους). Το μαθησιακό συμβόλαιο εξασφαλίζει τη λειτουργία της μεταγνώσης, ως παρακολούθηση, έλεγχος, έκφραση μεταγνωστικών εμπειριών (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 57). Ακολουθεί η *προτυποποίηση / μοντελοποίηση*, συνοδευόμενη από τη φθίνουσα καθοδήγηση, όπου ο εκπαιδευτικός δείχνει και εξηγεί καθοδικά, ολικά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων στο επίπεδο της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης. Λειτουργεί ως να είναι δικό του το πρόβλημα, κάνει ρητορικά ερωτήματα και δίνει ο ίδιος απάντηση. Ακολουθεί η φθίνουσα καθοδήγηση: εξωτερική, όπου ο εκπαιδευτικός υποβοηθεί τους μαθητές να ξανακάνουν και λένε μαζί (λεκτική αυτοκαθοδήγηση) και σιωπηλή, όπου οι μαθητές ξανακάνουν και δίνουν οδηγίες στον εαυτό, «τι να προσέξει» (σιωπηλή αυτοκαθοδήγηση). Ακολουθεί η εξάσκηση με αμοιβαία εργασία, επιλογή επιπέδου δυσκολίας και τέλος με αυτοέλεγχο. Ολοκληρώνει με την αξιολόγηση, όπου κάθε μαθητής συγκρίνει τις εκτελέσεις του με το ενέργημα και λαμβάνει εσωτερική ανατροφοδότηση, ελέγχει την ανταπόκριση στο ρόλο και τη μίμηση με το πρότυπο (Σαλβαράς, 2011· Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011).


*Σχήμα 1.6. Φάσεις της γνωστικής μαθητείας*

Η στρατηγική της γνωστικής μαθητείας στηρίζεται στο διαλεκτικό κονστρουκτιβισμό, θεωρεί ότι η μάθηση είναι μια κοινωνικο-γνωστική διαδικασία ενεργούς οικοδόμησης της γνώσης, κινείται στη ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης, υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη των ανώτερων λειτουργιών γίνεται με τη λειτουργία συμβόλων, των σχηματοποιήσεων και των μοντελοποιήσεων, μάλιστα, όταν αυτές συνοδεύονται με τη λειτουργία του φωναχτού και του σιωπηρού λόγου, ζητεί η διδασκαλία να προχωρά από το γενικό στο ειδικό με τη χρήση σκαλωσιάς, υποστήριξης των μαθητών ως δανείου συνείδησης για τη συγκράτηση των ενεργημάτων (τι θα κάνω, πώς, γιατί) σκέψης και δράσης και την εφαρμογή της με αυτοέλεγχο. Οι μαθητές μαθαίνουν να εξελίσσονται μέσω των απεικονίσεων και των σχηματοποιήσεων που κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν (Vygotsky, 1978/1930· Σαλβαράς, 2011).

### 1.5. Σημαντικότητα της παρούσας έρευνας

Το ερευνητικό ενδιαφέρον και η σημαντικότητα της έρευνας υπαγορεύεται τόσο από τη σπουδαιότητα που αποδίδονται στα μαθηματικά ως γνωστική διαδικασία στο χώρο του σχολείου - στο πλαίσιο της Ευρωπαϊκής Ένωσης η επίδοση στα μαθηματικά αποτελεί έναν από τους δείκτες για την ποιότητα της σχολικής εκπαίδευσης (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2000, 2014), η οποία σχετίζεται άμεσα με τις εκπαιδευτικές και επαγγελματικές επιτεύξεις των ανθρώπων - όσο και από την υψηλή εμφάνιση των ποσοστών της εν λόγω διαταραχής παγκοσμίως. Τα ποσοστά εγείρουν έντονη ανησυχία, γιατί το πρόβλημα των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά στην παιδική ηλικία μετεξελίσσεται σε πρόβλημα ζωής (Heiman, & Precel, 2003), καθώς ως ενήλικες τα συγκεκριμένα άτομα διατρέχουν διπλάσιες πιθανότητες ανεργίας (Ritchie, & Bates, 2013) σε σχέση με εκείνους που έχουν μαθηματική κατάρτιση (Parsons, & Bynner, 2006), και η δυσχέρεια στην πρόσκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων και χρηματοοικονομικών γνώσεων έχει αρνητικές συνέπειες στην οικονομική ευημερία. Το οικονομικό και κοινωνικό κόστος είναι πολύ μεγαλύτερο όμως αν δε διαγνωστούν αυτά τα παιδιά εγκαίρως[13] (Στασινός, 2013) και δεν υποστηριχτούν στη συνέχεια με ποιοτικές παρεμβάσεις[14] (Αγαλιώτης, 2013· Σαλβαράς, 2011).

[13] Σύμφωνα με τον Στασινό (2013, σελ. 31), η έγκαιρη διάγνωση συνεπικουρεί *θεραπευτικές παρεμβάσεις* ή «*θεραπευτικά προγράμματα*» (remedial programs) τα οποία έπονται προγραμμάτων πρόληψης και σκοπό έχουν την κατάλληλη υποστήριξη των παιδιών με διαγνωσμένες πλέον διαταραχές και ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, στο πλαίσιο του σχολείου, της οικογένειας και της κοινότητας. Ο όρος «*αποκατάσταση*» (rehabilation) είναι ταυτόσημος με τον όρο «*θεραπεία*» (Στασινός, 2013, σελ. 31) ενώ σύμφωνα με την Χατζηχρήστου (2011, σελ. 363) ταυτόσημος με τους παραπάνω όρους θεωρείται ο όρος «*τριτογενής πρόληψη*» με μεγάλη οικονομική αξία για το άτομο, την οικογένεια και την κοινωνία, καθώς προλαμβάνει τη δημιουργία αναπηρικών συνθηκών.

[14] Σύμφωνα με τους Αγαλιώτη (2013) και Σαλβαρά (2011), οι ποιοτικές παρεμβάσεις πρέπει να αφορμώνται από το πρότυπο των ελλειμμάτων και των δυνατοτήτων των μαθητών - όπως αυτά προκύπτουν από την εκπαιδευτική αξιολόγηση – και εμπερικλείουν θεμελιώδεις μεθοδολογικές αρχές και πρακτι-

Ωστόσο εγείρονται ζητήματα εννοιολογικά και διαγνωστικά που δυσχεραίνουν την πρώιμη διάγνωση και κατά συνέπεια την πρώιμη παρέμβαση. Από τη μια το εννοιολογικό πρόβλημα (η ειδική μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά ή δυσαριθμησία ορίζεται με διαφορετικό τρόπο από διάφορους ερευνητές) δεν επιτρέπει την ορθή διάκριση των περιπτώσεων με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, από μαθητές με χαμηλή επίδοση, αφού σε αρκετές περιπτώσεις αξιοποιούνται ανεπαρκή κριτήρια για τον ορισμό της συγκεκριμένης διαταραχής. Από την άλλη το διαγνωστικό πρόβλημα στον ελληνικό χώρο παρουσιάζεται μέσω α) της περιορισμένης ή και ανύπαρκτης σε έκταση διάγνωσης της διαταραχής και β) της χρήσης ανεπαρκών εργαλείων που οδηγούν σε εσφαλμένες διαγνώσεις και ακατάλληλες κατ’ επέκταση, παρεμβάσεις.

Στην παρούσα έρευνα προτάσσεται μια πολυεπίπεδη προσέγγιση των ειδικών μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά, δίνοντας έμφαση στο εύρος των δομικών αδυναμιών που μπορεί να παρουσιάζουν τα άτομα με δυσαριθμησία. Η σημαντικότητα και σπουδαιότητα της έρευνας καθορίζεται στη βάση του ό,τι κατανοώντας και γνωρίζοντας: α) τους δείκτες των βασικών ελλειμμάτων στα παιδιά με δυσαριθμησία, β) ποια συγκεκριμένα έργα πρέπει να χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση αυτών των δεξιοτήτων, και γ) ποιοι είναι οι προβλεπτές εκείνοι που ερμηνεύουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τη διαταραχή, θα μπορούσε να βελτιώσει τόσο την αναγνώριση των παιδιών που μπορεί να αναπτύξουν δυσαριθμησία όσο και αυτών που ήδη ταλαιπωρούνται από τη διαταραχή, παρόλα αυτά δεν έχουν παραπεμφθεί ή αν έχουν παραπεμφθεί δεν έχουν λάβει την κατάλληλη διάγνωση.

---

κές όπως: την εξατομίκευση της διδασκαλίας, την ανάλυση έργου (task analysis), την προτυποποίηση της διδασκαλίας, τη συγκεκριμενοποίηση των μαθησιακών στόχων, την ολοκλήρωση της κλίμακας της μαθησιακής ιεραρχίας , την πολυαισθητηριακή προσέγγιση, την επανάληψη, τη δομημένη διδασκαλία, τις πρακτικές μελέτης, τη διαχείριση του λάθους, την ενίσχυση των κινήτρων, τη διδασκαλία στρατηγικών μάθησης, την ενίσχυση της αυτορυθμιζόμενης μάθησης και τη συνεχή ανατροφοδότηση.

Ταυτοχρόνως, η σημαντικότητα και σπουδαιότητα της παρούσας έρευνας διευρύνεται με την εκπαιδευτική προέκταση αυτής, καθώς στοχεύει στην εξέταση της συνεισφοράς, σε αυτά τα δομικά ελλείμματα, των μοντελοποιήσεων / σχηματοποιήσεων ως μέσου αναπαράστασης και κωδικοποίησης των αριθμητικών μεγεθών, κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων των πράξεων, μέσω της στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας. Η γνωστική μαθητεία διατυπωμένη, α) στο ευρύτερο πλαίσιο της κοινωνικο – πολιτισμικής προσέγγισης της γνώσης με έμφαση στη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky, β) στη θεωρία της Πλαισιοθετημένης Γνώσης (Situated Cognition Theory), σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με αυθεντικές (πραγματικές / ρεαλιστικές) δραστηριότητες (Lave, & Wegner, 1991), και γ) στον κοινωνικο - γνωστικό συμπεριφορισμό με εστίαση στην παρατήρηση και μίμηση του προτύπου, αποτελεί γόνιμο έδαφος για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση διορθωτικών, αλλά και προληπτικών παρεμβάσεων (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011).

Η αποσαφήνιση της σχέσης και της συνεισφοράς της παρέμβασης στα δομικά ελλείμματα στη δυσαριθμησία είναι ζήτημα με τεράστια πρακτική σημασία για τις αποκαταστασιακές προσπάθειες και ως εκ τούτου θα επιτρέψει τη συμπλήρωση της επιστημονικής γνώσης μας γι’ αυτή την ηλικιακή περίοδο που ενδιαφέρει την έρευνα, έτσι ώστε να μπορέσουν οι δάσκαλοι να χρησιμοποιήσουν αυτήν τη γνώση για τη δημιουργία επωφελών μαθησιακών καταστάσεων για τους συγκεκριμένους μαθητές.

# Κεφάλαιο 2ο ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

*Η ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ Της ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ είναι χρήσιμη για την κατανόηση του ερευνητικού προβλήματος, της ιστορίας του και της θεωρητικής βάσης του. Οι έρευνες παρουσιάζονται με βάση τα χαρακτηριστικά τους: σκοπό, συμμετέχοντες, ερευνητικό σχέδιο, γεωγραφική περιοχή, ευρήματα και συμπεράσματα. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μια ανακεφαλαίωση γύρω από την υπάρχουσα έρευνα, το πρόβλημα, τη σχέση ερευνών με την προτεινόμενη έρευνα και μια αναφορά στην αιτιολόγηση της νέας έρευνας.*

## 2.1. Ιστορία του ερευνητικού προβλήματος

Την τελευταία δεκαετία, η σύγχρονη έρευνα που εστίασε στην αναγνώριση και ανάλυση των ελλειμμάτων των παιδιών με δυσαριθμησία έχει να προσφέρει αντικρουόμενα και αντιφατικά αποτελέσματα. Προς την υποστήριξη της υπόθεσης της ελλειμματικής αναπαράστασης μεγέθους (ANS ή και PI), ερευνητές βρήκαν δυσλειτουργία στα μη συμβολικά έργα υποστηρίζοντας πως αυτό το έλλειμμα διαφοροποιεί τα παιδιά με δυσαριθμησία από τους τυπικούς συνομήλικους (Bugden, & Ansari, 2016· Libertus, Feigenson, Halberda, 2013· Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011a· Piazza et al., 2010· Price, Holloway, Räsänen, Vesterinen, & Ansari, 2007· Skagerlund & Träff, 2014), σε αντίθεση με άλλες μελέτες που διαπίστωσαν δυσλειτουργία στα συμβολικά έργα προς υποστήριξη της υπόθεσης της έλλειψης πρόσβασης (Canizares, Crespo, Alemany 2013· De Smedt, & Gilmore, 2011· Iuculano, Tang, Hall, & Butterworth, 2008· Mejias, Grégoire, & Noël, 2012· Olsson, Östergren, & Träff, 2016).

Αξίζει να αναφερθεί ότι δύο μελέτες όπως των Landerl, Fussenegger, Moll και Willburger (2009), καθώς και των Mussolin, Mejias και Noël (2010b) βρήκαν ελλείμματα τόσο σε μη συμβολικά έργα όσο και σε συμβολικά, υποστηρίζοντας ωστόσο η πρώτη ότι το ελλειμματικό ANS είναι αυτό που οδηγεί στην ελλειμματική συμβολική απόδοση των μαθητών με δυσαριθμησία, ενώ η δεύτερη ότι είναι έλλειμμα πρόσβασης στις συμβολικές δεξιότητες καθώς τα παιδιά αποτυγχάνουν να κάνουν σύνδεση μεταξύ συμβολικών αριθμών και των αναπαραστάσεών τους.

Ακόμη σημαντικότερα κάποιες μελέτες έδειξαν μεγαλύτερες επιδράσεις του φαινομένου απόστασης / μεγέθους στα παιδιά με δυσαριθμησία σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους (Ashkenazi, Mark-Zigdon, & Henik, 2009· Mussolin et al., 2010b· Rousselle & Noël, 2007) ενώ οι Price και συν. (2007) και Canizares και συν. (2013), δε βρήκαν διαφοροποιημένη επίδραση απόστασης και μεγέθους, αλλά βραδύτητα στο χρόνο της απάντησης κατά τη διάρκεια σύγκρισης αραβικών ψηφίων.

Ειδικότερα, προς την υποστήριξη του ελλειμματικού ANS έρευνα των Piazza και των συνεργατών (2010) έδειξε ότι τα δεκάχρονα παιδιά με δυσαριθμησία έχουν χαμηλή οξύτητα διάκρισης μεγεθών (τα παιδιά εμφάνιζαν υψηλό W) και αυτή η οξύτητα αντιστοιχεί σε πεντάχρονα παιδιά χωρίς δυσαριθμησία. Οι Mazzocco και συν. (2011) βρήκαν παρόμοια αποτελέσματα (μέσος όρος ηλικίας παιδιών 14,8 έτη), αλλά προέβησαν επίσης σε πρόσθετες συγκρίσεις με μια ομάδα χαμηλών επιδόσεων, τυπικών επιτευγμάτων και μια ομάδα με υψηλά επιτεύγματα στα μαθηματικά.

Αυτές οι συγκρίσεις έδειξαν ότι μόνο η ομάδα των παιδιών με δυσαριθμησία (οι συγκεκριμένοι ερευνητές χρησιμοποίησαν ως κριτήριο ένταξης των μαθητών στην ομάδα αυτή όσους είχαν επίδοση σε τυποποιημένο τεστ στα μαθηματικά, κάτω από το 10ο εκατοστημόριο) είχε μειωμένη οξύτητα του ANS, ενώ οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων (που οι επιδόσεις τους ήταν από το $11^{ο}$ – $25^{ο}$ εκατοστημόριο) είχαν άθικτη αίσθηση του αριθμού. Αυτό υποστηρίζει την αντίληψη ότι τα παιδιά που βρίσκονται στο κατώτερο άκρο του φάσματος των επιτευγμάτων (>του $10^{ου}$ εκατοστημόριου) αποτελούν μια ποιοτικά διακριτή κατηγορία παιδιών με σοβαρή μαθηματική μαθησιακή αναπηρία. Αυτό υποδηλώνει επίσης ότι τα γνωστικά ελλείμματα και τα αίτια αυτών είναι διαφορετικά απ’ ότι τα παιδιά των χαμηλών επιτευγμάτων στα μαθηματικά.

Αυτά τα ευρήματα υπογραμμίζουν τη σημασία της προσοχής που πρέπει να δίνεται στον τρόπο με τον οποίο συλλέγονται τα δείγματα (με ποσοστιαίες βαθμολογίες) και θα πρέπει να δίνεται μεγάλη προσοχή ώστε να μη συγχέονται διαφορετικές ομάδες με διαφορετικά γνωστικά προφίλ (Mazzocco et al., 2011a).

Παρόμοια μελέτη διεξήχθη από τους Skagerlund και Träff (2014), καταλήγοντας σε κοινά συμπεράσματα, ενώ μελέτη της Libertus (2011) που αφορούσε παιδιά ηλικίας 3 έως 5 ετών αποκάλυψε ότι η οξύτητα του ANS προέβλεπε την ικανότητα μαθηματικών έξι μήνες αργότερα, και αποτελούσε ένα μοναδικό παράλληλο προγνωστικό παράγοντα της μαθηματικής ικανότητας ανεξάρτητο από το εκφραστικό λεξιλόγιο, την προσοχή και το εύρος της μνήμης (Libertus, Feigenson, & Halberda, 2013).

Περαιτέρω ενίσχυση της υπόθεσης του ελλειμματικού ANS προέρχεται από πρόσφατη έρευνα των Bugden και Ansari (2016) σε δεκάχρονα παιδιά με δυσαριθμησία, όπου κατέδειξε την πολύ χαμηλή οξύτητα εκτίμησης ποσοτήτων (υψηλό W) των εν λόγω μαθητών σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω ευρήματα έρευνα των Noël και Rousselle (2011) υποδεικνύει ότι τα ελλείμματα στις συμβολικές και ακριβείς αναπαραστάσεις προηγούνται των διαταραχών στο ANS. Τα συμβολικά ελλείμματα είναι παρόντα στις ηλικίες των 6-7 με ανεπηρέαστη οξύτητα ANS ενώ η μειωμένη οξύτητα του ANS αποδεικνύεται μόνο σε δείγματα παιδιών ηλικίας 10 ετών και άνω (De Smedt, & Gilmore, 2011).

Μια ερμηνεία αυτών των ευρημάτων είναι ότι η παρεκκλίνουσα επεξεργασία συμβολικών αριθμών μπορεί να υπονομεύσει την ωρίμανση των αναπαραστάσεων του ANS στα παιδιά με δυσαριθμησία, οδηγώντας σε μειωμένη μη συμβολική επεξεργασία κατά προσέγγιση αριθμών, ηλικιακά αργότερα (Noël, & Rousselle, 2011·

Mussolin, Nys, Content, & Leybaert, 2014).

Το ότι οι πρώιμες συμβολικές ικανότητες αριθμού προβλέπουν αργότερα μη συμβολικές ικανότητες, και όχι αντίστροφα υπάρχουν δεδομένα από διαχρονική έρευνα των Inglis, Attridge, Batchelor και Gilmore (2011) σε τυπικούς ωστόσο μαθητές ηλικίας 7,6-9,4 ετών και σε ενήλικες όπου διαπιστώθηκε ότι, οι μη συμβολικές ικανότητες αριθμού δεν εξηγούν πάντοτε τα μαθηματικά επιτεύγματα, καθώς οι ερευνήτριες δεν βρήκαν καμιά σταθερή σχέση ανάμεσα στην οξύτητα του ANS και τα μαθηματικά.

Συγκλίνοντα αποτελέσματα της υπόθεσης της ελλειμματικής πρόσβασης σε πληροφορίες μεγέθους από αριθμητικά σύμβολα προέρχονται από πρόσφατη έρευνα των Olsson και συν. (2016) σε δεκάχρονους μαθητές με δυσαριθμησία. Η συγκεκριμένη μελέτη έδειξε ότι οι μαθητές εμφάνισαν μεγαλύτερα ελλείμματα σε όλα σχεδόν τα συμβολικά έργα απ’ ότι στα μη συμβολικά. Εξαιτίας της διαφοράς των ελλειμμάτων στα συμβολικά και μη συμβολικά έργα, η συγκεκριμένη έρευνα τείνει στην υποστήριξη της έλλειψης και αδυναμίας συσχετισμού των αριθμών με την υποκείμενη αναπαράσταση του μεγέθους που εκφράζουν.

Αντικρουόμενα αποτελέσματα έχουν να μας προσφέρουν και οι έρευνες που διερεύνησαν το παράλληλο σύστημα εξατομίκευσης μέσω του subitizing. Κάποιες βρήκαν ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν μικρότερο εύρος subitize σε σχέση με τα τυπικά παιδιά, και αυτό το εύρος περιορίζεται μόνο σε δύο αντικείμενα (Ashkenazi, & Henik, 2012· Ashkenazi, Mark-Zigdon, & Henik, 2013· Fischer, Gebhardt, & Hartnegg, 2008).

Στα πλαίσια αυτών των ευρημάτων, το μειωμένο εύρος subitize μπορεί να θεωρηθεί ως ένας χρήσιμος δείκτης της δυσαριθμησίας. Τα παραπάνω ωστόσο ευρήματα δεν επαληθεύονται από άλλους ερευνητές, οι οποίοι βρήκαν ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία έχουν μειωμένους χρόνους απάντησης, αλλά όχι διαφορές στη γνώση της ποσότητας με μια ματιά (Iuculano et al. 2008· Landerl, 2013· Olsson et al., 2016· Schleifer & Landerl, 2011).

Υπό το φως των παραπάνω ευρημάτων, παραμένει ανοικτό ερώτημα αν τα παιδιά με δυσαριθμησία έχουν ελλειμματικό μη συμβολικό σύστημα αριθμών (ελλειμματικό ANS ή ελλειμματικό PI) ή αν τα αριθμητικά ελλείμματα είναι αποτελέσματα ενός ανεπαρκούς συστήματος αναπαράστασης συμβολικών αριθμών.

Οι γνωστικές λειτουργίες από την άλλη, όπως η μνήμη εργασίας, έχουν βρεθεί να προβλέπουν ατομικές διαφορές στα αριθμητικά επιτεύγματα σε τυπικά αναπτυσσόμενους μαθητές (Ashkenazi, Rosenberg-Lee, Metcalfe, Swigart & Menon, 2013· Nath & Szücs, 2014· Sowinski, LeFevre, Skwarchuk, Kamawar, Bisanz, Smith-Chant, 2015). Ωστόσο, ο αιτιώδης ρόλος της μνήμη εργασίας στο χαρακτηρισμό της δυσαριθμησίας αποτελεί πηγή διαμάχης μέσα στη βιβλιογραφία, καθώς μερικές μελέτες βρήκαν ελλείμματα στη μνήμη εργασίας σε παιδιά με δυσαριθμησία (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012· Meyer et al., 2010· McLean, & Hitch, 1999), ενώ άλλες δεν έχουν βρει ελλείμματα σε σύγκριση με τους τυπικούς συνομήλικους (Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004).

Για να κατανοήσουμε περαιτέρω το ασυνεπές των ευρημάτων θα πρέπει να δούμε τις συνεισφορές διαφορετικών πτυχών της μνήμης εργασίας. Για παράδειγμα, οι Passolunnghi και Mammarella (2012) διαπίστωσαν ότι μόνο τα παιδιά με επίμονες και σοβαρές δυσκολίες επίλυσης μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων είχαν δυσλειτουργίες στην οπτικο-χωρική μνήμη εργασίας, όπου ήταν απαραίτητος υψηλός έλεγχος προσοχής ενώ είχαν τις ίδιες επιδόσεις με τους τυπικούς συνομήλικους σε εργασία οπτικής μνήμης.

Επιπλέον, οι Szücs, Devine, Soltesz, Nobes και Gabriel (2013α) και οι Mammarella, Hill, Devine, Caviola και Szűcs (2015), διαπίστωσαν ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία είχαν ελλείμματα στην οπτικο-χωρική μνήμη εργασίας σε σύγκριση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους μαθητές, αλλά όχι στη λεκτική μνήμη εργασίας ή στη λεκτική βραχυπρόθεσμη μνήμη, εν αντιθέσει με έρευνες του Geary και των συνεργατών (2012). Σε μια πρόσφατη μετα-ανάλυση, οι Peng και Fuchs (2014) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν προβλήματα με τη λεκτική μνήμη εργασίας όταν πρέπει να ανακαλέσουν ψηφία (και ιδιαίτερα αντίστροφη ανάκληση) και όχι με εργασίες μέτρησης της λεκτικής μνήμης όπου υπάρχει η ακρόαση και η ανάκληση λέξεων (Peng, Namkung, Barnes, & Sun, 2016).

Λιγότερες μελέτες που διερεύνησαν τον ρόλο της προσοχής, της αναστολής και ακόμη πιο λίγες της γνωστικής εναλλαγής, επίσης δεν επιτρέπουν την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για το ρόλο των εκτελεστικών λειτουργιών στην εμφάνιση της δυσαριθμησίας. Κάποιες βρήκαν ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία υποφέρουν από ελλείμματα στις εκτελεστικές λειτουργίες (Ashkenazi, & Henik, 2010a· D'Amico, & Passolungi, 2009· Szücs et al., 2013a· Szücs et al., 2014· van der Sluis, de Jong, & van der Leij, 2004), ενώ οι Censabella και Noël (2008) δεν βρήκαν κανένα στοιχείο για ανεπαρκή εκτελεστική λειτουργία. Χρησιμοποίησαν το έργο Stroop και το τεστ flanker για να εξετάσουν τη δυνατότητα της προσοχής και της αναστολής των παιδιών με δυσαριθμησία και τυπικών παιδιών. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι τα δυσαριθμητικά παιδιά είχαν κανονική απόδοση σε αυτά τα έργα και δεν βρέθηκαν διαφορές με την ομάδα των τυπικών συνομηλίκων.

Τα ευρήματα σχετικά με την προσοχή, την αναστολή και την εναλλαγή είναι λιγότερο πειστικά ως προβλεπτικοί παράγοντες της δυσαριθμησίας, καθώς σε κάποιες μελέτες (D'Amico, & Passolungi, 2009· Szücs et al., 2013a· Szücs et al., 2014· van der Sluis, de Jong, & van der Leij, 2004) το δείγμα της έρευνας περιελάμβανε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά χωρίς να αποκλειστεί η συννοσηρότητα με τη διαταραχή ελλειμματικής προσοχής – υπερκινητικότητα (ΔΕΠ-Υ), έτσι δεν είναι σαφές αν οι δυσκολίες με την προσοχή και την αναστολή είναι αναπόσπαστο μέρος της δυσαριθμησίας ή αποτέλεσμα εξαιτίας της συννοσηρότητας με ΔΕΠ-Υ.

Συνολικά, τα ευρήματα ερευνών που υποστηρίζουν μεμονωμένα τις τρεις θεωρίες είναι αντιφατικά, καθιστώντας δύσκολη την εξαγωγή ισχυρών συμπερασμάτων σχετικά με τα βασικά ελλείμματα και τους δείκτες εκείνους που διαφοροποιούν τα παιδιά με δυσαριθμησία από τους τυπικούς συνομήλικους.

Αυτή η αντιφατικότητα των ευρημάτων μπορεί να είναι αποτέλεσμα μεθοδολογικών διαφορών όπως: α) τα κριτήρια επιλογής που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη των παιδιών με δυσαριθμησία β) οι ηλικιακές ομάδες που χρησιμοποιήθηκαν στο μικρό σχετικά σώμα των ερευνών γ) οι διεργασίες που χρησιμοποιήθηκαν στη μέτρηση των μη συμβολικών ή και των συμβολικών ικανοτήτων και των συνιστωσών της εργαζόμενης μνήμης.

Η ανυπαρξία ομοφωνίας επομένως καθιστά αναγκαία την πρώτη φάση της παρούσας έρευνας, καθώς η υποστήριξη ή απόρριψη μιας υπόθεσης απαιτεί συγκλίνουσες αποδείξεις από πολλαπλές μετρήσεις και μεθόδους, καθώς και διαφορετικά επίπεδα ανάλυσης.

Στο χώρο των διδακτικών παρεμβάσεων, οι ερευνητές στην εκπαίδευση των μαθηματικών συμφωνούν ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στη βελτίωση των μαθηματικών κατανοήσεων σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Gersten, Chardk, Jayanthi, Baker, Morphy, & Flojo, 2009· Griffin, & Jitendra, 2009). Οι Hegarty και Kozhevnikov (1999), προσδιόρισαν δύο διαφορετικούς τύπους οπτικο - χωρικών αναπαραστάσεων: *σχηματικές αναπαραστάσεις* που κωδικοποιούν τις χωρικές σχέσεις που περιγράφονται σε ένα πρόβλημα και *εικονογραφικές παραστάσεις* που κωδικοποιούν την οπτική εμφάνιση των αντικειμένων που περιγράφονται στο πρόβλημα. Η χρήση των σχηματικών χωρικών αναπαραστάσεων στην έρευνά τους συσχετίστηκε με την επιτυχία στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ενώ η χρήση των εικονογραφικών αναπαραστάσεων συσχετίστηκε αρνητικά με την επιτυχία.

Στη βάση της αντίληψης της αξίας της εφαρμογής ευρετικών (heuristic) στρατηγικών (στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, γνώσης και χρήσης μορφών αναπαραστάσεων και εργαλείων) που αναπτύχθηκε από τον Polya (1945), αρκετοί ερευνητές (Griffin, & Jitendra, 2009· Jitendra, Griffin, McCoey, Gardill, Bhat, & Riley, T. 1998· Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bhat, & Riley, 1998· Jitendra, Hoff, & Beck, 1999· van Garderen, 2007) προσπάθησαν να αξιολογήσουν την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών διδασκαλίας βασισμένες σε σχήματα (Schema-Based Instruction, SBI) με επίκεντρο την ανάπτυξη δεξιοτήτων στην επίλυση προβλημάτων σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Τα πορίσματα των μελετών τους υποστηρίζουν την αποτελεσματικότητα του SBI στην εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος (Griffin, & Jitendra, 2009· Jitendra et al., 1998· Jitendra et al.,1999· van Garderen, 2007).

Ειδικότερα, η van Garderen (2007) διεξήγαγε μια μελέτη περιπτώσεων για την εξέταση της αποτελεσματικότητας του SBI σε μαθηματικά προβλήματα. Τρεις μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά που φοιτούσαν στην όγδοη τάξη σε Γυμνάσιο των Ηνωμένων Πολιτειών (στις Ηνωμένες Πολιτείες, η όγδοη τάξη είναι συνήθως το δεύτερο ή το τρίτο έτος του Γυμνασίου στην Ελλάδα) συμμετείχαν στο μελέτη, και η παρέμβαση SBI έλαβε χώρα σε ξεχωριστή αίθουσα διδασκαλίας. Ως μορφή σχηματικής απεικόνισης χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα για να βοηθήσουν τους μαθητές να απεικονίσουν τη δομή του προβλήματος προκειμένου να απλοποιήσουν περίπλοκα μαθηματικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι: (α) όλοι οι μαθητές βελτίωσαν την εννοιολογική απόδοση των λεκτικών προβλημάτων, (β) κατέστησαν ικανοί να εφαρμόζουν τη σχηματοποίηση σε προβλήματα διαφορετικού τύπου και (γ) οι μαθητές ήταν ικανοποιημένοι από την παρέμβαση. Η van Garderen κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ένα σχηματικό διάγραμμα ήταν πιο επωφελές και συσχετιζόταν με επιτυχία στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από ένα εικονογραφικό διάγραμμα.

Ο Krawec (2014) διερεύνησε τα αποτελέσματα της οπτικής αναπαράστασης με τη χρήση της παράφρασης των προβλημάτων. Στη μελέτη του συμμετείχαν 84 μαθητές της όγδοης βαθμίδας από τέσσερα σχολεία. Μεταξύ των συμμετεχόντων, 25 μαθητές εμφάνιζαν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, 30 μαθητές ήταν χαμηλής επίτευξης στα μαθηματικά και οι υπόλοιποι 29 ήταν μαθητές μέσου επιπέδου. Η εκπαιδευτική παρέμβαση που χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη ήταν μια μορφή οπτικής αναπαράστασης (εικονογραφική απεικόνιση αντί για σχηματική) ακολουθούμενη από μια στρατηγική παραφράσεων. Για παράδειγμα, οι μαθητές κλήθηκαν πρώτα να εξηγήσουν ένα πρόβλημα με δικά τους λόγια και στη συνέχεια να προσδιορίσουν σημαντικές πληροφορίες για την επίλυση του προβλήματος. Στη συνέχεια, οι μαθητές κατευθύνθηκαν να σχεδιάσουν μια εικόνα που θα τους βοηθούσε να λύσουν το πρόβλημα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλοι οι μαθητές βελτίωσαν την επίλυση προβλημάτων ανεξάρτητα από τα επίπεδα επίτευξής τους, και οι δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά δεν περιορίζονταν από το καθεστώς αναπηρίας τους για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Τα ευρήματα της μελέτης υποστήριξαν την αποτελεσματικότητα της οπτικής αναπαράστασης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, και ο Krawec κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «*η αποτελεσματική επίλυση προβλήματος, ξεκινά με τη φάση αναπαράστασης του προβλήματος*» (σελ. 105).

Περαιτέρω ενίσχυση της αποτελεσματικότητας των αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, προέρχεται από έρευνα των Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, Γουναροπούλου και Βαμβουλή (2015). Αντικείμενο της έρευνας ήταν η διερεύνηση βελτίωσης ή μη των επιδόσεων μαθητών/τριών των δύο πρώτων τάξεων του Γυμνασίου στην επίλυση προβλημάτων Στατιστικής του σχολικού εγχειριδίου πριν και μετά τη λεκτική και εικονιστική (με χρήση άλλων διαγραμμάτων) αναπαράσταση της εκφώνησης τους. Η έρευνα έγινε σε δείγμα 50 μαθητών/τριών της Α΄ και 50 μαθητών/τριών Β΄ τάξης Γυμνασίου, οι οποίοι αξιολογήθηκαν στην επίλυση τριών διαφορετικών αναπαραστάσεων δύο προβλημάτων ως προς τη βαθμολογική τους επίδοση. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους έδειξαν ότι τόσο η λεκτική όσο και η εικονιστική αναπαράσταση συμβάλλουν στη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών/τριών.

Στη βάση των αποτελεσμάτων αυτών υποστηρίζεται τόσο η αποτελεσματικότητα των οπτικών αναπαραστάσεων όσο και των στρατηγικών διδασκαλίας βασισμένες σε σχήματα (Schema-Based Instruction, SBI) στην επίλυση προβλημάτων. Ταυτοχρόνως, αναδεικνύεται η απουσία έρευνας σχετικά με το πώς οι μοντελοποιήσεις / σχηματοποιήσεις των αλγόριθμων των πράξεων επηρεάζουν τόσο την αίσθηση του αριθμού όσο και τις γνωστικές δομές των μαθητών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και ως εκ τούτου είναι αναγκαία μια στοχοθετημένη έρευνα προς αυτό το σκοπό με την υποστήριξη μιας στρατηγικής διδασκαλίας, που αποδεδειγμένα από την έρευνα δημιουργεί επωφελείς μαθησιακές καταστάσεις, της γνωστικής μαθητείας.

Οι Collins, Hawkins και Carver (1991) στην έρευνά τους με τίτλο «A Cognitive Apprenticeship for Disadvantaged Students» περιγράφουν το πλαίσιο εργασίας βασισμένο στις αρχές της γνωστικής μαθητείας για να διδαχτούν μαθήματα όπως ανάγνωση, γραφή και μαθηματικά. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο σχολεία: στο

Charlotte Middle School in Rochester της Νέας Υόρκης και στο Secondary School του Central Park στο Harlem, όπου η πλειοψηφία των μαθητών θεωρούνταν ότι διέτρεχε κίνδυνο μαθησιακής αποτυχίας, καθώς προέρχονταν από κοινωνικοοικονομικά μειονεκτικές οικογένειες, όπου το 30% των μαθητών εμφάνιζε υπερβολικές απουσίες, επανάληψη τάξεων και βαθμολογία στο California Achievement Test τέτοια, που υπολείπονταν κατά τρία ή και περισσότερα έτη σε σχέση με τυπικούς συνομήλικους. Το προτεινόμενο πλαίσιο της έρευνας αποτελείτο από το περιεχόμενο του μαθήματος, τη μέθοδο διδασκαλίας, την ακολουθία του μαθήματος και την κοινωνιολογία του μαθήματος, σύμφωνο με τις αρχές μιας αντισταθμιστικής παρέμβασης. Οι Collins και συν. (1991) αναφέρουν ότι στα δύο σχολεία εφάρμοσαν διαφορετικές μορφές μαθησιακής μαθητείας, για να καταδείξουν εναλλακτικές προσεγγίσεις στην εφαρμογή των αρχών του πλαισίου, της μεθόδου, της αλληλουχίας και της κοινωνιολογίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το μοντέλο της Γνωστικής Μαθητείας είναι χρήσιμο για όλους τους μαθητές, αλλά είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό για τους μαθητές με κάποια αναπηρία, διότι φαίνεται ότι: (α) η μάθηση ενσωματώνεται σε ένα πλαίσιο, με μια αυθεντική σύνδεση με τη ζωή των μαθητών, (β) η ακολουθία της διδασκαλίας προχωράει από το απλό στο σύνθετο με πολλαπλές εξασκήσεις που διευκολύνουν την εδραίωση της μάθησης, (γ) κάνει φανερή τη σκέψη για συλλογισμούς και διαδικασίες, (δ) οι μοντελοποιήσεις / προτυποποιήσεις βοηθούν στην αποφυγή της υπερφόρτωσης της μνήμης των μαθητών από τις δυσκολίες του πεδίου, το οποίο καλούνται να διαχειριστούν.

Έρευνα του Νικολουδάκη (2009) σε μαθητές της Α΄ Λυκείου, η οποία αφορούσε τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το συνδυασμό των φάσεων του Van Hiele και τις μεθόδους της γνωστικής μαθητείας, έδειξε ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν σημαντικά υψηλότερη βελτίωση της απόδοσής τους στη γραφή αποδείξεων προτάσεων γεωμετρίας σε σχέση με τους μαθητές που διδάσκονται με την παραδοσιακή διδασκαλία. Επίσης, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας παρουσίασαν βελτίωση στη λεκτική δεξιότητα, στη σχεδιαστική ικανότητα και στη λογική δεξιότητα σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου που δεν παρουσίασε στατιστικά σημαντική βελτίωση σε αυτές τις δεξιότητες. Ειδικότερα, ο ίδιος ο ερευνητής επισημαίνει ότι το μοντέλο της γνωστικής μαθητείας προσφέρει στον σύγχρονο εκπαιδευτικό των μαθηματικών τη δυνατότητα να εμπλουτίσει τη διδασκαλία της γεωμετρίας με ενδιαφέροντα στοιχεία που παρακινούν το μαθητή, τον βοηθούν στην κατανόηση και τον εμπλέκουν ενεργά στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης.

Πειραματική μελέτη του Sharma (2016) στην Ινδία, διερεύνησε τις επιδράσεις του μοντέλου της πλαισιοθετημένης μάθησης με τη στρατηγική της γνωστικής μαθητείας στην προσπάθεια ελέγχου του μαθηματικού άγχος και της ικανότητας αυτορρύθμισης σε μαθητές της έκτης τάξης του δημοτικού. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που εκτέθηκαν στο εν λόγω μαθησιακό μοντέλο είχαν: (α) σημαντικά λιγότερο άγχος στα μαθηματικά, (β) βελτίωσαν την ικανότητα του ανασταλτικού ελέγχου, (γ) παρουσίαζαν ένα υψηλότερο έλεγχο ενεργοποίησης της συμπεριφοράς, και (δ) απέκτησαν μεγαλύτερο έλεγχο προσοχής.

Συνολικά, τα μέχρι τώρα ευρήματα των εκπαιδευτικών παρεμβάσεων στις μοντελοποιήσεις και στη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα αυτών στη μάθηση των μαθηματικών. Παραταύτα, όπως διαπιστώθηκε από ανασκόπηση στη διεθνή βιβλιογραφία, δεν προκύπτει έρευνα σχετικά με το πώς οι μοντελοποιήσεις / σχηματοποιήσεις των αλγόριθμων των πράξεων μέσω της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας μπορούν να ενισχύσουν την ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, την ικανότητα της επεξεργασίας συμβολικών μεγεθών, αλλά και τις γνωστικές δομές των μαθητών με δυσαριθμησία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

## 2.2. Θεωρητική βάση του ερευνητικού προβλήματος

Για τη μελέτη του θέματος αντλήθηκαν στοιχεία από την υπάρχουσα διεθνή βιβλιογραφία, τα οποία συγκρότησαν τη θεωρητική βάση του ερευνητικού προβλήματος σχετικά με τη *θεωρία του ελλείμματος αναπαράστασης μεγεθών* (magnitude representation deficit), *την υπόθεση ελλείμματος πρόσβασης στην επεξεργασία συμβολικών αριθμών* (access deficit hypothesis) και το *μοντέλο των γνωστικών ελλειμμάτων*, τη *σχηματοποίηση / μοντελοποίηση* και τη *γνωστική μαθητεία.*

### 2.2.1. Θεωρία του ελλείμματος στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα ή θεωρία ελλείμματος αναπαράστασης μεγεθών (magnitude representation deficit)

Σύμφωνα με τη θεωρητική προσέγγιση του ελλείμματος στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα (Butterworth, 2005, 2010· Dehaene, 2011· Wilson, & Dehaene, 2007) η δυσαριθμησία είναι το αποτέλεσμα της έλλειψης σωστής «αίσθησης των αριθμών».

Πιστεύεται ότι η αίσθηση του αριθμού είναι μια έμφυτη, φυλογενετικά προσδιορισμένη ικανότητα του ανθρωπίνου εγκεφάλου (Dehaene, 2011· Piazza, 2010). Σύμφωνα με τον Dehaene (2011, σελ. 29) ο ανθρώπινος εγκέφαλος περιέχει μια αναλογική αναπαράσταση αριθμητικών ποσοτήτων, η οποία μπορεί να συνδεθεί με μια πνευματική/εγκεφαλική «αριθμητική γραφή». Αυτή η ικανότητα της αναπαράστασης είναι ανεξάρτητη από τα πολλαπλά εισερχόμενα και εξερχόμενα γραπτά συμβολικά συστήματα (αριθμολέξεις ή αραβικά ψηφία) που χρησιμοποιούμε για να συνδιαλλαγούμε αριθμητικά και στηρίζεται εξ' ολοκλήρου σε προκαθορισμένα εγκεφαλικά νευρωνικά κυκλώματα – απότοκα της εξελικτικής ιστορίας[15] - τα οποία εμπλέκονται προλεκτικά (μη συμβολικά) στις αναπαραστάσεις αριθμητικών μεγεθών (Dehaene,

[15] Εμπειρικά δεδομένα υποστηρίζουν ότι ό άνθρωπος, οι αρουραίοι, τα περιστέρια και τα δελφίνια διαθέτουν αξιοσημείωτες ικανότητες για αξιολόγηση πληθυσμιακών συνόλων, πράγμα που καταδεικνύει ότι οι αριθμητικές ικανότητες μπορεί να σχετίζονται φυλογενετικά και ότι οι εγκέφαλοι μπορεί να έχουν ενσωματώσει μια δεδομένη αναπαράσταση των αριθμών στη διαδικασία της εξέλιξης (Βλ. Agrillo et al., 2012, σελ. 28-29).

2011· Piazza, 2010).

Τη βάση του προλεκτικού (μη συμβολικού) συστήματος αριθμών αποτελούν δύο διακριτά συστήματα, τα οποία είναι παρόντα στα βρέφη (Mou, & vanMarle, 2014) και σε άλλα είδη ζώων (Agrillo, Piffer, Bisazza, & Butterworth, 2012): Το *σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών* (Approximate Number System, ANS) και το *σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης* (Parallel Individuation, PI) ή *σύστημα εντοπισμού αντικειμένων* (Object Tracking System, OTS) (Piazza, 2010). Το *σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών* (ANS) είναι ένα γνωστικό σύστημα που υποστηρίζει την εκτίμηση του μεγέθους μιας ποσότητας (δηλαδή την κατά προσέγγιση εκτίμηση της πληθικότητας ενός συνόλου αντικειμένων) (Dehaene, 2011) και ταυτόχρονα την κατά προσέγγιση αποτύπωση και αναπαράσταση των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αριθμητικών ποσοτήτων (Barth, La Mont, Lipton, Dehaene, Kanwisher, & Spelke, 2006).

Αρχίζοντας η ανάπτυξή του από την πρώιμη βρεφική ηλικία, το ANS επιτρέπει σε ένα άτομο να ανιχνεύσει διαφορές μεγέθους μεταξύ δύο ποσοτήτων (π.χ. τα παιδιά μπορούν να εκτιμούν ποιο σύνολο έχει περισσότερα αντικείμενα ή και να ξέρουν ότι τοποθετώντας ένα επιπλέον αντικείμενο σε ένα σύνολο αντικειμένων τότε έχουμε περισσότερα) χωρίς την εμπλοκή της απαρίθμησης. Η οξύτητα και η ακρίβεια του ANS βελτιώνεται σε όλη την παιδική ηλικία και η ανάπτυξή του ολοκληρώνεται στα 20 έτη (αυτό σημαίνει π.χ. ότι ένας ενήλικας μπορεί να διακρίνει 70 στοιχεία έναντι 85 χωρίς να μετρά) (Odic, Libertus, Feigenson, & Halberda, 2013). Η ανάπτυξη της οξύτητας και της ακρίβειας του ANS δίνει σταδιακά τη δυνατότητα της διάκρισης μεταξύ ομάδων που έχουν μικρότερες διαφορές στο μέγεθος (Hyde, 2011). Ωστόσο, καθώς αυξάνεται ο λόγος μεταξύ των μεγεθών, αυξάνεται η ικανότητα διάκρισης μεταξύ των δύο ποσοτήτων. Ο λόγος διάκρισης ορίζεται από τον νόμο του Weber (W), ο οποίος συνδέει τις διαφορετικές εντάσεις ενός αισθητηριακού ερεθίσματος που αξιολογείται (Pessoa, & Desimone, 2003).

Η ικανότητα του ANS μετριέται με το W που αναπαριστά την ακρίβεια των αναπαραστάσεων κάθε ανθρώπου (Halberta, Mazzocco, & Feigenson, 2008). Ό,τι οι αναπαραστάσεις στο ANS ακολουθούν τους νόμους του Weber σημαίνει ότι η δυσκολία στη διάκριση οποιωνδήποτε δύο αριθμών ή ποσοτήτων εξαρτάται από την αναλογία μεταξύ τους, και όχι από την απόλυτη διαφορά τους.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του W[16] τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα διάκρισης του ατόμου, ενώ αντίθετα μεγάλες τιμές στο W δείχνουν μειωμένη οξύτητα (Libertus, Feigenson, & Halberda, 2011).

Το ANS αξιολογείται συνήθως χρησιμοποιώντας ένα μη συμβολικό έργο σύγκρισης κουκκίδων, όπου ζητείται από τους συμμετέχοντες να επιλέξουν την αριθμητικά μεγαλύτερη διάταξη κουκκίδων σε χρόνους που δεν επιτρέπουν την καταμέτρηση.

Δύο ενδιαφέροντα συμπεριφορικά φαινόμενα που παρατηρούνται από τη σύγκριση είναι το φαινόμενο της *επίδρασης της απόστασης* (distance effect) και το φαινόμενο της *επίδρασης του μεγέθους* (size effect) (Krajcsi et al., 2016· Lengyel, & Kojouharova, 2016· Moyer, & Landauer, 1967· Sekuler, & Mierkiewicz, 1977).

Η επίδραση της απόστασης αναφέρεται στο γεγονός ότι είναι ευκολότερη και ταχύτερη η διάκριση μεταξύ ποσοτήτων όσο μεγαλώνει η αριθμητική απόσταση μεταξύ τους (π.χ. είναι ευκολότερη η σύγκριση 3 κουκκίδων με 8 απ' ότι η σύγκριση 3 κουκκίδων με 5) (Krajcsi, et al., 2016· Moyer, & Landauer, 1967· Sekuler, & Mierkiewicz, 1977).

Η επίδραση του μεγέθους αναφέρεται στην παρατήρηση ότι είναι ευκολότερη

[16] Όταν W=0, σημαίνει πώς το άτομο διέκρινε σωστά όλες τις διαφορές μεγέθους που του παρουσιάστηκαν

η διάκριση μικρών ποσοτήτων έναντι μεγαλύτερων παρά την ίδια αριθμητική απόσταση (π.χ. είναι ευκολότερη η σύγκριση 3 κουκκίδων με 5 απ’ ότι η σύγκριση 23 με 25) (Krajcsi et al., 2016· Moyer, & Landauer, 1967· Sekuler, & Mierkiewicz, 1977).

Αυτά τα δύο φαινόμενα εξηγούνται από μοντέλα αριθμητικών αναπαραστάσεων τα οποία υποθέτουν ότι τα μεγέθη αναπαριστώνται σε μια διανοητική γραμμή αριθμών, όπου ο αριθμός κωδικοποιείται αναλογικά ή λογαριθμικά σε ένα νοητικό χάρτη, ο οποίος είναι προσανατολισμένος στο χώρο από τα αριστερά στα δεξιά, και είναι συνδεδεμένος με την κατεύθυνση της γραφής (Krajcsi et al., 2016· Piazza, 2010).

Το δεύτερο σύστημα PI ή OTS είναι επίσης ένα μη συμβολικό εγγενές σύστημα, που επιτρέπει την ακριβή και ταχεία διάκριση μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (Piazza, 2010) μέσα από μια διαδικασία που ονομάζεται subitizing (χωρίς καταμέτρηση ή γνώση της ποσότητας με μια ματιά). Η λέξη subitizing προέρχεται από τη λατινική λέξη Subito που σημαίνει «αμέσως», «ξαφνικά», και αναφέρεται στην ικανότητα της άμεσης (με μια ματιά) αντίληψης μιας μικρής ομάδας αντικειμένων (η ομάδα αντικειμένων είναι μικρότερη από 5), ακόμη και όταν ο ρυθμός παρουσίασης των ερεθισμάτων είναι πολύ σύντομος (Fischer, Gebhardt, & Hartnegg, 2008, σελ. 24).

Πρόκειται για ένα μηχανισμό προσοχής (Hyde, 2011) που υποστηρίζει την αναπαράσταση αριθμητικών τιμών από το ένα έως το τρία σε βρέφη (Feigenson, & Carey, 2005) ή τέσσερα σε παιδιά, ενήλικες και ζώα (Agrillo et al., 2012). Το PI αναπτύσσεται γρήγορα κατά το πρώτο έτος της ζωής, όπου και επιτυγχάνεται (ολοκληρώνεται) η πλήρης χωρητικότητα σε ηλικία 12 μηνών (Piazza, 2010). Έτσι από τη νηπιακή ηλικία είναι δυνατή η άμεση αναγνώριση του πλήθους (subitize) των στοιχείων ενός συνόλου (από 1έως 4 αντικείμενα) (Dehaene, 2011· Mazza, Pagano, &

Caramazza, 2012).

Σε αντίθεση με το σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών, το οποίο δεν είναι ακριβές και παρέχει μόνο μια εκτίμηση του αριθμού, το σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης είναι ένα ακριβές σύστημα και κωδικοποιεί την ακριβή αριθμητική ταυτότητα των επιμέρους αντικειμένων (Hyde, 2011). Περαιτέρω υποστήριξη για μια διάσταση μεταξύ του ANS και του PI προέρχεται από νευροαπεικονίσεις και νευροφυσιολογικά δεδομένα, τα οποία υποδεικνύουν ότι το PI βασίζεται περισσότερο στα κατώτερα τμήματα του οπίσθιου βρεγματικού λοβού και του ινιακού, ενώ το ANS εξαρτάται κυρίως από νευρογνωστικές συσχετίσεις στην ενδοβρεγματική αύλακα (IPS) (Hyde & Spelke, 2011).

Σύμφωνα με την υπόθεση του ελλείμματος στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα ANS / και PI, η αιτία της δυσαριθμησίας είναι ένα υποκείμενο έλλειμμα σε ένα ή και στα δύο εγγενή συστήματα. Κατά συνέπεια τα παιδιά με δυσαριθμησία θα παρουσιάσουν προβλήματα εκτίμησης μεγεθών συνόλων αντικειμένων (έλλειμμα αναπαράστασης μεγέθους) ή και προβλήματα subitize (Butterworth, 2005, 2010). Περαιτέρω, μια ανεπάρκεια σε ένα ή και στα δύο συστήματα θα προκαλέσει με τη σειρά του βλάβη στο (εξελισσόμενο) συμβολικό σύστημα, με συνέπεια τα παιδιά με δυσαριθμησία να παρουσιάσουν επίσης μειωμένη απόδοση στις εργασίες μέτρησης της επεξεργασίας συμβολικών αριθμών (Wilson, & Dehaene, 2007).

Εκτός από αυτά τα δύο εγγενή μη συμβολικά συστήματα, τα παιδιά αναπτύσσουν επίσης (στα κατάλληλα πολιτιστικά πλαίσια) την ικανότητα να αντιπροσωπεύουν αριθμούς με συμβολικό τρόπο, χρησιμοποιώντας πρώτα λέξεις και αργότερα χρησιμοποιώντας αραβικά ψηφία. Αυτό τους επιτρέπει στη συνέχεια να επεκτείνουν τις κατά προσέγγιση ικανότητές τους στη σφαίρα της ακριβούς αριθμητικής. Στα πλαίσια της δεύτερης θεωρίας τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν δυσκολία πρόσβασης στην αποκωδικοποίηση και επεξεργασία αριθμητικών συμβόλων (Butterworth, 2005, 2010).

### 2.2.2. Υπόθεση ελλείμματος πρόσβασης στην επεξεργασία συμβολικών αριθμών (access deficit hypothesis)

Βασική παραδοχή της θεωρίας της έλλειψης πρόσβασης επεξεργασίας συμβολικών αριθμών, είναι ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία δεν αναπτύσσουν επαρκώς ένα σύστημα αναπαράστασης και επεξεργασίας *συμβολικών αριθμών,* που είναι θεμελιωδώς διαφορετικό από το μη συμβολικό σύστημα (Butterworth, 2010· Rousselle, & Noël, 2007).

Η *συμβολική έννοια του αριθμού*[17], αναφέρεται στην ικανότητα κατανόησης και διαχείρισης των ποσοτήτων με τη χρήση αφηρημένων πολιτισμικών σύμβολων, όπως οι λέξεις και τα αραβικά ψηφία, και γίνεται αντιληπτή σε εργασίες στις οποίες οι αριθμολέξεις και τα αριθμητικά σύμβολα χρησιμοποιούνται ενεργά για να αντιπροσωπεύσουν μια ποσότητα (Lyons, & Beilock, 2013) (όπως σε εργασίες γραφής ή αναγνώρισης και σύγκρισης αριθμών).

Στα πλαίσια αυτής της υπόθεσης, τα παιδιά με δυσαριθμησία μπορούν να έχουν άθικτο μη συμβολικό σύστημα αντιπροσώπευσης της ποσότητας, αλλά αποτυγχάνουν να κάνουν τη σύνδεση αυτού και των νεοαποκτηθέντων συμβολικών αναπαραστάσεων, εξαιτίας δυσχέρειας στον τρόπο που ο εγκέφαλος (Lyons, Ansari, & Beilock, 2012) συνδέει τις έννοιες της ποσότητας με τα σύμβολα των αριθμών, ή στο πώς αντιστοιχίζει τους αριθμούς με λεκτικά ή χωρικά σχήματα (De Smedt, & Gil-

[17] Σύμφωνα με τον Dehaene (2011, σελ. 38), το συμβολικό σύστημα αριθμών μπορεί να εκφραστεί σε δύο διαφορετικούς κώδικες : (1) έναν λεκτικό κώδικα, στον οποίο τα παιδιά αρχικά μαθαίνουν να συσχετίζουν συγκεκριμένες μικρές ποσότητες με την ακουστική συμβολική τους αναφορά και (2) έναν οπτικό κώδικα ο οποίος σχετίζεται με τους γραπτούς αραβικούς αριθμούς. Μαζί με το εγγενές σύστημα αριθμών, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως εσωτερικό αναλογικό σύστημα μεγέθους, αυτά τα συστήματα περιλαμβάνουν τα βασικά συστατικά του λεγόμενου *μοντέλου του τριπλού κώδικα* επεξεργασίας των αριθμών (Dehaene, 2011). Αυτό το μοντέλο έχει λάβει σημαντική εμπειρική υποστήριξη (βλ. Αγαλιώτης, 2013, σελ. 61), και υπάρχει μικρή διαφωνία ότι τα μικρά παιδιά μαθαίνουν να συνδέουν λεκτικά τις αριθμολέξεις με ποσότητες πολύ πριν μάθουν τους γραπτούς αραβικούς αριθμούς (Fayol & Seron, 2005).

more, 2011). Κατά συνέπεια οι μαθητές, στο στοιχειώδες επίπεδο δεν μπορούν να συνδέσουν τους αριθμούς με τις αισθητικές ποσότητες που εκφράζουν (π.χ. η έννοια του «6» δεν συνδέεται με έξι συγκεκριμένα αντικείμενα), αλλά και να μεταβούν σε ένα επίπεδο διερεύνησης των σχέσεων αριθμών και ποσοτήτων (π.χ. η έννοια του «6» δεν αναλύεται σε 3+3, 4+2, 7-1 κ.λ.π) απουσία συγκεκριμένων αντικειμένων.

Η υπόθεση της έλλειψης πρόσβασης ή συνδρόμου αποσύνδεσης συμβόλων και αναπαραστάσεων τους, στηρίζεται σε έρευνα των Rousselle και Noël που έγινε το 2007, στην οποία για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκαν συμβολικά και μη συμβολικά έργα και διαπιστώθηκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών δε διέφεραν στα μη συμβολικά έργα, αλλά υπήρχαν δυσκολίες στην πρόσβαση σε πληροφορίες μεγέθους από αριθμητικά σύμβολα, καθώς τα δυσαριθμητικά παιδιά ήταν πιο αργά και λιγότερο ακριβή όταν σύγκριναν αραβικά ψηφία.

Στα πλαίσια της ίδιας θεωρίας υποστηρίζεται ότι η δυσκολία των παιδιών να κατασκευάσουν ακριβείς συμβολικές απεικονίσεις μπορεί να προέρχεται από ένα περιορισμό του PI, καθώς υποστηρίζεται ότι το PI στηρίζει την απόκτηση των πρώτων φυσικών αριθμών (Noël & Rousselle, 2011), ωστόσο η συμβολική ανεπαρκής λειτουργία αποτελεί τροχοπέδη στην ανάπτυξη της πιο προηγμένης μη-συμβολικής έννοιας του αριθμού και των μαθηματικών επιδόσεων.

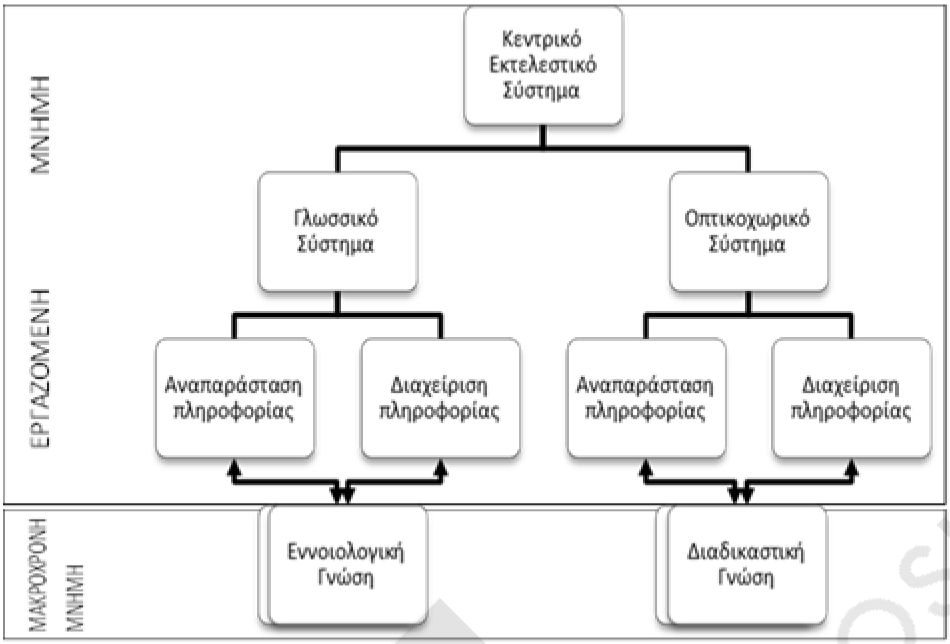
Προς το παρόν οι ενδείξεις για την ορθότητα της μιας ή της άλλης θεωρίας είναι αντικρουόμενες και η επιστημονική κοινότητα δεν έχει καταλήξει, ενώ ταυτόχρονα εκφράζεται διαφωνία σχετικά με το αν η απόκτηση του συμβολικού συστήματος υποστηρίζεται από το PI ή το ANS. Ταυτόχρονα ένα άλλο σώμα ερευνών καταδεικνύει ότι η δυσαριθμησία οφείλεται σε διαταραχές εκείνων των γνωστικών λειτουργιών (αντίληψη, μνήμη, προσοχή) που στηρίζουν την ορθή μαθηματική λειτουργία.

### 2.2.3. Μοντέλο των γνωστικών ελλειμμάτων

Σύμφωνα με το μοντέλο των γνωστικών ελλειμμάτων το έλλειμμα των αριθμητικών δεξιοτήτων στη δυσαριθμησία, διαμεσολαβείται από ελλείμματα σε γνωστικές λειτουργίες. Η μνήμη, ανάμεσα σε αυτές αποτελεί την κυρίαρχη λειτουργία που έχει εξεταστεί σε συνάρτηση με τα προβλήματα στα μαθηματικά, καθώς διάφορες συνιστώσες αυτής είναι κρίσιμες τόσο κατά τη διάρκεια των μαθηματικών συλλογισμών (Meyer et al., 2010) όσο και των μαθηματικών διαδικασιών (Bull, Espy, & Wiebe, 2008· Kyttälä, Aunio, & Hautamäki 2010· Szücs, Devine, Soltesz, Nobes, & Gabriel, 2014), ενώ ο Geary (2004) αναφέρεται στον αιτιώδη ρόλο της εργαζόμενης μνήμης στην εμφάνιση της δυσαριθμησίας.

Το 1974, οι Baddeley και Hitch διατύπωσαν το ευρέως αποδεκτό θεωρητικό μοντέλο της εργαζόμενης μνήμης αποδίδοντάς της το χαρακτηρισμό ενός σύνθετου αλλά και ευέλικτου συστήματος. Η σύνθετη δομή (multi-component) της περιλαμβάνει το *Κεντρικό Εκτελεστικό Σύστημα* (Central Executive System), που είναι ένα σύστημα ελέγχου και προσοχής το οποίο συντονίζει δύο υποτελή συστήματα (slave systems) τα οποία ευθύνονται για την προσωρινή αποθήκευση διαφορετικών ομάδων πληροφοριών. Αυτά τα δύο υποτελή συστήματα είναι: α) το *φωνολογικό* (Phonological loop) ή *αρθρωτικό κύκλωμα* (articulatory loop) που είναι υπεύθυνο για τη συγκράτηση και το χειρισμό των λεκτικών πληροφοριών και β) το *οπτικοχωρικό σημειωματάριο* (visuo-spatial sketchpad) που είναι υπεύθυνο για τη συγκράτηση και το χειρισμό των οπτικών πληροφοριών. Αυτά τα δύο υποσυστήματα επεξεργάζονται τα διαφορετικά είδη πληροφοριών κατά παράλληλο, αλλά και εντελώς ανεξάρτητο τρόπο.

Ο Geary (2004) στηριζόμενος σε αυτό το μοντέλο υποστηρίζει ότι οι αδυναμίες χειρισμού εννοιών ή διαδικασιών στο πεδίο των μαθηματικών σχετίζονται με υποκείμενες ελλείψεις τόσο στο κεντρικό εκτελεστικό σύστημα όσο και στα δύο υποτελή συστήματα της εργαζόμενης μνήμης, και προτείνει ένα απεικονιστικό πρότυπο αυτών των βασικών συστημάτων επεξεργασίας των μαθηματικών γνώσεων που υπολειτουργούν (Βλ. Σχήμα 2.1.).



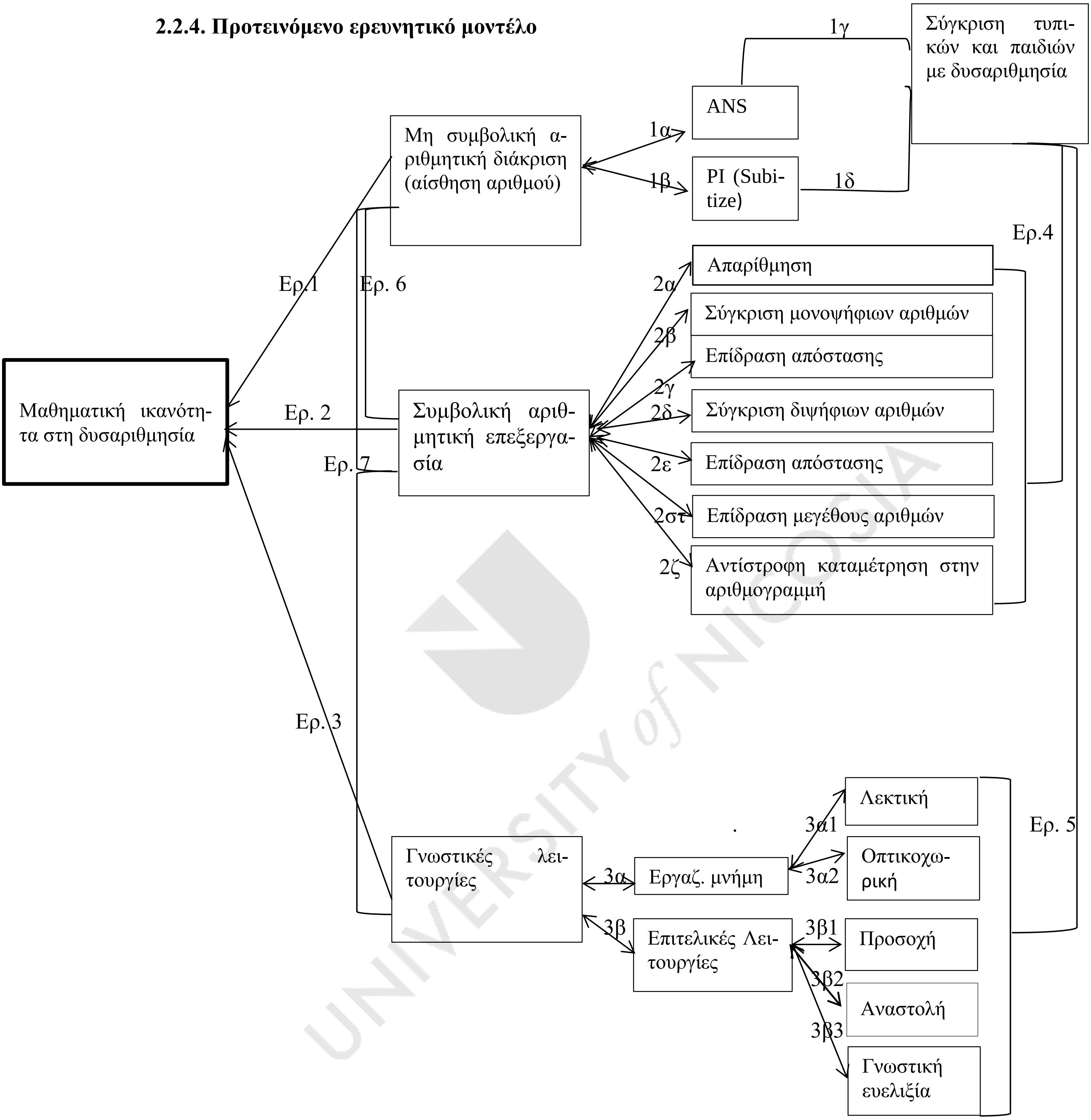

*Σχήμα 2.1. Εργαζόμενη μνήμη. Μεταφορά και προσαρμογή από Geary (2004, σελ.8) και Αγαλιώτης (2013, σελ. 175).*

Το ερώτημα όμως που προκύπτει από αυτή τη θεωρητική προσέγγιση είναι κατά πόσο η εργαζόμενη μνήμη και τα συναφή με αυτήν προβλήματα είναι ανεξάρτητα της αίσθησης του αριθμού και των συμβολικών ικανοτήτων, και επομένως αποτελούν έναν σημαντικό ανεξάρτητο παράγοντα πρόβλεψης της δυσαριθμησίας.

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μπορεί να είναι θετική στη βάση της μεταβλητότητας του φαινότυπου της διαταραχής. Η πιθανότητα για παράδειγμα, της ύπαρξης ενός αριθμού παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά των οποίων οι ικανότητες της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και οι ικανότητες συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων να λειτουργούν στα πλαίσια του μέσου όρου, αλλά ακόμη να παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα στα μαθηματικά, σηματοδοτούν την αναγκαιότητα της χρήσης μιας πολυμεταβλητής προσέγγισης της εν λόγω διαταραχής. Διότι, ακόμη και αν οι δύο παράγοντες, ικανότητα στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση και ικανότητα συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων είναι ανεξάρτητες μεταβλητές που καθορίζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων, μπορεί να υπάρχει ένα ποσοστό μη ερμηνευμένης διακύμανσης στην ανάπτυξη αυτής της ικανότητας.

Στη βάση επομένως της αναγκαιότητας μιας πολυμεταβλητής προσέγγισης της διαταραχής, μέσα από μια προσπάθεια σύγκλισης των τριών θεωρητικών μοντέλων ερμηνείας αυτής, καθώς και των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν προκύπτει το παρακάτω προτεινόμενο ερευνητικό μοντέλο.

### 2.2.4. Προτεινόμενο ερευνητικό μοντέλο



### 2.2.5. Οι σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις

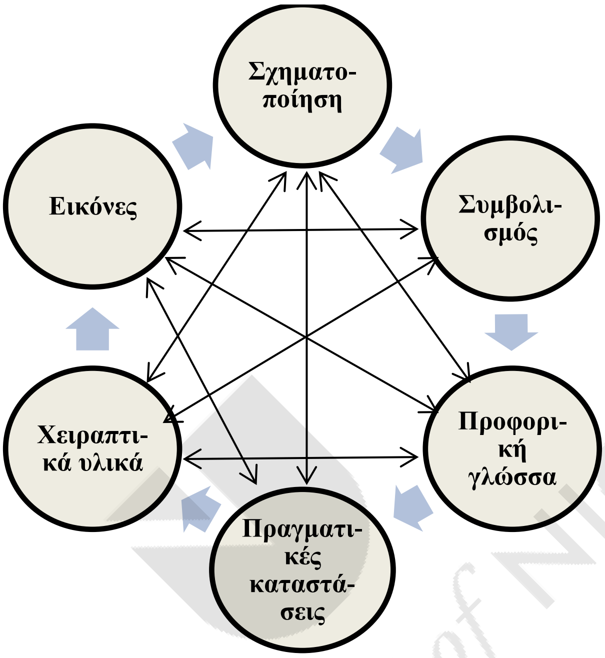
Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005, σελ. 46), είναι δύσκολη η διαχείριση από τους μαθητές όλων των ηλικιών των αφηρημένων σχέσεων των μαθηματικών, ιδιαιτέρως όταν παρουσιάζονται τα μαθηματικά μόνο σε αυτήν την αφηρημένη τους μορφή. Αντίθετα, η μοντελοποίηση δίνει τη δυνατότητα της περιγραφής ή της αναπαράστασης της έννοιας ή της μαθηματικής δομής, κατά τη διαδικασία μαθηματικοποίησης και λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος ανάμεσα στις έννοιες και στα σύμβολα και ως μέσο ανάπτυξης εννοιών (Gravemeijer, 1999· Σαλβαράς, 2011· Van de Walle, 2005).

Τα μοντέλα μπορεί να είναι χειραπτικά υλικά, εικόνες, διαγράμματα, άτυπα ή τυπικά σύμβολα, ή ακόμα και άτυπες στρατηγικές, όπως της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης στον πολλαπλασιασμό ή της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης ως στρατηγική για την πράξη της διαίρεσης (Κολέζα, 2009· Λεμονίδης, 2013· Σαλβαράς, 2011). Η χρήση τους, σε μια εξελικτική προσέγγιση της διδασκαλίας (Van de Walle, 2005, σελ. 46) έχει σκοπό να:

1. Να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν έννοιες ή σχέσεις.
2. Να βοηθήσει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις των εννοιών και των συμβόλων.
3. Να αξιολογήσει την κατανόηση των μαθητών.

Οι Lesh, Post και Behr (1987) (όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2005, σελ. 46) κάνουν λόγο για πέντε διακριτούς τύπους αναπαραστάσεων των εννοιών, οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν και στη διδασκαλία / μάθηση των αλγόριθμων των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, και είναι οι εξής: 1) καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, 2) χειραπτικά υλικά, 3) εικόνες, 4) γραπτά σύμβολα και 5) προφορική γλώσσα.

Στους παραπάνω πέντε διακριτούς τύπους αναπαραστάσεων προστίθενται στην παρούσα έρευνα οι σχηματοποιήσεις (Βλ. Σχήμα 2.2.), καθώς σύμφωνα με τον Van de Walle (2005, σελ. 46), όσο περισσότερους τρόπους προσφέρουμε στα παιδιά για να σκεφτούν και να δοκιμάσουν μια ιδέα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να διαμορφωθεί αυτή σωστά και να ενταχθεί σε ένα πλούσιο δίκτυο ιδεών – στη συσχετιστική κατανόηση.




*Σχήμα 2.2. Οι πέντε τύποι αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών επεκτείνονται σε έξι. Σχήμα προσαρμοσμένο από Van de Walle (2005, σελ. 47).*

Ειδικότερα, η μοντελοποίηση / σχηματοποίηση των αλγόριθμων των πράξεων αποτελεί τη διαδικασία της σχηματικής αναπαράστασης των ποσοτήτων με κάποιο κώδικα, μέσω του οποίου οι ποσότητες εμφανίζονται ως ξεχωριστές οντότητες, ώστε να υπολογίζονται ευκολότερα, αλλά και να είναι ορατή η ομαδοποίηση και η ανταλλαγή θέσης με βάση τις αρχές του δεκαδικού συστήματος (Σαλβαράς, 2011), για τη συγκρότηση της εννοιολογικής διεργασίας του αλγόριθμου. Καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να παράγουν σχηματικές αναπαραστάσεις και μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις ως εργαλεία των διεργασιών των αλγόριθμων, αποκτούν μια βαθύτερη κατανόηση της αλγοριθμικής διαδικασίας. Κατανοούν τι κάνουν, πώς και γιατί

(Σαλβαράς, 2011, σελ. 125).

Ωστόσο, η αποτελεσματική χρήση των σχηματικών αναπαραστάσεων για την αλγοριθμική διαδικασία δε λειτουργεί αυθόρμητα. Οι μαθητές χρειάζονται καθοδήγηση στην επιλογή, στο χειρισμό και στην ερμηνεία των αναπαραστάσεων.

Για να δημιουργήσουν τα παιδιά αναπαραστατικές ικανότητες των ποσοτήτων μέσω των σχηματοποιήσεων κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων και στη συνέχεια να τις συνδέσουν σε ένα δίκτυο συμβολικών διαδικασιών, πρέπει να υποστηριχτούν από στρατηγικές διδασκαλίας που αποδεδειγμένα από την έρευνα μπορούν να ωφελήσουν το μαθητή. Ως τέτοια επιλέγεται η στρατηγική της γνωστικής μαθητείας, που βασίζεται στο εν λόγω μοντέλο, ως το σκαλοπάτι οικοδόμησης της γνώσης των μαθητών με δυσαριθμησία.

### 2.2.6. Η γνωστική μαθητεία

Η Γνωστική Μαθητεία (Cognitive Apprenticeship) είναι ένα μοντέλο μάθησης όπου κάνει τη σκέψη ορατή μέσω των διαδικασιών της προτυποποίησης / μοντελοποίησης, της καθοδήγησης και των πλαισίων στήριξης με τη μορφή της φθίνουσας καθοδήγησης (Collins, 2006· Σαλβαράς, 2011). Μέσα από αυτή την ακολουθία δραστηριοτήτων, οι οποίες περιλαμβάνουν την επίδειξη της νέας γνώσης με σαφή βήματα, την εξάσκηση με φωναχτό και σιωπηρό λόγο, την υποστήριξη των μαθητών με τη μέθοδο της σκαλωσιάς, τον συνεχή έλεγχο και την ανατροφοδότηση που διατρέχουν όλες τις δραστηριότητες, οι μαθητές βιώνουν και οικοδομούν εννοιολογικά μοντέλα μιας πολύπλοκης δεξιότητας-στόχου (Σαλβαράς, 2011).

Το μοντέλο της Γνωστικής Μαθητείας διατυπώνεται στο πλαίσιο της θεωρίας της Πλαισιοθετημένης ή Εμπλαισιωμένης Γνώσης (Situated Cognition Theory), προτείνοντας συγκεκριμένα βήματα εφαρμογής της θεωρίας (Κολέζα, 2009). Η Πλαισιοθετημένη Γνώση είναι μια θεωρία μάθησης και διδασκαλίας, που διατυπώνεται στο ευρύτερο πλαίσιο της κοινωνικο – πολιτισμικής προσέγγισης της γνώσης, σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με αυθεντικές (πραγματικές / ρεαλιστικές) δραστηριότητες σε συγκεκριμένα πλαίσια και κουλτούρα. Η αντίληψη και η γνώση δεν είναι αποκλειστικά ιδιότητες του νου, αλλά δυναμικές, συλλογικές και πλαισιοθετημένες δράσεις ή σύνολα σχέσεων που κατανέμονται μεταξύ των ατόμων, των κοινωνικών περιβαλλόντων και των δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα σε αυτά τα πλαίσια (Σακονίδης 2007).

Δηλαδή, το ότι ένας μαθητής κατανοεί ένα αντικείμενο, ένα ζήτημα, μια έννοια, μια διαδικασία, ή μια πρακτική, καθώς επίσης και η δυνατότητα του να ενεργήσει επαρκώς σε σχέση με αυτά, οφείλονται όχι σε καθαρά υποκειμενικά χαρακτηριστικά, αλλά στα φυσικά, χρονικά και χωρικά περιστατικά μέσω των οποίων αυτές οι ικανότητες έχουν προκύψει. Η γνώση του είναι πλαισιοθετημένη (συγκειμενοποιημένη) και κατανεμημένη (Lave, & Wegner, 1991). Η κεντρική ιδέα είναι ότι οι μαθητές μαθαίνουν να σκέφτονται συμμετέχοντας ενεργά σε δραστηριότητες (Engeström, 2001), σε πλαίσια που προσιδιάζουν στη φυσική (ατομική) και κοινωνική πραγματικότητά τους. Η έννοια του πλαισίου μέσα στο οποίο διατυπώνονται τα μαθηματικά προβλήματα έχει πολύ σημαντικό ρόλο διότι θεωρώντας τη μαθηματική εκπαίδευση ως ανθρώπινη δραστηριότητα τίθεται το ερώτημα: «*Πώς να δώσουμε στους μαθητές το πρόβλημα, ώστε να έχει νόημα γι’ αυτούς, δηλαδή να έχει μια αίσθηση πραγματικότητας;*» (Freudenthal, 1968, σελ. 3).

Σύμφωνα πάντα με τη θεωρία της Πλαισιοθετημένης Γνώσης, η μάθηση αποτελεί κοινωνικό φαινόμενο, που συγκροτείται στον πραγματικό κόσμο, μέσα από μια διαδικασία «νόμιμης περιφερειακής συμμετοχής» (legitimate peripheral participation), σε κοινότητες πρακτικής (communities of practice) που βρίσκονται σε εξέλιξη (Κολέζα, 2009). Οι γνωστικοί επιστήμονες, στηριζόμενοι στη θεωρία της Εμπλαισιωμένης Γνώσης υποστηρίζουν ότι η γνωσιακή λειτουργία δεν επισυμβαίνει μόνο στον εγκέφαλο, αλλά ότι το πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η εκμάθηση είναι κρίσιμο (Godden, & Baddeley, 1975).

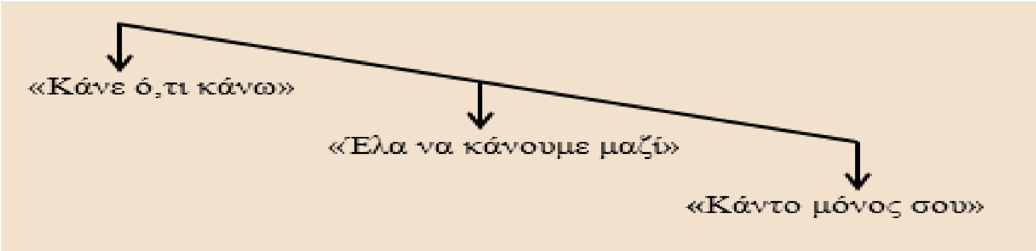
Μέρος της αποτελεσματικότητας του μοντέλου της Γνωστικής Μαθητείας υποστηρίζεται από τη θεωρία μοντελοποίησης του Albert Bandura (2000), στα πλαίσια του κοινωνικο-γνωστικού συμπεριφορισμού (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ. 86), η οποία υποδηλώνει ότι για να ενεργοποιηθούν οι διαδικασίες προσοχής του μαθητή και να είναι επιτυχημένη η πρόσληψη των πληροφοριών μέσω της μοντελοποίησης (Modeling, Observational learning), δηλαδή της παρατήρησης και μίμησης του προτύπου, πρέπει το πρότυπο να παρουσιάζει με *σαφήνεια και διαύγεια* τους στόχους, η συμπεριφορά του να είναι *απλή και δομημένη* για να διευκολύνει τον μαθητή στην εκμάθησή του στόχου, *συχνή*, καθώς όσο πιο συχνά παρουσιάζεται η προς εκμάθηση συμπεριφορά, τόσο πιο εύκολα υιοθετείται, και *συναισθηματικά* κατάλληλη, όπως φιλική, ζεστή, ευχάριστη και ευγενική, και αυτό γιατί μέσω της συναισθηματικής διάστασης ο μαθητής υιοθετεί την ίδια συμπεριφορά (Bandura, 2000, σελ. 26· Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ. 87). Σε σχέση με το μαθητή, ο Bandura (2000, σελ.27) αναφέρει πως οι γνωστικές και αντιληπτικές ικανότητες που αυτός έχει διαμορφώσει, διαμεσολαβούν της πρόσληψης των πληροφοριών και ευθύνονται αιτιολογικά της αναπαραγωγής αυτών (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ. 87). Η δε γνωστική κωδικοποίηση των πληροφοριών που αποκτά ο μαθητής κατά τη μοντελοποίηση, δημιουργεί τις προϋποθέσεις για αυτοκαθοδήγηση, αυτοενίσχυση και αυτοέλεγχο.

Η έννοια της «δημιουργίας πλαισίων στήριξης», ομόλογη του όρου «scaffolding» που εισήγαγαν πρώτοι οι Wood, Bruner και Ross το 1976 (Wood, Bruner, & Ross, 1976), είναι ο κεντρικός άξονας στο μοντέλο της Γνωστικής Μαθητείας και συνδέεται άμεσα με την έννοια της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης (ZPD – Zone of Proximal Development), στα πλαίσια του διαλεκτικού κονστρουκτιβισμού, μέσω της οποίας ο Vygotsky τόνισε τον ρόλο του σημαντικού ενήλικα (γονέα, δασκάλου ή ικανότερου συνομήλικου) στη διανοητική εξέλιξη του παιδιού. Ο Vygotsky ορίζει τη Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης ως την απόσταση μεταξύ της πραγματικής ανάπτυξης του παιδιού και της πιθανής ανάπτυξης του, από την υποστήριξη του σημαντικού άλλου (Vygotsky, 1978/1930). Η ZPD (Ζώνη της Επικείμενης ανάπτυξης) αναδεικνύει τη σημασία των ψυχολογικών λειτουργιών που βρίσκονται σε εξέλιξη και που είναι πιθανό να αγνοηθούν, εάν η εστίαση βρίσκεται αποκλειστικά στην επίδοση του μαθητή χωρίς τη βοήθεια του ενήλικα. Οι Wood και συν. (1976) εξηγώντας την υποστήριξη στο δυναμικό του μαθητή αναφέρουν: «*περιλαμβάνει μια διαδικασία τύπου σκαλωσιάς (scaffolding), η οποία καθιστά ένα παιδί ικανό να λύσει ένα πρόβλημα, να διεκπεραιώσει ένα έργο ή να επιτύχει ένα στόχο, επίτευγμα που θα ήταν αδύνατο χωρίς τη βοήθεια-υποστήριξη ενός ενήλικα*» (σελ. 90). Στη βάση της αρχής αυτής, η γνωστική ανάπτυξη, εκλαμβάνεται ως συνισταμένη δύο παραγόντων: (α) του έμφυτου νοητικού δυναμικού του παιδιού και (β) της διαμεσολάβησης των κοινωνικών γεγονότων, των πολιτισμικών εργαλείων και της εσωτερίκευσής τους. Η διαμεσολάβηση αποτελεί το υποστηρικτικό πλαίσιο εξέλιξης του μαθητή.

Η δόμηση του υποστηρικτικού πλαισίου ως σκαλωσιά για την ανέγερση του οικοδομήματος της γνώσης (scaffolding), επιτελείται, σύμφωνα με τους Wood και συν. (1976, σελ. 98) σε έξι στάδια: α) στην εξασφάλιση του ενδιαφέροντος του μαθητή και της ώθησής του στην προσήλωση των αναγκών του μαθησιακού έργου, β) στην απλοποίηση της εργασίας του μαθητή, μειώνοντας τον αριθμό των συστατικών πράξεων που απαιτούνται για την επίτευξη της λύσης, γ) στη διατήρηση της καθοδήγησης, δ) στην ενίσχυση της κατανόησης του έργου από τους μαθητές μέσα από την ενσωμάτωση εργαλείων αναπαράστασης της πληροφορίας (γραφικά, επισημάνσεις, σχήματα) τα οποία σηματοδοτούν ή τονίζουν επιπρόσθετα χαρακτηριστικά της εργασίας που είναι συναφή, ε) στον έλεγχο της απογοήτευσης που μπορεί να νιώσει ο μαθητής κατά τη διαδικασία της ατομικής επίλυσης προβλήματος σε αντίθεση με τη συνεργατική επίλυση κατά την καθοδήγηση και στ) στη μοντελοποίηση-παρουσίαση ενός απλού τρόπου επίλυσης προβλημάτων και της αναπαραγωγής του τρόπου αυτού από τους μαθητές.

Αν και δεν υπάρχει συναίνεση των μελετητών, στο χώρο της εκπαιδευτικής και ψυχολογικής έρευνας, για τις βασικές λειτουργίες ή τα στάδια του υποστηρικτικού πλαισίου, η αντίληψη του scaffolding είναι ενεργοποιητής διακριτής καθοδήγησης και αξιοποίησης εναλλακτικών προσεγγίσεων ή στρατηγικών που απουσιάζουν από τον γνωστικό χάρτη κάθε μαθητή μέσα από συνεχείς αξιολογήσεις και επανατροφοδοτήσεις. Σύμφωνα με τον Jerome Bruner, η διαδικασία του scaffolding (στην οποία αναφέρθηκε ως «δοτή συνείδηση» - vicarious consciousness) παρέχει «συνείδηση για δύο» (consciousness for two) (Bruner, 1997, σελ. 75), μέχρι να αποκτηθεί η επιθυμητή γνώση (Κολέζα, 2009· Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011). Ο Bruner τόνισε, όπως και ο Piaget (Ράπτης, & Ράπτη, 2002, σελ. 81-82), ότι η γνώση έχει δομή και η παρουσίαση αυτής υπό τη μορφή σχημάτων και νοηματικών μοντέλων, παρέχει νόημα και οργάνωση στις εμπειρίες των εκπαιδευομένων και επιτρέπει στο άτομο να χρησιμοποιήσει αυτό που μαθαίνει, προκειμένου να γενικεύσει και να προχωρήσει ακόμη πιο πέρα από την παρεχόμενη εκπαίδευση (Bruner, 1997).

Το πλαίσιο στήριξης στο μοντέλο της γνωστικής μαθητείας σταδιακά λαμβάνει τη μορφή της *φθίνουσας καθοδήγησης* (Βλ. Σχήμα 2.3.), επιτρέποντας στους μαθητές την ανάπτυξη αυτορρυθμιστικών και μεταγνωστικών ικανοτήτων (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ. 87). Το κεκλιμένο σχήμα της καθοδήγησης, προερχόμενο από τους Σαλβαρά και Σαλβαρά (2011, σελ 87) απεικονίζει σχηματικά όλο το εύρος του μοντέλου της γνωστικής μαθητείας.




*Σχήμα 2.3. Η μορφή της φθίνουσας καθοδήγησης (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ 87).*

Αρχικά, ο εκπαιδευτικός δείχνει και εξηγεί πώς σκέφτεται, για να αποτελέσει πρότυπο για παρατήρηση και μίμηση (Κάνε ό,τι κάνω). Στη συνέχεια, εκπαιδευτικός και μαθητές εκτελούν την ίδια δραστηριότητα με πρακτική εργασία, στην οποία εμπεριέχεται η εξωτερίκευση με φωναχτό λόγο του πώς εκτελούμε τη δραστηριότητα, ώστε λόγος και πράξη να ενισχύονται αμφίδρομα, η εσωτερίκευση του ενεργήματος με σιωπηρό λόγο, δηλαδή εσωτερική υποφωνητική λεκτικοποίηση του πώς εκτελούμε τη δραστηριότητα, ώστε να το μεταγράψουν στη σκέψη τους, και οδηγίες στον εαυτό «τι να προσέξουμε» για την ανάπτυξη της ικανότητας της αυτορρύθμισης (Έλα να κάνουμε μαζί). Τέλος οι μαθητές εξασκούνται μόνοι τους, εργαζόμενοι με αυτοέλεγχο (Κάντο μόνος σου). Στην εργασία με αυτοέλεγχο οι μαθητές εργάζονται με συγκροτημένο το ενέργημα: τι θα κάνω, πώς, κάθε πότε, το οποίο λειτουργεί ως οδηγός ανάπτυξης της μεταγνώσης των μαθητών (Σαλβαράς, 2013β, σελ. 117).

Στο μοντέλο της γνωστικής μαθητείας των Collins, Brown και Newman (1989), περιγράφονται έξι στάδια ή μέθοδοι αυτής: (1) *παροχή μοντέλου* (modeling), (2) *καθοδήγηση* (coaching), (3) *παροχή υποστήριξης* (scaffolding) και *απόσυρση* (fading), (4) *οργάνωση της σκέψης* (articulation), (5) *αναστοχασμός* (reflection), (6) *εξερεύνηση* (exploration) (Collins, Brown, & Newman, 1989).

Η παροχή μοντέλου (modeling), εστιάζει στην παροχή μιας υποδειγματικής συμπεριφοράς από τον δάσκαλο στον μαθητή, η οποία χαρακτηρίζεται από τη δομημένη παρουσίαση του προς εκμάθηση έργου με σαφείς ξεκάθαρες οδηγίες και όχι προσανατολισμένες στην ανακάλυψη (discovery oriented methods) (Fuchs, Fuchs, Powell, Seethaler, Cirino, & Fletcher, 2008), ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν αυτό που αναμένεται από αυτούς. Εκτός της δομημένης παρουσίασης ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει ανοιχτά τον τρόπο συλλογισμού του π.χ. θέτει στον εαυτό του ερωτήματα, αναζητεί και επιλέγει λύσεις σκεφτόμενος δυνατά, έτσι ώστε οι μαθητές του να του θέτουν ερωτήματα και να απαντά δείχνοντας στους μαθητές τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί (Collins et. al., 1989). Συνοπτικά, η παρατήρηση των τεχνικών και των στρατηγικών του δασκάλου είναι βασική προϋπόθεση για την επιτυχία των μαθητών. Επιπλέον, η παρατήρηση δίνει στον μαθητή μια συνολική εικόνα του εγχειρήματος, γεγονός που επιτρέπει να προσανατολιστεί στον σύνθετο στόχο, χωρίς να αναλώνεται τουλάχιστον αρχικά σε πρακτική κάθε μεμονωμένης επιμέρους ικανότητας (Collins, 2006).

Στο βήμα της καθοδήγησης (coaching), σημαντικό ρόλο παίζουν η συστηματική ανατροφοδότηση και ενίσχυση, η συνεργασία στο πλαίσιο της ομάδας, η επαναλαμβανόμενη πρακτική εξάσκηση του μαθητή μέσα από συστηματική καθοδήγηση (Collins et. al., 1989· Σαλβαράς, 2011). Η εξάσκηση του μαθητή, συντίθεται από την επιλογή των καταλλήλων δραστηριοτήτων, την παρατήρηση του μαθητή ενώ τις εκτελεί και της χορήγησης, όπου απαιτείται, νύξεων, υπαινιγμών, ανατροφοδοτήσεων, στοιχείων υπενθύμισης, σκαλωσιών και νέων εργασιών που στόχο έχουν να φέρουν πιο κοντά την απόδοση του μαθητή με αυτήν του δασκάλου (Collins et. al., 1989).

Η διαδικασία παροχής υποστηρικτικού υλικού (scaffolding) μπορεί επίσης να περιλαμβάνει υποδειγματικές πρακτικές (modeling), για παράδειγμα τη μοντελοποίηση των βημάτων από το δάσκαλο ή τη σκέψη δυνατά, καθώς αυτός επιδεικνύει τη δραστηριότητα. Το υποστηρικτικό υλικό μπορεί επίσης να είναι κάρτες, υλικά, σχήματα που διευκολύνουν το σχηματισμό εννοιολογικών βάσεων ή ένα γραπτό μοντέλο ολοκληρωμένης εργασίας μέσω του οποίου οι μαθητές να συγκρίνουν τη δουλειά τους (Collins et. al., 1989· Σαλβαράς, 2011). Σε αυτό το στάδιο ωστόσο, αυτή η υποστήριξη πρέπει σταδιακά να αποσυρθεί (fading), έτσι ώστε ο μαθητής να γίνει αυτάρκης και να μπορεί να εξερευνήσει τις καταστάσεις με τον δικό του προσωπικό τρόπο (exploration) (Collins et al., 1989).

Η εξερεύνηση ως μέθοδος διδασκαλίας περιλαμβάνει τη διατύπωση γενικών στόχων, τους οποίους οι μαθητές στη συνέχεια πρέπει να αναλύσουν σε επιμέρους στόχους, ώστε να τους διερευνήσουν σε βάθος. Η φάση της εξερεύνησης (exploration) αποτελεί το τελευταίο στάδιο του μοντέλου και στοχεύει στη διεύρυνση του τρόπου σκέψης των μαθητών και την απόκτηση αυτονομίας (Collins et. al., 1989· Σαλβαράς, 2011).

Η ικανότητα οργάνωσης της σκέψης (articulation), αναφέρεται στην ικανότητα της σαφούς έκφρασης των βημάτων συλλογισμού και η ικανότητα αναστοχασμού (reflection) αναφέρεται στην ικανότητα αναστοχασμού των ενεργειών των μαθητών σε σχέση με εκείνες των άλλων (του δασκάλου ή των συμμαθητών). Σε αυτά τα στάδια οι μαθητές συνειδητοποιούν τις στρατηγικές επίλυσης των αλγοριθμικών διαδικασιών ή των προβλημάτων και η γνώση αυτών των στρατηγικών τους επιτρέπει να γίνουν ικανοί λύτες (Collins et. al., 1989· Κολέζα, 2009· Σαλβαράς, 2011).

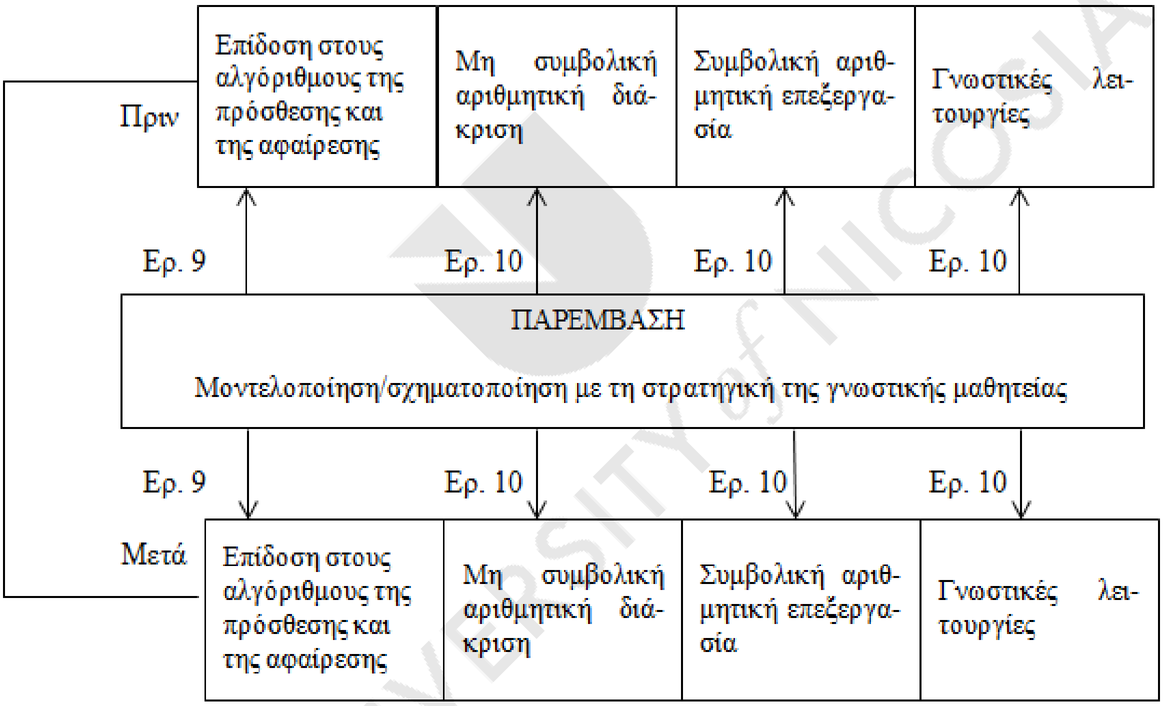
Συνολικά, η σπουδαιότητα της γνωστικής μαθητείας σχετίζεται με την επικέντρωση στην ανάπτυξη των γνωστικών ικανοτήτων και της εν δυνάμει γνώσης των μαθητών μέσω προτυποποιήσεων ενεργημάτων, δομημένων ακολουθιών δραστηριοτήτων, καθοδηγούμενης επαναλαμβανόμενης εξάσκησης με τη χρήση σκαλωσιάς και θετικής ανατροφοδότησης, η οποία διατρέχει όλα τα στάδια αυτής.

Την παραδοχή του διαλεκτικού κονστρουκτιβισμού, στον οποίο βασίζεται η γνωστική μαθητεία, έρχονται να την ενισχύσουν από μια άλλη σκοπιά τα επιχειρήματα της νευροεπιστήμης. Σύμφωνα με τους νευροεπιστήμονες, η μάθηση είναι η ικανότητα του μαθητή να δημιουργεί και να ενισχύει τα δικά του νευρολογικά δίκτυα μέσα στο νου, δημιουργώντας νέους νευρωνικούς κόμβους που συνδέονται με υπάρχοντες κόμβους (Devlin, 2010). Οι νευρολογικές συνδέσεις και η ενίσχυση αυτών των συνδέσεων (συνάψεων) συμβαίνουν μέσω των νευρολογικών διαδικασιών της αφομοίωσης και συμμόρφωσης. Αυτές οι διανοητικές διαδικασίες απαιτούν άμεση αισθητική έκθεση σε περιβαλλοντικά ερεθίσματα και σε διαμεσολαβούμενα κοινωνικά ερεθίσματα όπως η γλώσσα, τα σήματα (ως σήμα αναφέρεται οτιδήποτε εκπροσωπεί κάτι άλλο, το οποίο είναι δυνατόν να μας αναγάγει σε μια αναπαράσταση) και τα σύμβολα (Vygotsky, 1978/1930).

Οι γνωστικές δομές και τα νευρωνικά μονοπάτια των παιδιών μέσα στο μυαλό τους κατασκευάζονται συνεχώς, αναπτύσσονται και ενισχύονται καθημερινά καθώς τα παιδιά εργάζονται για να κατανοήσουν τα μαθηματικά (Devlin, 2010). Καθώς τα παιδιά κάνουν πρακτική άσκηση για να μάθουν, ο αριθμός των νευρολογικών τους δενδριτικών δεσμών αυξάνεται και ενισχύεται η ανάπτυξη των γνωστικών δομών. Θεωρητικά, ο αριθμός των συνδέσεων συνιστά αποτελεσματικούς ή αναποτελεσματικούς μηχανισμούς επεξεργασίας πληροφοριών, επηρεάζοντας έτσι την τελική ποσότητα και τα πρότυπα νευρωνικής συνδετικότητας στο ανθρώπινο μυαλό (Byrnes, & Fox, 1998).

Με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας οι εννοιολογικές και διαδικαστικές γνώσεις παραδειγματοποιούνται / μοντελοποιούνται και γίνεται χρήση αυτών σε πραγματικά πλαίσια, μέσω καθοδήγησης, πρακτικής άσκησης και υποστήριξης. Η εξωτερικοποίηση των σχετικών διαδικασιών και μεθόδων καθιστά δυνατή την επίτευξη συγκροτήματος γνωστικού και μεταγνωστικού. Το ερώτημα όμως που προκύπτει είναι κατά πόσο αυτή η σχετικά διαφανής σχέση σε όλα τα στάδια εφαρμογής της γνωστικής μαθητείας για την επίτευξη συγκροτήματος και της αναπαραστατικής σχηματικής απεικόνισης των ποσοτήτων, αναπτύσσουν την ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, την ικανότητα της επεξεργασίας συμβολικών ποσοτήτων και τις γνωστικές δομές των μαθητών με δυσαριθμησία κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Κατά συνέπεια το αρχικά προτεινόμενο ερευνητικό μοντέλο συνδιαμορφώνεται με την παρέμβαση ως εξής:




Τα δύο προτεινόμενα ερευνητικά μοντέλα της έρευνας συγκροτούν μια οπτικοποίηση / σχηματοποίηση της τρέχουσας, ελεγχόμενης και συστηματικής ερευνητικής μελέτης, με τις μεταβλητές της έρευνας και τα σαφή ερευνητικά ερωτήματα τα οποία συγκεκριμενοποιούν το σκοπό της έρευνας, έτσι ώστε να είναι εναργές κατά τον εμπειρικό έλεγχο αυτής, ποια ευρήματα συνιστούν απαντήσεις αυτών.

**2.3. Αναγκαιότητα της έρευνας**

Η υπάρχουσα βιβλιογραφία παρέχει ένα αντιφατικό μείγμα αποτελεσμάτων, έναντι του οποίου φαίνεται καθαρά ότι μια μη συμβολική ή συμβολική εξέταση των θεμελίων της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία είναι ανεπαρκής. Ταυτοχρόνως η αντιφατικότητα αυτή επεκτείνεται και στον τομέα των γνωστικών λειτουργιών. Σύμφωνα με τους Παπαναστασίου και Παπαναστασίου (2013, σελ. 62) όταν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας διαπιστωθεί ότι υπάρχουν αντικρουόμενα αποτελέσματα ερευνών, τότε είναι φανερή η αναγκαιότητα ανάληψης μιας τέτοιας έρευνας.

Η μέχρι τώρα ερευνητική προσπάθεια εξετάζει μεμονωμένα τις τρεις θεωρίες ερμηνείας της δυσαριθμησίας και όχι υπό το πρίσμα της σύγκλισης αυτών. Στην παρούσα έρευνα, που στόχος της είναι να συμβάλλει σε πληρέστερη διάγνωση, αλλά και διαφορική διάγνωση των μαθητών με τη συγκεκριμένη διαταραχή οι τρεις θεωρίες θα αξιοποιηθούν εκ παραλλήλου, λόγω του ότι κάποια συμπτώματα και χαρακτηριστικά που τείνουν να παρατηρούνται, σε άλλες περιπτώσεις παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά αποκλείονται.

Κατά συνέπεια, η ανάληψη μιας τέτοιας έρευνας μπορεί να συνεισφέρει στην εκπαιδευτική έρευνα με αξιοποιήσιμα δεδομένα μέσω ανιχνευτικών μεθόδων, τόσο για τους δείκτες εκείνους που διαφοροποιούν τα παιδιά με την εν λόγω διαταραχή από τους τυπικούς συνομήλικους όσο και για τους παράγοντες εκείνους (προβλεπτές) που ερμηνεύουν τη διαταραχή στην ηλικία που ενδιαφέρει την έρευνα, και ταυτοχρόνως στην προσπάθεια αξιολόγησής τους.

Ταυτοχρόνως η αναγκαιότητα της έρευνας στοιχειοθετείται από τη διερεύνηση συνεισφοράς της εκπαιδευτικής παρέμβασης στη βελτίωση της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής επεξεργασίας μεγεθών και των γνωστικών δομών, μέσω των μοντελοποιήσεων / σχηματοποιήσεων  των αλγόριθμων των πράξεων με τη  στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας. Το μοντέλο της γνωστικής μαθητείας είναι επικεντρωμένο αρχικά στον εκπαιδευτικό και στη συνέχεια στο μαθητή και προτείνει μια σειρά ρουτινών στον πρώτο, ώστε αυτός να προσφέρει στο μαθητή ένα καλά οργανωμένο μαθησιακό περιεχόμενο με έναν εύληπτο και φιλικό τρόπο (Σαλβαράς, 2013α). Το εν λόγω μοντέλο είναι εμπειρικά τεκμηριωμένα, κατάλληλο για μαθήσεις σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, με τις περισσότερες ωστόσο έρευνες, επικεντρωμένες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Με άλλα λόγια, η παρούσα έρευνα σε επίπεδο παρέμβασης μπορεί να μας υποδείξει εάν η αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών μέσω της σχηματοποίησης - υποστηριζόμενη από τη στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας - χρησιμεύει ως «ιδανικό σκαλοπάτι» της εξέλιξης των δομικών ελλειμμάτων στη δυσαριθμησία.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, όλες τις άνωθεν πληροφορίες, θα μπορούσε να υποστηριχθεί πως η αναγκαιότητα του προτεινόμενου θέματος έγκειται ευρύτερα στην ελπίδα για τη διαρκή βελτίωση και αναβάθμιση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, με στόχο την καλύτερη δυνατή παροχή υπηρεσιών, αξιολόγησης, διδασκαλίας και μάθησης σε ένα σύνολο μαθητών που αποτελείται τόσο από παιδιά με την εν λόγω διαταραχή, όσο και από παιδιά που δεν αντιμετωπίζουν κάποια αναπτυξιακή διαταραχή. Επιπροσθέτως, θεωρείται πως τα συμπεράσματα που θα προκύψουν, θα παρουσιάσουν έντονο ενδιαφέρον για την ακαδημαϊκή και πολιτική κοινότητα της Ελλάδας, ενώ συνάμα θα αποτελέσουν και ένα είδος ανατροφοδότησης για μελλοντική περαιτέρω έρευνα.

# Κεφάλαιο 3ο ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

*Επιλέγεται η ερευνητική προσέγγιση και αναλύεται η μέθοδος έρευνας με αναφορά στο παράδειγμα έρευνας, ώστε να αναδειχθούν οι βασικές αντιλήψεις για την οντολογία, την επιστημολογία και τη μεθοδολογία που διέπουν την έρευνα. Προσδιορίζονται οι συμμετέχοντες / δείγμα και αναλύονται τα χαρακτηριστικά τους. Αναπτύσσεται το ερευνητικό σχέδιο, όπου αναδεικνύεται η αλληλεπίδραση των μεταβλητών. Προσδιορίζονται τα ερευνητικά εργαλεία και αναλύονται ο σκοπός τους, η δόμησή τους, η εγκυρότητά τους με αναφορά στη θεωρητική βάση του ερευνητικού προβλήματος και η αξιοπιστία τους με τη χρήση στατιστικών μεθόδων. Τέλος, αναλύεται η διαδικασία συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων, όπου αναφέρονται οι τρόποι και τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην έρευνα, οι συνθήκες υλοποίησης αυτής με αναφορά στον κώδικα ηθικής και δεοντολογίας, ο οποίος αποτελεί τη βασικότερη προϋπόθεση όλων για τη νόμιμη, ομαλή, ασφαλή και αποδεκτή πραγμάτωση της έρευνας.*

### 3.1. Η ερευνητική προσέγγιση

Υιοθετήθηκε η ποσοτική ερευνητική προσέγγιση (Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016, σελ. 214· Mertens, 2009, σελ.37· Σαλβαράς, 2013α, σελ. 23), καθώς επιδίωξη ήταν να μελετηθούν σχέσεις συσχέτισης μεταξύ των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας συμβολικής επεξεργασίας μεγεθών και των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία, με περαιτέρω σκοπό τη διερεύνηση παραγόντων που ερμηνεύουν την εμφάνιση της διαταραχής. Η θεωρητική λογική της έρευνας θεμελιώνεται στο μεταθετικιστικό παράδειγμα, βασικές παραδοχές του οποίου είναι:

α. Η ύπαρξη μιας ενιαίας και σαφώς παρατηρήσιμης πραγματικότητας (ρεαλιστική οντολογία) (Σαλβαράς, 2013α, σελ.23). Κατά συνέπεια τα δομικά ελλείμματα της δυσαριθμησίας μπορούν να εξεταστούν, όπως αυτά εμφανίζονται μέσα στο φυσικό χώρο του σχολείου και να περιγραφούν[18] ρεαλιστικά και αντικειμενικά, μέσα όμως σε ένα φάσμα πιθανοτήτων (κριτικός ρεαλισμός) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 23). Σε αυτή τη βάση μπορούμε να δούμε τη δύναμη της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών πρόβλεψης (μη συμβολικών, συμβολικών ικανοτήτων και γνωστικών μηχανισμών) και της μεταβλητής κριτηρίου (δυσαριθμησία), ωστόσο οι υποθέσεις της έρευνας δεν μπορούν να επιβεβαιωθούν, αλλά να καταστούν απλά ισχυρότερες, διαγράφοντας «εναλλακτικές εξηγήσεις» (Mertens, 2009, σελ. 40). Σύμφωνα με τον Karl Popper (1968, σελ. 25), δε γνωρίζουμε τίποτε με τόση βεβαιότητα[19], ώστε να αποκλείσουμε την πιθανότητα αναθεώρησής του στο μέλλον και καμιά θεωρία δεν είναι επαληθεύσιμη, απλώς μπορεί να έχει υψηλό βαθμό εμπειρικής ενίσχυσης (corroboration).

β. Η σημαντικότητα της αντικειμενικότητας. Η αντικειμενικότητα, ως ετικέτα που υιοθετείται σε αυτού του τύπου την έρευνα, αναφέρεται στην ελαχιστοποίηση της προσωπικής ανάμειξης και της υποκειμενικής κρίσης του ερευνητή. Κατά συνέπεια για να μην υπονομευθεί η έννοια της αντικειμενικότητας

[18] Τα δομικά ελλείμματα της δυσαριθμησίας μεταφράστηκαν σε μεταβλητές οι οποίες είναι μετρήσιμες, και αναλύοντάς τες διατυπώθηκαν υποθέσεις για τους νόμους που διέπει το φαινόμενο, ακολουθώντας την υποθετικο-παραγωγική διαδικασία.

[19] Ποιες είναι οι καλύτερες πηγές της γνώσης μας – οι πιο αξιόπιστες, αυτές που δε θα μας οδηγήσουν στο λάθος, και στις οποίες μπορούμε και πρέπει να στραφούμε, σε περίπτωση αμφιβολίας, θεωρώντας τες ως το έσχατο δικαστήριο; Προτείνω αντί γι' αυτό, να σκεφτούμε ότι τέτοιες ιδεώδεις πηγές δεν υπάρχουν – όπως δεν υπάρχουν και ιδεώδεις ηγέτες – και ότι όλες οι πηγές έχουν την τάση να μας οδηγούν στο λάθος κάποιες φορές. Προτείνω, ως εκ τούτου, ν' αντικαταστήσουμε το ερώτημα για τις πηγές της γνώσης με ένα άλλο εντελώς διαφορετικό: Με τι τρόπο μπορούμε να ελπίσουμε στην ανίχνευση και εξάλειψη του λάθους.» Είναι σημαντικό ωστόσο να ειπωθεί ότι η εγκατάλειψη της ιδέας ότι η γνώση οικοδομείται πάνω σε μια αδιάσειστη θεμελιώδη αρχή δε σημαίνει ότι η παραδοσιακή έννοια της αλήθειας έχει εγκαταλειφθεί, αντιθέτως η αλήθεια είναι ένα ουσιώδες κανονιστικό πρότυπο. Μας προσφέρει δε αυτή την εξαίρετη εικόνα: Η ιδιότητα της αλήθειας υπό αντικειμενική έννοια, ως αντιστοιχίας προς τα γεγονότα, και ο ρόλος της ως κανονιστικής αρχής, μπορεί να συγκριθεί με την υψηλότερη κορυφή ενός βουνού που είναι συνεχώς, ή σχεδόν συνεχώς, τυλιγμένη στα σύννεφα. Ο ορειβάτης ίσως να μην έχει δυσκολίες να φτάσει εκεί, ίσως να μη γνωρίζει πότε θα φτάσει γιατί πιθανώς δεν μπορεί να ξεχωρίσει ανάμεσα στα σύννεφα την υψηλότερη κορυφή από κάποια άλλη χαμηλότερη. Αυτό, όμως, δεν επηρεάζει το γεγονός της αντικειμενικής ύπαρξης της υψηλότερης κορυφής. Η ιδέα του λάθους ή της αμφιβολίας υπονοεί την ιδέα μιας αντικειμενικής αλήθειας που ενδεχομένως δεν καταφέρνουμε να φτάσουμε.» (Popper, 1968, σελ. 226).

στην παρούσα έρευνα, η ερευνήτρια οφείλει να είναι απαλλαγμένη από προσωπικές προκαταλήψεις, έτσι ώστε η γνώση που θα παραχθεί να είναι ρεαλιστική και αντικειμενική, εφόσον ακολουθηθούν οι κατάλληλες διαδικασίες για την παραγωγή της (ρεαλιστική επιστημολογία) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 23).

γ. Παρομοίως, σε αυτό το πλαίσιο της έρευνας, επηρεάζεται και η μεθοδολογία που ακολουθείται για τον καθορισμό, την απομόνωση και το χειρισμό των μεταβλητών. Στο παρόν ερευνητικό σχέδιο απομονώθηκαν οι μεταβλητές, διαμορφώθηκαν υποθέσεις οι οποίες συνάχθηκαν παραγωγικά[20] (deductive) για τη σχέση των μεταβλητών από το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο, και στη συνέχεια ακολούθησε – μέσω της έρευνας - ο εμπειρικός έλεγχος (νομοθετική – πειραματική μεθοδολογία) των προδιατυπωμένων ερευνητικών υποθέσεων, τηρώντας τα κριτήρια της εγκυρότητας, της αξιοπιστίας και της αντιπροσωπευτικότητας (Creswell, 2016, σελ.42).

### 3.2. Η ερευνητική μέθοδος

Οι θεωρητικές και φιλοσοφικές προϋποθέσεις του μεταθετικισμού οδήγησαν στην επιλογή της αναλυτικής ή εμπειρικής ερευνητικής μεθόδου, σύμφωνα με την οποία οι υποθέσεις της έρευνας που θα επιβεβαιωθούν μέσα από τον εμπειρικό έλεγχο έχουν ισχύ θεωρίας (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 24).

Η αναλυτική ή εμπειρική μέθοδος στηρίζεται στον κριτικό ορθολογισμό του Popper (1968) (όπ. αναφ. στο Σαλβαράς, 2013α, σελ. 24), χρησιμοποιεί την υποθετικο-παραγωγική διαδικασία (οι υποθέσεις που συνάχθηκαν από το θεωρητικό πλαίσιο θα ελεγχθούν μέσα από τον εμπειρικό έλεγχο για διάψευση ή επιβεβαίωση αυτών) και

[20] Η παραγωγική ερευνητική προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα για μετάβαση από το «γενικό» στο «ειδικό».

το τριπολικό – γνωσιακό σχήμα, χρησιμοποιεί ως μέσα συγκέντρωσης δεδομένων τα τεστ, τα πρωτόκολλα αξιολόγησης, τις κλείδες παρατήρησης και διενεργεί έρευνες συσχετίσεων και πειραματικές.

Η παρούσα μελέτη είναι συσχετιστική ως προς τη φύση της με σκοπό τη μελέτη συσχετίσεων και προβλεπτικών σχέσεων (prediction research design) μεταξύ των μεταβλητών, στη βάση ενός πειραματικού σχεδιασμού. Οι μεταβλητές πρόβλεψης (predictor variable) είναι η ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης με τέσσερις υποκατηγορίες μεταβλητών (W οξύτητα ANS, R.T. W, Subitizing, και R.T. Subitizing), η ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας με δέκα υποκατηγορίες μεταβλητών (απαρίθμηση, χρόνος απόκρισης στην απαρίθμηση, σύγκριση μονοψήφιων, επίδραση απόστασης 1 αριθμού, επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων, σύγκριση διψήφιων, επίδραση απόστασης 1 ψηφίου, επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων, επίδραση μεγέθους, αντίστροφη καταμέτρηση στην αριθμογραμμή), η εργαζόμενη μνήμη με τρεις υποκατηγορίες μεταβλητών (μνήμη αριθμών, μνήμη λέξεων και οπτικοχωρική μνήμη) και οι επιτελικές λειτουργίες με τέσσερις υποκατηγορίες (προσοχή - ταχύτητα επεξεργασίας, αναστολή και χρόνος απόκρισης της αναστολής, γνωστική εναλλαγή). Την εξαρτημένη μεταβλητή ή μεταβλητή κριτηρίου (criterion variable) (Creswell, 2016, σελ. 340) ή αποτελέσματος, αποτελεί η μαθηματική ικανότητα στη δυσαριθμησία.

Στην ίδια λογική του μεταθετικιστικού παραδείγματος, ακολουθεί η πειραματική παρέμβαση ως έρευνα μεμονωμένης περίπτωσης[21] (Mertens, 2009, σελ. 259), χρησιμοποιώντας το τριπολικό – γνωσιακό σχήμα (εισροή – μαθησιακή συμπεριφορά – προϊόν) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 25) με τεστ επίδοσης, πρωτόκολλα αξιολόγησης,

[21] Πρόκειται για πειραματική έρευνα σε ένα μόνο πρόσωπο ή μια μικρή ομάδα ατόμων (Βλ. Mertens, 2009, σελ. 259).

κλείδες παρατήρησης, για να ελεγχθεί η σημειούμενη πρόοδος από τα χορηγούμενα τεστ με τη χρήση στατιστικής επεξεργασίας και τη σύγκριση πρωτοκόλλων. Ως ανεξάρτητη μεταβλητή στην πειραματική διαδικασία της παρέμβασης ορίζεται η παρέμβαση (μοντελοποίηση / σχηματοποίηση με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας) και εξαρτημένες η επίδοση στην εκτέλεση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, η ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης με τέσσερις υποκατηγορίες μεταβλητών, η ικανότητα συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας με δέκα υποκατηγορίες μεταβλητών και οι γνωστικές λειτουργίες με εξεταζόμενες την εργαζόμενη μνήμη με τρεις υποκατηγορίες μεταβλητών και τις επιτελικές λειτουργίες με τέσσερις υποκατηγορίες μεταβλητών.

### 3.3. Οι συμμετέχοντες / δείγμα της έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν 120 μαθητές ηλικίας 8-9 ετών (63 αγόρια, 57 κορίτσια, Μ.Η = 101,67 μήνες, Τ.Α. = 1,22), οι οποίοι επιλέχθηκαν από ένα σύνολο 2.179 μαθητών Τρίτης τάξης, 35 πολυθέσεων και εξαθέσιων Δημόσιων Δημοτικών Σχολείων του ν. Λάρισας, ύστερα από την έγγραφη συγκατάθεση των γονέων τους για τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Οι μαθητές ήταν άπταιστοι ομιλητές της ελληνικής γλώσσας, με φυσιολογική οπτική οξύτητα και χωρίς απώλεια ακοής. Τα παιδιά με ιστορικό άλλων νευροαναπτυξιακών διαταραχών όπως: ΔΕΠ-Υ, Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος, Δυσλεξία ή ιστορικό νευρολογικής ή ψυχιατρικής διαταραχής, αποκλείστηκαν από τη μελέτη.

Οι 120 μαθητές αξιολογήθηκαν με μία σειρά από διαγνωστικές δοκιμασίες προκειμένου να ενταχθούν σε μία από τις δύο παρακάτω ομάδες: α) μαθητές με δυσαριθμησία και β) μαθητές χωρίς δυσαριθμησία (τυπικοί μαθητές), σύμφωνα με συγκεκριμένα κριτήρια συμπερίληψης.

Βάσει των κριτηρίων συμπερίληψης, στις τελικές αναλύσεις της έρευνας, 60 μαθητές αποτέλεσαν την ομάδα μαθητών με δυσαριθμησία, (34 αγόρια, 26 κορίτσια Μ.Η = 101,53 μήνες, Τ.Α. = 1,17) και 60 μαθητές αποτέλεσαν την ομάδα τυπικών μαθητών χωρίς δυσαριθμησία (29 αγόρια, 31 κορίτσια Μ.Η = 101,8 μήνες, Τ.Α. = 1,25).

Για τον εντοπισμό των δύο ομάδων μαθητών (μαθητές με δυσαριθμησία, τυπικοί μαθητές) διεξήχθη ένας διαγνωστικός μαθηματικός έλεγχος αποτελούμενος από τρεις υποδοκιμές: υπολογισμός πράξεων, επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και αριθμητική ευχέρεια. Επίσης, διεξήχθη ένας έλεγχος τη μη λεκτικής νοημοσύνης με τις προοδευτικές μήτρες του Raven και έλεγχος της αναγνωστικής ικανότητας με το Τεστ Ανάγνωσης Τεστ-Α (Παντελιάδου, & Αντωνίου, 2007). Τα παιδιά με βαθμολογία στο τεστ μαθηματικών ικανοτήτων από το 10$^{ο}$ εκατοστημόριο και κάτω, μη λεκτική νοημοσύνη >85 (οι μαθητές έπρεπε να έχουν το απαιτούμενο επίπεδο της μη λεκτικής νοημοσύνης ως ένδειξη απουσίας γενικών νοητικών δυσλειτουργιών), και βαθμολογία στο τεστ αναγνωστικών ικανοτήτων από το 25ο εκατοστημόριο και πάνω και στους δύο δείκτες του τεστ, ταξινομήθηκαν στην ομάδα παιδιών με δυσαριθμησία.

Η ομάδα ελέγχου αποτελούνταν από τυπικούς μαθητές που βρίσκονταν στο 25$^{ο}$ – 75$^{ο}$ εκατοστημόριο της επίδοσης στο τεστ μαθηματικών, μη λεκτική νοημοσύνη >85 και από το 25ο εκατοστημόριο και πάνω και στους δύο δείκτες του τεστ αναγνωστικής ικανότητας. Τα κριτήρια ένταξης των παιδιών στις δύο ομάδες στηρίζονται στα κριτήρια που προτείνουν τα διεθνή συστήματα ταξινόμησης για την Ειδική Μαθησιακή Διαταραχή, η οποία συμπεριλαμβάνει τον προσδιοριστή της δυσαριθμησίας, (DSM – V, 2013) και στα κριτήρια που χρησιμοποίησαν οι Mazzocco και συνεργάτες (2011a), με εξαίρεση το τεστ μαθηματικών το οποίο δε είναι τυποποιημένο (οι ερευνητές χρησιμοποίησαν το Woodcock – Johnson Tests of Achievement – III), αλλά αυτοσχέδιο όπως παρομοίως έκαναν οι Mussolin και συν. (2010b), οι Rousselle και

Noël (2007) και οι Olsson και συν. (2016).

Μετά τον εντοπισμό των ομάδων της έρευνας έγιναν οι μετρήσεις στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στην επεξεργασία συμβολικών μεγεθών και στις γνωστικές λειτουργίες για τον εμπειρικό έλεγχο της πρώτης υπόθεσης της έρευνας.

Κατόπιν, ένα τυχαίο δείγμα 10 μαθητών, από την ομάδα των 60 μαθητών με δυσαριθμησία, χωρίσθηκε σε δύο ισοπληθείς ομάδες των πέντε ατόμων. Την πρώτη ομάδα αποτέλεσαν μαθητές με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση έναντι της δεύτερης ομάδας που συνιστούσε την ομάδα ελέγχου, στους μαθητές της οποίας δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση, για τον εμπειρικό έλεγχο της δεύτερης υπόθεσης της έρευνας.

Οι μαθητές του τυχαίου δείγματος των μαθητών που είχαν ταξινομηθεί στην ομάδα των 60 μαθητών με δυσαριθμησία επιλέγηκαν με συστηματική δειγματοληψία, καθώς το δειγματοληπτικό πλαίσιο ήταν διαθέσιμο σε μορφή αριθμημένης λίστας με αύξοντα αριθμό και μέγεθος $N = 60$. Κατά τη διαδικασία επιλογής, διαιρέσαμε το σύνολο των μαθητών του δειγματοληπτικού πλαισίου, δηλαδή το μέγεθος του πληθυσμού, με το μέγεθος του δείγματος $n = 5$ που θέλαμε για την κάθε ομάδα. Το αποτέλεσμα στρογγυλοποιημένο ήταν 11 ($N/n = 60/5 = 10{,}5$). Ξεκινήσαμε επιλέγοντας έναν αριθμό στο ένα και το έντεκα, έστω $χ = 6$ για την πειραματική ομάδα. Ο μαθητής με τον κωδικό 6 ήταν ο πρώτος μαθητής της πειραματικής ομάδας. Στη συνέχεια επιλέχθηκε ο μαθητής με τον αύξοντα αριθμό $χ + N/n = 17$ ($6 + 11 = 17$), μετά ο μαθητής με αριθμό $x + 2N/n = 28$, στη συνέχεια ο μαθητής με αριθμό $χ + 3N/n = 39$ και τελευταίος ο μαθητής με κωδικό $χ + 4N/n = 50$ ή $χ + (n\text{-}1)N/n$. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε για την ομάδα ελέγχου, επιλέγοντας έναν αριθμό από το ένα έως το έντεκα, έστω $χ = 2$. Ο μαθητής με τον κωδικό 2 ήταν ο πρώτος μαθητής της ομάδας ελέγχου. Στη συνέχεια επιλέχθηκε ο μαθητής με τον αύξοντα αριθμό $χ + N/n = 13$ (2+

11 = 13), μετά ο μαθητής με αριθμό x + 2N/n = 24, στη συνέχεια ο μαθητής με αριθμό χ + 3N/n = 35 και τελευταίος ο μαθητής με κωδικό χ + 4N/n = 46 ή χ + (n-1)N/n. Επομένως, βάσει αυτού του τύπου τους 5 μαθητές της πειραματικής ομάδας τους αποτέλεσαν οι μαθητές με τους κωδικούς 6, 17, 28, 39, 50 που μετονομάστηκαν σε κωδικούς 1, 2, 3, 4, 5 αντίστοιχα, για την εύκολη πρόσληψη των αποτελεσμάτων. Την ομάδα ελέγχου την αποτέλεσαν οι μαθητές με τους κωδικούς 2, 13, 24, 35, 46 που μετονομάστηκαν σε κωδικούς 6, 7, 8, 9, 10 αντίστοιχα, για τον ίδιο λόγο.

Η τυχαία δειγματοληψία σε αυτού του τύπου τον πειραματικό σχεδιασμό εγγυάται τον όσο δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό ισοδυναμίας των δύο ομάδων (Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016, σελ. 188), καθώς πρόκειται για πειραματικό σχέδιο μεμονωμένης περίπτωσης και συνίσταται στη σύγκριση δύο ισοδύναμων ομάδων με χρησιμοποίηση προελέγχου και μετελέγχου συγκρίσεις. Συγκεκριμένα, μετά τη δημιουργία των δύο ισοδύναμων ομάδων, δόθηκε η αρχική αξιολόγηση (προτέστ επίδοσης) και στις δύο ομάδες και ακολούθησε η πειραματική παρέμβαση διάρκειας 10 διδακτικών ωρών στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, μέσω των μοντελοποιήσεων/σχηματοποιήσεων αναπαράστασης των ποσοτήτων διαμεσολαβούμενη από τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, μόνο στην πειραματική ομάδα. Στην ομάδα ελέγχου δεν διενεργήθηκε καμία αλλαγή από τη συνήθη διδασκαλία. Στο τέλος της πειραματικής διαδικασίας δόθηκε η τελική αξιολόγηση (μετατέστ επίδοσης) και στις δύο ομάδες.

### 3.3.1. Κριτήρια συμπερίληψης

Τα κριτήρια που τέθηκαν για την επιλογή ολόκληρου του δείγματος περιλάμβαναν την απουσία νευροαναπτυξιακών διαταραχών όπως: ΔΕΠ-Υ, Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος, Δυσλεξία ή ιστορικό νευρολογικής ή ψυχιατρικής διαταραχής ή κάποιο αισθητηριακό ελάττωμα (π.χ. μειωμένη όραση η ακοή κ.ά.).

Η αξιολόγηση των μαθητών έγινε σύμφωνα με τα κριτήρια που προτείνουν τα διεθνή συστήματα ταξινόμησης για την Ειδική Μαθησιακή Διαταραχή, η οποία συμπεριλαμβάνει τη διαταραχή της δυσαριθμησίας, που κωδικοποιείται, σύμφωνα με την πέμπτη έκδοση του Αμερικάνικου Διαγνωστικού και Στατιστικού Εγχειριδίου για τις Ψυχιατρικές Διαταραχές (DSM – V, 2013, σελ 67), με τον προσδιοριστή 315.1 (F81.2) ως Ειδική Μαθηματική Διαταραχή ή/και εναλλακτικά δυσαριθμησία, με δυσκολίες στην «*αίσθηση των αριθμών*, στην *απομνημόνευση αριθμητικών δεδομένων*, στον *ακριβή ή ευχερή υπολογισμό* και στον *ακριβή μαθηματικό λογισμό*». Στην αναθεωρημένη έκδοση του DSM – V (2013, σελ 67), χρησιμοποιείται ο όρος δυσαριθμησία ώστε να είναι σύμφωνος με την επικρατούσα διεθνή βιβλιογραφία και παράλληλα να αποφεύγεται η σύγχυση που προέκυπτε από την ύπαρξη πολλαπλών ταυτόσημων ουσιαστικά όρων, όπως *αναπτυξιακή δυσαριθμησία, απουσία μαθηματικών ικανοτήτων* (acalculia), πριν την αναθεώρησή του. Οι άλλοι προσδιοριστές της ειδικής μαθησιακής διαταραχής είναι ο προσδιοριστής 315.00 (F81.0) με διαταραχή της ανάγνωσης ή/και εναλλακτικά δυσλεξία με δυσκολίες *«στην ανάγνωση λέξεων με ακρίβεια, στο ρυθμό της ανάγνωσης ή στην ευχέρεια του λόγου και στην κατανόηση του γραπτού λόγου»* και ο προσδιοριστής 315.2 (F81.81) με διαταραχή της γραπτής έκφρασης με δυσκολίες *«στην ακρίβεια συλλαβισμού, στην ακρίβεια στίξης και γραμματικής και στη σαφήνεια ή οργάνωση της γραπτής έκφρασης»*.

Τα κριτήρια που θα πρέπει να ισχύουν για να τεθεί η διάγνωση ευρύτερα της ειδικής μαθησιακής διαταραχής είναι τα εξής τέσσερα (DSM – V, 2013, σελ 66-67):

Α. Δυσκολίες μάθησης και χρήσης των ακαδημαϊκών δεξιοτήτων, όπως υποδεικνύεται από την παρουσία τουλάχιστον ***ενός*** από τα ακόλουθα συμπτώματα που έχουν παρατηρηθεί επίμονα για τουλάχιστον 6 μήνες, παρά τις παρεμβάσεις που στοχεύουν σε αυτές τις δυσκολίες:

1. Ανακριβής ή αργή και κοπιώδης ανάγνωση λέξεων (π.χ. διαβάζει μεμονωμένες λέξεις δυνατά λανθασμένα ή αργά και διστακτικά, συχνά μαντεύει λέξεις και έχει δυσκολία να καταλάβει ποιες λέξεις είναι).
2. Δυσκολία στο να κατανοήσει τη σημασία αυτού που διαβάζει (π.χ. μπορεί να διαβάζει το κείμενο με ακρίβεια αλλά να μην κατανοεί την αλληλουχία, τις σχέσεις, τα συμπεράσματα, ή τα βαθύτερα νοήματα αυτών που διαβάζονται).
3. Δυσκολίες στο συλλαβισμό (π.χ. μπορεί να προσθέσει, να παραλείψει ή να υποκαταστήσει σύμφωνα ή φωνήεντα).
4. Δυσκολίες στη γραπτή έκφραση (π.χ. κάνει πολλά γραμματικά λάθη ή λάθη στίξης εντός των προτάσεων, η οργάνωση των παραγράφων δεν είναι καλή και η γραπτή έκφραση των ιδεών στερείται σαφήνειας).
5. Δυσκολία στο να έχει επαρκή γνώση της αίσθησης των αριθμών, των αριθμητικών πράξεων ή του υπολογισμού (π.χ. έχει κακή κατανόηση των αριθμών, του μεγέθους και των σχέσεών τους· μετράει με τα δάχτυλα για να προσθέσει μονοψήφιους αριθμούς αντί να ανακαλεί τις μαθηματικές πράξεις όπως κάνουν οι συνομήλικοι, χάνεται στη μέση του αριθμητικού υπολογισμού και μπορεί να αλλάξει τις διαδικασίες).
6. Δυσκολίες με τη μαθηματική ικανότητα (π.χ. έχει σοβαρή δυσκολία εφαρμογής μαθηματικών εννοιών, πράξεων ή διαδικασιών για την επίλυση ποσοτικών προβλημάτων).

Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι από το κριτήριο Α, την έρευνα ενδιαφέρουν τα συμπεριφορικά συμπτώματα με τους αριθμούς Α5 - Α6, όπου αναφέρονται στις φτωχές αριθμητικές δεξιότητες των ατόμων με τη μαθηματική διαταραχή.

Β. Οι επηρεαζόμενες ακαδημαϊκές δεξιότητες είναι σημαντικά και ποσοτικά κατώτερες από αυτές που αναμένονται για τη χρονολογική ηλικία του ατόμου, και προκαλούν σημαντική παρεμβολή στην ακαδημαϊκή ή επαγγελματική επίδοση, ή σε δραστηριότητες της καθημερινής ζωής, όπως επιβεβαιώνεται από ατομικά χορηγούμενες σταθμισμένες μετρήσεις των επιτευγμάτων και ολοκληρωμένη κλινική αξιολόγηση.

Στο δεύτερο κριτήριο, για το χαμηλό ακαδημαϊκό επίτευγμα απαιτούνται χαμηλές βαθμολογίες σε μία ή περισσότερες τυποποιημένες δοκιμές ή υπο-δοκιμασίες σε ένα ακαδημαϊκό τομέα, τουλάχιστον 1,5 τυπικές αποκλίσεις κάτω από τον μέσο όρο του πληθυσμού για την ηλικία, που μεταφράζεται σε ένα κανονικό σκορ 78 ή λιγότερο, το οποίο είναι κάτω από το 7ο εκατοστημόριο, για τον μέγιστο διαγνωστικό έλεγχο. Ωστόσο, οι ακριβείς βαθμολογίες διαφέρουν ανάλογα με τις συγκεκριμένες τυποποιημένες δοκιμές που χρησιμοποιούνται. Με βάση την κλινική κρίση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα πιο ευνοϊκό όριο. Επιπλέον, δεδομένου ότι οι τυποποιημένες δοκιμές δεν είναι διαθέσιμες σε όλες τις γλώσσες, η διάγνωση μπορεί στη συνέχεια να βασίζεται εν μέρει στην κλινική κρίση των βαθμολογιών στα διαθέσιμα πειραματικά μέτρα και σε αξιολογικά τεστ με βάση το πρόγραμμα σπουδών (DSM – V, 2013, σελ 69):

Γ. Οι μαθησιακές δυσκολίες ξεκινούν κατά τα χρόνια της προσχολικής ηλικίας αλλά μπορεί να μην εκδηλωθούν πλήρως μέχρις ότου οι απαιτήσεις γι' αυτές τις επηρεαζόμενες ακαδημαϊκές δεξιότητες υπερβούν τις περιορισμένες ικανότητες του ατόμου (π.χ. όπως σε διαγωνίσματα με χρονικό όριο, ανάγνωση ή γραφή εκτενών πολύπλοκων εκθέσεων με αυστηρή προθεσμία ή υπερβολικά δύσκολες ακαδημαϊκές εργασίες).

Δ. Οι μαθησιακές δυσκολίες δεν εξηγούνται καλύτερα με Νοητική αδυναμία, Μη διορθωμένη Οπτική ή Ακουστική Οξύτητα, άλλες Ψυχικές ή Νευρολογικές Διαταραχές, Ψυχοκοινωνική Αντιξοότητα, έλλειψη επάρκειας στη γλώσσα της ακαδημαϊκής διδασκαλίας, ή ανεπαρκή εκπαιδευτική διδασκαλία.

Στο τέταρτο κριτήριο αναφέρεται ότι η διαταραχή σε έναν ή περισσότερους ακαδημαϊκούς τομείς, δεν οφείλεται σε διανοητική αναπηρία, σε προβλήματα ακοής ή διαταραχές της όρασης ή νευρολογικές ή κινητικές διαταραχές. Η συγκεκριμένη διαταραχή της μάθησης επηρεάζει τη μάθηση σε άτομα που διαφορετικά επιδεικνύουν φυσιολογικά επίπεδα πνευματικής λειτουργίας (που γενικά υπολογίζεται με βαθμολογία IQ μεγαλύτερη από 70 (±5 σημεία που επιτρέπουν το μετρούμενο σφάλμα). Η φράση απροσδόκητη ακαδημαϊκή υποτέλεια αναφέρεται συχνά ως καθοριστικό χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης διαταραχής της εκμάθησης, δεδομένου ότι οι ειδικές μαθησιακές δυσκολίες δεν αποτελούν μέρος μιας γενικότερης δυσκολίας μάθησης που εκδηλώνεται σε πνευματική αναπηρία (DSM – V, 2013, σελ 69).

Τέλος, στη συγκεκριμένη έκδοση του DSM – V (2013, σελ 70), αναφέρεται ότι η μαθησιακή δυσκολία μπορεί να περιοριστεί σε μια ακαδημαϊκή ικανότητα ή τομέα (π.χ. ανάκτηση ή υπολογισμός αριθμών) χωρίς τη συνοδή ύπαρξη απαραίτητα όλων των προσδιοριστών.

Βάσει όλων των παραπάνω, προκειμένου να συμπεριληφθεί ένας μαθητής στην ομάδα μαθητών με δυσαριθμησία, έπρεπε να εμφανίζει φυσιολογική νοημοσύνη και η επίδοσή του σε ένα τεστ μαθηματικών βασισμένο στο αναλυτικό πρόγραμμα, από τη στιγμή που δεν υπάρχει διαθέσιμο σταθμισμένο τεστ στα μαθηματικά, να είναι σημαντικά χαμηλότερη από τη μέση επίδοση μαθητών ίδιας χρονολογικής ηλικίας. Όσον αφορά τη νοημοσύνη, η μη λεκτική νοημοσύνη των μαθητών αξιολογήθηκε με την Κλίμακα Τυποποιημένων Προοδευτικών Μητρών του Raven. Ως χαμηλή επίδοση σε μία μαθηματική δοκιμασία, όπως προαναφέρθηκε θεωρείται αυτή που απέχει 1,5 τυπική απόκλιση από το μέσο όρο ή αλλιώς, όταν η μαθηματική ηλικία του μαθητή (όπως προκύπτει από τους πίνακες βαθμολόγησης της δοκιμασίας που του χορηγήθηκε) απέχει περισσότερο από 18 μήνες από τη χρονολογική του ηλικία, ενώ άλλοι ερευνητές, όπως Mazzocco και συνεργάτες (2011a), Mussolin και συν. (2010b), Rousselle και Noël (2007), και Olsson και συν. (2016), θέτοντας πιο αυστηρά κριτήρια, συμπεριέλαβαν στο δείγμα τους μαθητές που οι επιδόσεις τους βρίσκονταν στο 10$^{ο}$ εκατοστημόριο και κάτω. Προς αυτό τον σκοπό οι μαθητές αξιολογήθηκαν με αυτοσχέδιο τεστ μαθηματικών ικανοτήτων βάσει του οποίου, όσων μαθητών οι επιδόσεις βρίσκονταν στο 10$^{ο}$ εκατοστημόριο και κάτω, συμπεριλήφθηκαν στην ομάδα των μαθητών με δυσαριθμησία.

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός α) ότι ο προσδιοριστής της δυσαριθμησίας αποτελεί μια σχετικά νέα προσδιορισμένη διαταραχή, αφού μόλις κατά τις τελευταίες δεκαετίες στράφηκε το ενδιαφέρον των ερευνητών στη μελέτη των δυσκολιών που αφορούν αποκλειστικά στο μαθηματικό τομέα (Bugden, & Ansari, 2016· Libertus, Feigenson, Halberda, 2013· Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011a· Piazza et al., 2010· Skagerlund & Träff, 2014), καθώς για πολλά χρόνια οι επιστημονικές έρευνες για τις μαθησιακές δυσκολίες περιορίζονταν αποκλειστικά στις διαταραχές ανάγνωσης ή γραφής, με αποτέλεσμα οι δυσκολίες στα μαθηματικά να θεωρούνται δευτερογενείς συνέπειες των παραπάνω διαταραχών ή να μην αξιολογούνται καθόλου, β) ότι μια μαθησιακή δυσκολία μπορεί να περιοριστεί σε μια ακαδημαϊκή ικανότητα, όπως στα μαθηματικά χωρίς να σημαίνει απαραίτητα τη συνοδή εμπλοκή άλλων προσδιοριστών (π.χ. δυσλεξίας) και γ) το ενδιαφέρον της παρούσας μελέτης για την εύρεση δεικτών και προβλεπτών της διαταραχής της δυσαριθμησίας στα πλαίσια μιας ενιαίας διαδικασίας εντοπισμού – παρέμβασης στα μαθηματικά, τέθηκε το κριτήριο της απουσίας της δυσλεξίας (Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011a). Προς αυτό τον σκοπό, οι μαθητές αξιολογήθηκαν με το Τεστ Ανάγνωσης Τεστ-Α (Παντελιάδου, & Αντωνίου, 2007), το οποίο επιτρέπει τη σφαιρική αξιολόγηση της αναγνωστικής ικανότητας μαθητών δημοτικού και την ανίχνευση εκείνων που αντιμετωπίζουν σοβαρές αναγνωστικές δυσκολίες. Από τις συνολικά 10 δοκιμασίες του τεστ, χορηγήθηκαν τέσσερις δοκιμασίες, εκ των οποίων οι τρεις αφορούν την ικανότητα αποκωδικοποίησης και μία την αναγνωστική ευχέρεια. Από τις δοκιμασίες αυτές προκύπτει ένας δείκτης επίδοσης (τυπικός βαθμός) στην αποκωδικοποίηση και ένας στην ευχέρεια της ανάγνωσης. Όσοι μαθητές σημείωσαν επίδοση που τους τοποθετούσε στο χαμηλότερο 25$^{o}$ εκατοστημόριο συγκριτικά με τους συνομηλίκους τους σε έναν από τους δύο δείκτες, δεν συμπεριλήφθησαν στην ομάδα μαθητών με δυσαριθμησία.

Συνοπτικά τα διαγνωστικά κριτήρια που τέθηκαν για τους συμμετέχοντες στις δύο ομάδες παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1.

*Κριτήρια συμπερίληψης των συμμετεχόντων στην ομάδα μαθητών με δυσαριθμησία και στην ομάδα των τυπικών μαθητών*

| **Κριτήρια Συμπερίληψης** | **Δυσαριθμησία** | **Τυπικοί μαθητές** |
|---|---|---|
| Νευροαναπτυξιακές διαταραχές: ΔΕΠ-Υ, Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος, Δυσλεξία | Απουσία | Απουσία |
| Νευρολογική ή ψυχιατρική διαταραχή ή κάποιο αισθητηριακό ελάττωμα | Απουσία | Απουσία |
| Μαθηματική ικανότητα | ≤ 10$^{o}$ εκατοστημόριο | ≥ 25$^{o}$ και ≤ 75$^{o}$ εκατοστημόριο |
| Μη λεκτική νοημοσύνη | Τυπική νοημοσύνη<br>> 16$^{o}$ εκατοστημόριο και < 75$^{o}$<br>ή<br>> 85 Τυπικό βαθμό και < 110 | Τυπική νοημοσύνη<br>> 16$^{o}$ εκατοστημόριο και < 75$^{o}$<br>ή<br>> 85 Τυπικό βαθμό και < 110 |
| Αναγνωστική ικανότητα<br>α) Αποκωδικοποίηση<br>β) Ευχέρεια | α) ≥ 25$^{o}$ εκατοστημόριο<br>β) ≥ 25$^{o}$ εκατοστημόριο | α) ≥ 25$^{o}$ εκατοστημόριο<br>β) ≥ 25$^{o}$ εκατοστημόριο |

### 3.4. Το ερευνητικό σχέδιο

Το ερευνητικό σχέδιό μας περιλαμβάνει δύο φάσεις.

<u>Πρώτη φάση</u>: Προσδιορισμός αιτιολογίας της δυσαριθμησίας.

| Συγκρότηση δείγματος της έρευνας | → | <u>Μετρήσεις μεταβλητών</u><br>- Μη συμβολική αριθμητική διάκριση<br>- Συμβολική αριθμητική επεξεργασία<br>- Γνωστικές λειτουργίες | → | <u>Συσχετίσεις μεταβλητών</u> | → | <u>Δείκτες και προβλεπτές</u><br>Προσδιορισμός της αιτιολογίας της δυσαριθμησίας<br>= κατασκευή γνωστικού προφίλ |
|---|---|---|---|---|---|---|

<u>Δεύτερη φάση</u>: Διαμόρφωση μαθησιακών συνθηκών για την αντιμετώπιση της δυσαριθμησίας.

<u>Έρευνα μεμονωμένης περίπτωσης</u>

<u>Πειραματική ομάδα</u>

| Προτέστ | | Μετατέστ |
|---|---|---|
| | Σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας | |

| Γνωστικό προφίλ μαθητών με δυσαριθμησία: ελλείψεις στην αναπαράσταση, κωδικοποίηση | - Τεστ εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης<br>- Σύνταξη πρωτοκόλλου αξιολόγησης | 5 διδακτικές παρεμβάσεις για την καθεμιά αριθμητική πράξη πρόσθεσης και αφαίρεσης | - Τεστ εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης<br>- Σύνταξη πρωτοκόλλου αξιολόγησης<br>- Έλεγχος προόδου με βάση τη σύγκριση των πρωτοκόλλων και της στατιστικής επεξεργασίας |
|---|---|---|---|

<u>Ομάδα ελέγχου</u>

| Προτέστ | | Μετατέστ |
|---|---|---|
| | Συνήθη διδασκαλία<br>(Χωρίς πειραματική παρέμβαση) | |

Η πρώτη φάση του ερευνητικού σχεδίου ελέγχει την πρώτη υπόθεση της έρευνας και η δεύτερη φάση ελέγχει τη δεύτερη υπόθεση της έρευνας. Και οι δύο φάσεις συνυφαίνονται ως δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Η πρώτη φάση χρησιμοποιεί την έρευνα συσχετίσεων και η δεύτερη φάση οργανώνεται με βάση το τριπολικό – γνωσιακό σχήμα και ελέγχει τη σημειούμενη πρόοδο από το προτέστ – μετατέστ στην πειραματική ομάδα, τη σύγκριση των πρωτοκόλλων αξιολόγησης και την ύπαρξη τυχόν στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των δύο ομάδων στα τεστ εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων προ και μετά παρέμβασης (Mertens, 2009). Τα τεστ εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης – από το πριν στο μετά – δεν παρουσιάζουν απόκλιση στους δείκτες ευκολίας / δυσκολίας και διακριτικής ικανότητας των ασκήσεων (Σαλβαράς, 2013α).

### 3.5. Τα ερευνητικά εργαλεία

*Τα ερευνητικά εργαλεία είναι όργανα μέτρησης, παρατήρησης και τεκμηρίωσης ποσοτικών δεδομένων των μεταβλητών της έρευνας, και σε αυτή τη μορφή της εμπειρικής έρευνας προκαθορίζονται πριν τη συγκέντρωση των δεδομένων. Στόχος τους ήταν να μετρήσουν την επίδοση (performance measures)* (Creswell, 2016, σελ. 153)*, να αξιολογήσουν την ατομική ικανότητα και να καταγράψουν παρατηρήσεις για τη μαθηματική συμπεριφορά. Αυτά περιλαμβάνουν τεστ μαθηματικής επίδοσης, στο οποίο η βαθμολογία του μαθητή αποτελεί μια μέτρηση του πόσο καλά τα πήγε σε σύγκριση με μια μεγάλη ομάδα παιδιών, στα οποία εφαρμόστηκε, τεστ κριτηρίων στο οποίο η βαθμολογία του παιδιού αποτελεί μια μέτρηση του πόσο καλά τα πήγε σε σύγκριση με ένα κριτήριο ή μια τιμή, τεστ νοημοσύνης που μετρά τη νοητική ικανότητα του ατόμου, τεστ ικανότητας που μετρά την ικανότητα ενός παιδιού σύμφωνα με την απόδοση που έχει επιτύχει τη χρονική στιγμή που δίνεται το τεστ και παρατηρήσεις ατομικής μαθηματικής συμπεριφοράς. Ειδικότερα τα εργαλεία της έρευνας σκοπό είχαν να ανιχνεύσουν τους συμμετέ-*

*χοντες, να μετρήσουν την ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, την ικανότητα της επεξεργασίας συμβολικών ποσοτήτων, την ικανότητα των γνωστικών λειτουργιών και τη σημειούμενη πρόοδο των μαθητών όπως προέκυψε από την πειραματική παρέμβαση.*

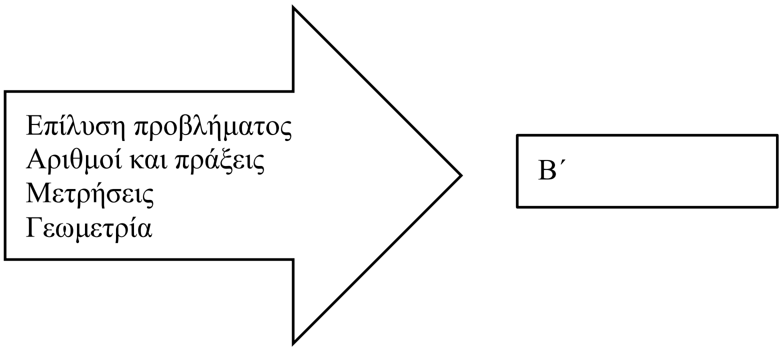
### 3.5.1. Δοκιμασίες ανίχνευσης των συμμετεχόντων

#### 3.5.1.1. Τεστ μαθηματικής επίδοσης

Σκοπός του τεστ ήταν ο διαγνωστικός εντοπισμός των παιδιών που βρίσκονται κάτω από το $10^{o}$ εκατοστημόριο, της μαθηματικής επίδοσης σε αυτό, ώστε να ταξινομηθούν στην ομάδα παιδιών με δυσαριθμησία και της ομάδας ελέγχου αποτελούμενη από τυπικούς μαθητές που βρίσκονται στο $25^{o}$ – $75^{o}$ εκατοστημόριο της επίδοσης στο τεστ μαθηματικών.

Το τεστ αναπτύχθηκε από την ερευνήτρια με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Δευτέρας τάξης, αλλά και της διδαχθείσας ύλης του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ τάξης, και αυτό γιατί ένα μη τυποποιημένο τεστ θα πρέπει να διαθέτει αντιπροσωπευτικότητα ή οικολογική εγκυρότητα, δηλαδή να αφορά τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που γνωρίζουν οι μαθητές, καθώς το τεστ δόθηκε σε μαθητές της Τρίτης τάξης του Δημοτικού. Αυτό σημαίνει πως για να είναι αντιπροσωπευτικό, θα πρέπει να περιλαμβάνει ασκήσεις από τους τομείς των μαθηματικών που έχουν διδαχτεί οι μαθητές βάσει του Αναλυτικού Προγράμματος και της διδαχθείσας ύλης του σχολείου.

Οι άξονες του διδακτικού περιεχομένου του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών πάνω στους οποίους δομείται και αναπτύσσεται η διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό είναι επτά. Από αυτούς οι τέσσερις πρώτοι όπως: Επίλυση προβλήματος, Αριθμοί και πράξεις, Μετρήσεις, Γεωμετρία, αποτελούν τις τέσσερις γενικές ενότητες που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη της Β΄ τάξης (Βλ. Σχήμα 3.1.).




*Σχήμα 3.1. Οι άξονες του διδακτικού περιεχομένου της Β΄ τάξης του Δημοτικού.*

Σε κάθε άξονα υπάρχουν γενικοί στόχοι οι οποίοι παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

| Τάξη Β΄ | Άξονες γνωστικού περιεχομένου | Γενικοί στόχοι |
|---|---|---|
| | Επίλυση προβλημάτων | Να ερευνούν προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής.<br>Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις.<br>Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του.<br>Να διατυπώνουν τις σκέψεις τους πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος.<br>Να αυτοαξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία. |
| | Αριθμοί και πράξεις | Να απαγγέλλουν, να διαβάζουν και να διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1000.<br>Να εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμούς που δεν ξεπερνούν το 100.<br>Να χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό.<br>Να κατανοούν την έννοια του διαμοιρασμού. |
| | Μετρήσεις | Να εφαρμόζουν τη διαδικασία μέτρησης μήκους και επιφανειών με συμβατικές και αυθαίρετες μονάδες μέτρησης.<br>Να εξασκούνται στη μέτρηση χρόνου, χρήματος και μάζας.<br>Να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα. |

| | | |
|---|---|---|
| | Γεωμετρία | Να εξασκούνται στη σχεδίαση και αναπαραγωγή σχημάτων και να αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών. |

Το τεστ απαρτιζόταν από τρεις υποδοκιμές χρονομετρημένες, στα πλαίσια των οποίων έγινε προσπάθεια να αντιπροσωπευθούν επαρκώς οι επιμέρους τέσσερις άξονες του Α. Π. της Β΄ τάξης, και έχουν ως εξής: α) υπολογισμός πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, β) επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και γ) αριθμητική ευχέρεια (Βλ. Παράρτημα 1, σελ. 350-353).

**α) Δοκιμασία υπολογισμών πρόσθεσης και αφαίρεσης**

Ο στόχος ήταν να επιλυθούν δώδεκα οριζόντια δοσμένες ασκήσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, με όποιο τρόπο θέλουν οι μαθητές (οριζόντια ή κάθετα ή νοερά) (8+9+7, 36+13, 18+37, 25+62+6, 20+34+29, 27+34+29, 28-6, 48-27, 60-39, 92-15, 100-6, 100-62) κατά τη διάρκεια 10΄ λεπτών. Τα παιδιά έπρεπε να απαντήσουν γραπτώς σε αραβική μορφή. Η δοκιμή σχεδιάστηκε με αύξουσα σειρά δυσκολίας στις προσθέσεις και στις αφαιρέσεις με έξι ασκήσεις να περιλαμβάνουν ανασυγκρότηση (δηλαδή μεταφορά κρατούμενου ή δανεισμό). Η ελάχιστη βαθμολογία της δοκιμασίας ήταν το μηδέν και η μέγιστη το 36, καθώς κάθε άσκηση βαθμολογούνταν με τρεις βαθμούς.

**β) Δοκιμασία επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων**

Τα παιδιά έλαβαν την οδηγία να λύσουν 10 αριθμητικά προβλήματα μέσα σε 15΄ λεπτά. Τα προβλήματα δημιουργήθηκαν με ελάχιστες απαιτήσεις ανάγνωσης, αποτελούμενα από δύο έως τρεις προτάσεις χωρίς άσχετες πληροφορίες, κάνοντας την αναγνωστική προσπέλαση πιο εύκολη. Η δοκιμή σχεδιάστηκε έτσι ώστε τα προβλήματα να γίνονται όλο και πιο δύσκολα. Η ελάχιστη βαθμολογία της δοκιμασίας ήταν το μηδέν και η μέγιστη το 30, καθώς το κάθε πρόβλημα επίλυσης βαθμολογούνταν με τρεις βαθμούς.

**γ) Δοκιμασία αριθμητικής ευχέρειας στην πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό (ταχύτητα απλών υπολογισμών σε 3΄ λεπτά)**

Τα παιδιά έλαβαν την οδηγία να λύσουν όσο το δυνατόν περισσότερες μονοψήφιες προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς κατά τη διάρκεια 3΄ λεπτών. Η δοκιμή συμπεριελάμβανε 34 πράξεις σε τρεις κάθετες στήλες και η βαθμολογία της κάθε άσκησης ήταν ένας βαθμός. Η ελάχιστη βαθμολογία της δοκιμασίας ήταν το μηδέν και η μέγιστη το 34.

Οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν γραπτώς και στις τρεις υποδοκιμές. Η ελάχιστη βαθμολογία συνολικά του τεστ ήταν το μηδέν και η μέγιστη το 100.

Ένα από τα μεγαλύτερα ζητήματα της επιστημονικής έρευνας αποτελεί το ζήτημα της διασφάλισης της αξιοπιστίας και της εγκυρότητας της εκάστοτε έρευνας, τόσο κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής της όσο και στο στάδιο της διαχείρισης των μεθοδολογικών εργαλείων, καθώς επίσης και κατά τη συγκέντρωση και ανάλυση των αποτελεσμάτων. Έτσι, λοιπόν, σε ό,τι αφορά, πιο συγκεκριμένα, την εγκυρότητα και αξιοπιστία της έρευνας και των εργαλείων έρευνας, σήμερα τόσο στην εγχώρια όσο και στη διεθνή βιβλιογραφία γίνεται αναφορά σε τρία κύρια είδη εγκυρότητας, ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης. Τα τρία αυτά είδη εγκυρότητας, είναι η εγκυρότητα σχετικά με το περιεχόμενό του (content related validity), η εγκυρότητα βάσει κριτηρίου (criterion related validity) και η εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής (construct validity) (Ζαφειρόπουλος, 2012· Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016).

Η εγκυρότητα του τεστ μαθηματικής επίδοσης των μαθητών εξασφαλίζεται με την ανάλυση έργου του Αναλυτικού Προγράμματος. Με την ανάλυση αναδεικνύονται οι ενότητες γνώσης, οι στόχοι δεξιότητες, οι μορφές εμφάνισης των στόχων επίδοσης και προσδιορίζονται οι ασκήσεις του τεστ επίδοσης των μαθητών. Πρόκειται για εγκυρότητα περιεχομένου (Σαλβαράς, 2013β, σελ. 386), η οποία αναφέρεται στον βαθμό που οι ασκήσεις του τεστ επίδοσης αντιπροσωπεύουν και τις τέσσερις ενότητες του Α. Π. της Β΄ τάξης (Π. Ι. σελ. 51-63) και προς αυτό τον σκοπό σχεδιάστηκε η Μήτρα κατασκευής του συγκεκριμένου τεστ (Πίνακας 3.2.)

Πίνακας 3.2.

*Μήτρα του τεστ μαθηματικής επίδοσης μαθητών*

| **Ενότητες γνώσης** | **Στόχοι - δεξιότητες του Α.Π.** | **Μορφές εμφάνισης στόχων** | **Ασκήσεις** | **Ασκήσεις /Επίδοση** |
|---|---|---|---|---|
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν μονοψήφιες προσθέσεις γραπτά ή νοερά | εφαρμογή | 1 | 3 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν διψήφιες προσθέσεις χωρίς κρατούμενο γραπτά ή νοερά | εφαρμογή | 2 | 3 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν διψήφιες προσθέσεις με κρατούμενο | εφαρμογή | 3 | 3 |
| Υπολογισμοί / Στρατηγικές γραπτών ή νοερών υπολογισμών | Να προσθέτουν διαδοχικά τρεις αριθμούς, διψήφιους και μονοψήφιους νοερά και να ελέγχουν με οριζόντιες ή κάθετες πράξεις | εφαρμογή | 4 | 3 |
| Υπολογισμοί / Στρατηγικές γραπτών ή νοερών υπολογισμών | Να εκτελούν διαδοχικά προσθέσεις με τρεις διψήφιους αριθμούς, όπου οι μονάδες αυτών ξεπερνούν τη δεκάδα. | εφαρμογή | 5, 6 | 6 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν αφαίρεση διψήφιου μειωτέου και μονοψήφιο αφαιρετέο χωρίς δανεικό | εφαρμογή | 7 | 3 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν αφαίρεση με διψήφιο μειωτέο και διψήφιο αφαιρετέο χωρίς δανεικό. | εφαρμογή | 8 | 3 |
| Υπολογισμοί | Να υπολογίζουν διψήφια αφαίρεση με δανεικό. | εφαρμογή | 9,10 | 6 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν αφαιρέσεις με μειωτέο το 100 και μονοψήφιο αφαιρετέο, με δανεικό. | εφαρμογή | 11 | 3 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν αφαιρέσεις με μειωτέο το 100 και διψήφιο αφαιρετέο, με | εφαρμογή | 12 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | δανεικό. | | | |
| Επίλυση προβλήματος | Να εκτελούν πρόβλημα αφαίρεσης με δανεικό | κατανόηση, εφαρμογή | 13 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος | Να εκτελούν σύνθετο πρόβλημα πρόσθεσης και αφαίρεσης | κατανόηση, ανάλυση, εφαρμογή | 14 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Υπολογισμοί | Να γνωρίζουν τα κέρματα του € και να υπολογίζουν την αξία 2 ή περισσοτέρων κερμάτων του € | κατανόηση, ανάλυση, εφαρμογή | 15 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Μετρήσεις | Να γνωρίζουν τα χαρτονομίσματα του €, να λύνουν προβλήματα και να βρίσκουν ρέστα από χαρτονόμισμα των 50 € | κατανόηση, ανάλυση, εφαρμογή | 16 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Μετρήσεις | Να εκτελούν σύνθετο πρόβλημα πρόσθεσης και αφαίρεσης με €. | κατανόηση, παραγωγή, ανάλυση, εφαρμογή | 17 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος | Να κατανοούν την έννοια του διαμοιρασμού και να χρησιμοποιούν την προπαίδεια για να λύσουν ένα πρόβλημα διαμοιρασμού. | κατανόηση, παραγωγή, ανάλυση, εφαρμογή | 18 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Μετρήσεις | Να διατάσσουν αριθμούς άνω των 100, μέσα από επίλυση προβλήματος. | κατανόηση, παραγωγή, ανάλυση, εφαρμογή | 19 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Μετρήσεις | Να γράφουν με ψηφία την ώρα ακριβώς ή «και μισή» και να υπολογίζουν χρονικές διάρκειες. | κατανόηση, εφαρμογή | 20 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Μετρήσεις | Να βρίσκουν τον κανόνα από ένα αριθμητικό μοτίβο και να το συμπληρώνουν. | κατανόηση, εφαρμογή | 21 | 3 |
| Επίλυση προβλήματος / Γεωμετρία | Να ονομάζουν γεωμετρικά σχήματα. | κατανόηση, εφαρμογή | 22 | 3 |
| Υπολογισμοί | Να εκτελούν μονοψήφιους αριθμητικούς συνδυασμούς πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού γρήγορα | εφαρμογή | 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, | 34 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 53, 54, 55, 56 | |

Πέραν τούτων, ένα νεοσύστατο αυτοσχέδιο τεστ μαθηματικής επίδοσης πρέπει να δύναται να συγκριθεί ως προς τα αποτελέσματά του με κάποιο προϋπάρχον, το οποίο μετράει το ίδιο χαρακτηριστικό και είναι καθιερωμένο στον επιστημονικό τομέα αναφοράς, δηλαδή έχει ήδη ελεγχτεί ως προς την αξιοπιστία και την εγκυρότητα του, αποτελώντας, τοιουτοτρόπως, σημείο αναφοράς. Πρόκειται για εγκυρότητα βάσει κριτηρίου. Το κριτήριο αποτέλεσε η *Ανιχνευτική Δοκιμασία Μαθηματικής Επίδοσης* (ΑΔΜΕ) των Παπαϊωάννου, Μουζάκη, Σιδερίδη και Σίμο (2008) και η σύγκρισή του με το τεστ μαθηματικής επίδοσης επέτρεψε την αξιολόγηση της συγκλίνουσας ή συντρέχουσας εγκυρότητας. Το συγκεκριμένο όργανο είχε δείκτη αξιοπιστίας άνω του 0,7 σε προηγούμενες ερευνητικές προσπάθειες. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του τεστ που χρησιμοποιήθηκε με το τεστ μαθηματικής ικανότητας, προέκυψε υψηλή συνάφεια άνω του 95%, με τα αποτελέσματα να μη διαφέρουν στατιστικά μεταξύ τους.

Ένα όργανο μέτρησης ταυτοχρόνως θα πρέπει να διαθέτει υψηλού βαθμού αξιοπιστία (reliability), δηλαδή να εμφανίζει σταθερότητα (το ίδιο αποτέλεσμα περίπου) σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, να έχει συνοχή και ομοιογένεια και να είναι απαλλαγμένο από το τυχαίο σφάλμα (Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016, σελ. 151-154).

Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μπορεί να υπολογιστεί και από δεδομένα ενός οργάνου μέτρησης που δίνεται μία φορά σε μια ομάδα ατόμων με τη μέθοδο της διχοτόμησης (split half reliability). Σε αυτήν την περίπτωση οι ασκήσεις χωρίζονται σε δύο ομάδες (ασκήσεις με μονό και ζυγό αριθμό), ώστε να υπολογιστεί ο βαθμός εσωτερικής συνέπειας των αποτελεσμάτων. Η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος υπολογισμού της εσωτερικής συνέπειας είναι ο συντελεστής α του Cronbach με αποδεκτή τιμή αξιοπιστίας > 0,7 (Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016, σελ. 151-154).

Στην παρούσα εμπειρική έρευνα, για την αξιολόγηση της ύπαρξης εσωτερικής συνέπειας, δηλαδή της ύπαρξης μικρών μεγεθών στατιστικού σφάλματος, εφαρμόστηκε ο δείκτης άλφα του Cronbach, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\alpha = \frac{N\, x\, \overline{r}}{1 + (N - 1)\, x\, \overline{r}}$$

ο οποίος υπολογίζεται από το γινόμενο του αριθμού των μερών του τεστ (ασκήσεις) με τον μέσο όρο της συσχέτισης των μερών αυτών. Στο σύνολό του το τεστ είχε δείκτη άλφα ίσο με 0,901 (Βλ. Πίνακα 3.3.) όταν αποδεκτές τιμές, όπως έχει προαναφερθεί είναι της τάξης του 0,70 και μεγαλύτερες. Στις επιμέρους υποδοκιμές, είχε δείκτες εσωτερικής συνέπειας ίσους με 0,898, 0,854 και 0,893. Τέλος, ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,872 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,863 (Βλ. Πίνακα 3.4.)

Πίνακας 3.3.

*Δείκτης άλφα του Cronbach*

| Reliability Statistics | | |
|---|---|---|
| Cronbach's Alpha | Cronbach's Alpha Based on Standardized Items | N of Items |
| ,901 | 1,181 | 56 |

Πίνακας 3.4.

*Δείκτης ισοδυναμίας του Guttman*

| Reliability Statistics | | | |
|---|---|---|---|
| Cronbach's Alpha | Part 1 | Value | ,719 |
| | | N of Items | 28 |
| | Part 2 | Value | ,352 |
| | | N of Items | 28 |
| | Total N of Items | | 56 |
| Correlation Between Forms | | | ,863 |
| Spearman-Brown Coefficient | Equal Length | | ,926 |
| | Unequal Length | | ,926 |
| Guttman Split-Half Coefficient | | | ,872 |

### 3.5.1.2. Δοκιμασία μη λεκτικής νοημοσύνης

Για τη δοκιμασία τη μη λεκτικής νοημοσύνης δόθηκαν οι Έγχρωμες Προοδευτικές Μήτρες (Coloured Progressive Matrices-CPM) (Βλ. Παράρτημα 19, σελ. 443-445) της ελληνικής σταθμισμένης έκδοσης του Raven's Educational (Raven's Educational, 2015). Το Raven's Educational: CPM/CVS αναπτύχθηκε για την αξιολόγηση της γενικής νοητικής ικανότητας παιδιών ηλικίας 4 έως 11 ετών. Εξαιτίας του μεγάλου δείγματος των μαθητών επιλέχθηκε η χορήγησή του Raven, γιατί είναι ένα τεστ που μπορεί να δοθεί τόσο ατομικά όσο και ομαδικά με μικρό χρονικό όριο συμπλήρωσης. Η διάρκεια χορήγησης των Έγχρωμων Προοδευτικών Μητρών είναι 15΄-20΄. Ένα ακόμη πλεονέκτημά του είναι ότι έχει ελάχιστο λεκτικό περιεχόμενο και η εκτέλεσή του εξαρτάται λιγότερο από μορφωτικούς και εκπαιδευτικούς παράγοντες σε σύγκριση με πολλά άλλα τεστ νοημοσύνης.

Ειδικότερα, το τεστ αποτελείται από τρεις υποκλίμακες: την υποκλίμακα Α, την υποκλίμακα $A_B$ και την υποκλίμακα Β. Κάθε υποκλίμακα αποτελείται από 12 μήτρες ή σχέδια, στο καθένα από τα οποία λείπει ένα μέρος. Ο μαθητής επιλέγει το μέρος που λείπει μεταξύ 6 εναλλακτικών επιλογών, εκ των οποίων μόνο το ένα είναι το σωστό. Τα σχέδια που παρουσιάζονται σε κάθε υποκλίμακα είναι ιεραρχημένα κατά σειρά δυσκολίας και κάθε ομάδα σχεδίων απαιτεί την εξαγωγή ενός διαφορετικού κανόνα ή ακολουθίας για την ορθή συμπλήρωση τους.

Η βαθμολόγηση του τεστ αρχικά περιλαμβάνει τη μέτρηση των σωστών απαντήσεων στο σύνολο των 36 δοκιμασιών (ένας βαθμός για κάθε σωστή απάντηση). Στη συνέχεια, συνάγεται η εκατοστιαία θέση της νοητικής ικανότητας του παιδιού σε συνάρτηση με τη χρονολογική του ηλικία και κατατάσσεται στην αντίστοιχη εκατοστιαία θέση βάσει των σχετικών πινάκων του εγχειριδίου. Όσοι μαθητές σημείωσαν επίδοση που τους τοποθετούσε κάτω από την 16η εκατοστιαία θέση και υψηλότερα της 75ης αποκλείστηκαν από το τελικό δείγμα των συμμετεχόντων στην παρούσα έρευνα.

### 3.5.1.3. Δοκιμασία αναγνωστικής ικανότητας - Τεστ-Α

Για την αξιολόγηση της αναγνωστικής ικανότητας δόθηκε το σταθμισμένο τεστ Τεστ-Α (Παντελιάδου, & Αντωνίου, 2007), http://www.dyskolies.gr/index.php/aks/11-aksiologisi/54-erg8. Το Τεστ-Α αποτελεί ένα ολοκληρωμένο εργαλείο αξιολόγησης της αναγνωστικής ικανότητας μαθητών δημοτικού και αποτελεί μέρος του έργου «Κατασκευή και Στάθμιση 12 Διερευνητικών-Ανιχνευτικών Εργαλείων (Κριτηρίων) των Μαθησιακών Δυσκολιών» του Επιχειρησιακού Προγράμματος Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης (ΕΠΕΑΕΚ, Μέτρο 1.1 – Ενέργεια 1.1.3 – Κατηγορία Πράξεων 1.1.3.α) του ΥΠΕΠΘ.

Αποτελείται από μία συστοιχία δέκα δοκιμασιών που εξετάζουν την αποκωδικοποίηση, την ευχέρεια ανάγνωσης και την αναγνωστική κατανόηση. Επίσης, περιλαμβάνει ασκήσεις μορφολογίας και σύνταξης που σχετίζονται με την ικανότητα της ανάγνωσης. Για το σκοπό της παρούσας έρευνας χορηγήθηκαν τέσσερις δοκιμασίες, εκ των οποίων οι τρεις αξιολογούν την ικανότητα αποκωδικοποίησης μέσω της α) Ανάγνωσης Ψευδολέξεων, β) της Ανάγνωσης Πραγματικών Λέξεων, γ) της Διάκρισης Πραγματικών Λέξεων και Ψευδολέξεων και η τέταρτη την αναγνωστική ευχέρεια. Η επίδοση κάθε μαθητή υπολογίστηκε μετατρέποντας τους αρχικούς βαθμούς κάθε δοκιμασίας σε τυπικούς βαθμούς/εκατοστιαίες θέσεις που εκφράζουν τη θέση του μαθητή σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές της ίδιας τάξης.

α. Ανάγνωση Ψευδολέξεων

Η δοκιμασία περιλαμβάνει 24 ψευδολέξεις, δύο έως έξι συλλαβών, (π.χ. *τεπό, ηκοισελακώτων*) που παρατίθενται σε τρεις στήλες και προκειμένου να διαβαστούν σωστά απαιτείται η χρήση φωνολογικής στρατηγικής. Κάθε σωστή ανάγνωση βαθμολογείται με μία μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση με μηδέν μονάδες. Οι λέξεις που διαβάστηκαν σωστά μετά από αυτοδιόρθωση βαθμολογούνται με μία μονάδα, ενώ τα λάθη τονισμού ή λέξεις που ο μαθητής χρειάστηκε περισσότερα από τρία δευτερόλεπτα για να τις διαβάσει βαθμολογούνται με μηδέν. Η χορήγηση της δοκιμασίας σταματά όταν ο μαθητής έχει κάνει αναγνωστικά λάθη σε πέντε διαδοχικές λέξεις.

β. Ανάγνωση Πραγματικών Λέξεων

Η δοκιμασία περιλαμβάνει 53 λέξεις, δύο έως οκτώ συλλαβών, (π.χ. *ρύζι, εγγειοβελτιωτικός*) που παρατίθενται σε εφτά στήλες και προκειμένου να διαβαστούν σωστά απαιτείται γραφοφωνολογική ενημερότητα. Κάθε σωστή ανάγνωση βαθμολογείται με μία μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση με μηδέν μονάδες. Με μία μονάδα βαθμολογούνται οι λέξεις που διαβάστηκαν σωστά μετά από αυτοδιόρθωση, ενώ τα λάθη τονισμού ή οι λέξεις που ο μαθητής χρειάστηκε περισσότερα από τρία δευτερόλεπτα για να τις διαβάσει βαθμολογούνται με μηδέν. Η χορήγηση της δοκιμασίας σταματά όταν ο μαθητής έχει κάνει αναγνωστικά λάθη σε πέντε διαδοχικές λέξεις.

γ. Διάκριση Πραγματικών Λέξεων-Ψευδολέξεων

Στο μαθητή παρουσιάζεται μία σειρά από λέξεις και ψευδολέξεις και καλείται να αναφέρει ποιες από αυτές τις λέξεις που του παρουσιάστηκαν είναι οι πραγματικές. Η δοκιμασία αποτελείται από δέκα σειρές, οι οποίες αποτελούνται από τρεις έως πέντε λέξεις-ψευδολέξεις (π.χ. *ράμε, πίρτα, βιβλία*, ο μαθητής πρέπει να αναφέρει τα *βιβλία* ως πραγματική λέξη). Η πρώτη σειρά είναι παράδειγμα προκειμένου να κατανοήσει ο μαθητής τη δοκιμασία, τρεις σειρές αποτελούνται από τρεις λέξεις-ψευδολέξεις, τρεις σειρές από τέσσερις λέξεις-ψευδολέξεις και οι υπόλοιπες τρεις σειρές από πέντε λέξεις-ψευδολέξεις. Συνολικά οι λέξεις-ψευδολέξεις της δοκιμασίας είναι 36 και είναι δισύλλαβες ή τρισύλλαβες. Για κάθε λέξη που αναφέρεται ως πραγματική ο μαθητής βαθμολογείται με μία μονάδα, ενώ για κάθε λέξη που δεν αναφέρεται ως πραγματική βαθμολογείται με μηδέν. Για κάθε ψευδολέξη που αναφέρεται ως πραγματική λέξη βαθμολογείται με μηδέν και για κάθε ψευδολέξη που δεν αναφέρεται ως πραγματική λέξη βαθμολογείται με μία μονάδα. Η χορήγηση της δοκιμασίας σταματά όταν ο μαθητής δεν έχει αναγνωρίσει καμία πραγματική λέξη σε τρεις διαδοχικές σειρές.

δ. Αναγνωστική Ευχέρεια

Η δοκιμασία αξιολογεί την ικανότητα ορθής ανάγνωσης λέξεων που βρίσκονται μέσα σε κείμενο εντός ενός προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος 60 δευτερολέπτων. Στο μαθητή δίνεται ένα κείμενο συνολικά 279 λέξεων και καλείται να το διαβάσει έχοντας στη διάθεσή του ένα λεπτό. Ο αξιολογητής σημειώνει στο φύλλο αξιολόγησης τις λέξεις που διαβάστηκαν λάθος, παραλείφθηκαν ή διαβάστηκαν από τον αξιολογητή με το πέρας τριών δευτερολέπτων. Η τελική βαθμολογία του μαθητή προκύπτει από τον αριθμό των λέξεων που διαβάστηκαν μέχρι το πέρας του ενός λεπτού, αφαιρώντας τον αριθμό των λέξεων που δεν διαβάστηκαν σωστά.

Η μέγιστη διάρκεια χορήγησης του τεστ είναι 10΄.

### 3.5.2. Δοκιμασίες της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης

*Η ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης μετρήθηκε μέσω δύο εργαλείων. Το πρώτο εργαλείο είναι τεστ μέτρησης της ικανότητας του ANS, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία από έρευνα που προηγήθηκε για να μετρήσει τη συγκεκριμένη ικανότητα. Οι ερευνητές που το σχεδίασαν έχουν διεξάγει το τεστ σε αρκετά άτομα, έχουν υπολογίσει τους μέσους όρους των τιμών τους, και έχουν εξετάσει τις διαφορές σε αυτές, έτσι ώστε να μπορούν να συγκρίνουν τις ατομικές τιμές με τις τυπικές τιμές για τα άτομα που έχουν κάνει το τεστ. Το δεύτερο εργαλείο αναφέρεται στη μέτρηση της ικανότητας του subitizing και είναι αυτοσχέδιο, καθώς για την αξιολόγηση αυτής της ικανότητας δεν υπάρχει έτοιμο διαθέσιμο εργαλείο στη βιβλιογραφία ή στο εμπόριο. Ωστόσο, ο σχεδιασμός του εργαλείου στηρίζεται στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τον προκαταρκτικό έλεγχο των στοιχείων αυτού, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα.*

#### 3.5.2.1. Μέτρηση του κατά προσέγγιση συστήματος αριθμών, ANS

Η μέτρηση του ANS αναφέρεται στην ικανότητα της κατά προσέγγιση αποτύπωσης και αναπαράστασης των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αριθμητικών ποσοτήτων (Barth et al., 2006).

Προς αυτό τον σκοπό χρησιμοποιήθηκε το Panamath test έκδοση 1.2 http://panamath.org/test/consent.php, που αναπτύχθηκε από Halberda, Mazzocco και Feigenson (2008). Στην οθόνη του υπολογιστή, εμφανίζονταν δύο πίνακες κουκκίδων (μπλε και κίτρινες) που κυμαίνονταν από 5 έως 21 σε χρόνο 1506 ms που δεν επέτρεπε την καταμέτρηση. Ο μαθητής έπρεπε να πατήσει το κατάλληλο πλήκτρο για να δείξει αν είναι οι μπλε ή οι κίτρινες κουκκίδες περισσότερες. Το πλήκτρο F αντιστοιχούσε στις κίτρινες και το πλήκτρο L στις μπλε. Για να μην αντιμετωπίσει ο μαθητής πρόβλημα με τα δύο πλήκτρα τα οποία ήταν στα αγγλικά, πάνω από το πλήκτρο F μπήκε αυτοκόλλητο με το γράμμα Κ το οποίο θα αντιστοιχούσε στις κίτρινες κουκκίδες και πάνω από το πλήκτρο L το γράμμα Μ, το οποίο θα αντιστοιχούσε στις μπλε κουκκίδες. Πριν την έναρξη του έργου υπήρχε μια δοκιμή για να εξοικειωθεί ο μαθητής και η μέγιστη διάρκεια χορήγησης του τεστ ήταν 3΄. Οι χρόνοι απόκρισης (RT) και η ακρίβεια (W) χρησιμοποιήθηκαν ως δείκτες μέτρησης της οξύτητας του ANS εν αντιθέσει με προηγούμενες έρευνες που μέτρησαν μόνο την ακρίβεια (W).

#### 3.5.2.2. Δοκιμασία subitizing

Σκοπός της δοκιμασίας ήταν να μετρήσει την ικανότητα του subitizing, δηλαδή την ικανότητα της γρήγορης και ακριβούς εκτίμησης του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων, που αριθμητικά κυμαίνονταν από ένα έως και τέσσερα αντικείμενα, σε χρόνους που δεν επιτρέπουν την προσφυγή στην καταμέτρηση (Dehaene, 2011· Fischer, Gebhardt, & Hartnegg, 2008· Mazza, Pagano, & Caramazza, 2012).

Η συγκεκριμένη δοκιμασία σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια, καθώς για την αξιολόγηση αυτής της ικανότητας, δεν υπάρχει έτοιμο διαθέσιμο εργαλείο στη βιβλιογραφία ή στο εμπόριο. Ωστόσο, ο σχεδιασμός του εργαλείου στηρίχθηκε στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και της εννοιολογικής οριοθέτησης αυτής της ικανότητας.

Βάσει της εννοιολογικής οριοθέτησης της ικανότητας subitizing, στην οθόνη του υπολογιστή παρουσιάζονταν με τυχαία διάταξη πράσινοι κύκλοι που κυμαίνονταν από 1 (ένας) έως 4 (τέσσερις) διαμέτρου 9 χιλιοστών, σε μαύρο φόντο και σε χρόνο 200 ms, ο οποίος δεν επιτρέπει την καταμέτρηση (Βλ. Demo δύο ερωτήσεων work1 στο http://www.teacher-tsikritsi.gr/work1/work1B-demo%20.html και σχετική εικόνα στο Παράρτημα 2, σελ. 354). Στη συνέχεια ρωτούνταν ο μαθητής πόσους πράσινους κύκλους είδε. Ο μαθητής έπρεπε να πατάει τον σωστό αριθμό στο πληκτρολόγιο που εμφανίζονταν στα δεξιά της οθόνης. Καταγραφόταν ο χρόνος απόκρισης (R.T) σε ms ο οποίος προσμετρούταν από τη στιγμή που εξαφανίζονταν οι κύκλοι μέχρι τη στιγμή που πατούσε ο μαθητής το πληκτρολόγιο για να δώσει την απάντηση, και οι σωστές απαντήσεις. Συνολικά οι δοκιμές του έργου ήταν 32. Η μέτρηση που χρησιμοποιήθηκε σ’ αυτό το έργο ήταν ο χρόνος απόκρισης και η συνολική επίδοση του κάθε συμμετέχοντα μαθητή, δηλαδή το σύνολο των ορθών απαντήσεων που έδωσε στις 32 δοκιμές. Η ελάχιστη βαθμολογία στις δοκιμές ήταν το 0 και η μέγιστη το 32. Ο χρόνος σε ms που χρειάζονταν ο μαθητής για να ολοκληρώσει τη δοκιμασία, όπως και οι σωστές απαντήσεις καταγράφονταν αυτόματα από το λογισμικό. Οι χρόνοι απόκρισης (RT) και η ακρίβεια subitizing χρησιμοποιήθηκαν ως δείκτες μέτρησης της ικανότητας του συστήματος παράλληλης εξατομίκευσης (P.I). Ο μέγιστος χρόνος χορήγησης της δοκιμασίας ήταν 3΄.

Το έργο κατασκευάστηκε με το περιβάλλον κατασκευής εφαρμογών Adobe Flash και τη γλώσσα προγραμματισμού CS6.

Ο σχεδιασμός του έργου στηριζόταν σε ανάλογο των Fischer, Gebhardt και Hartnegg (2008, σελ. 25) με τη διαφορά ό,τι ο αριθμός των κύκλων κυμαινόταν από 1 έως 4 αποκλειστικά για να μετρηθεί η ικανότητα subitize ενώ οι προαναφερθέντες ερευνητές χρησιμοποίησαν 1 έως 9 για να μετρήσουν subitize και αρίθμηση.

Στην παρούσα έρευνα η ικανότητα της αρίθμησης (για περισσότερα στοιχεία των τεσσάρων) ζητούνταν σε ξεχωριστό έργο στις συμβολικές δοκιμασίες από τη στιγμή που (α) δεν έχει απαντηθεί αν η ικανότητα της αρίθμησης και η ικανότητα του subitize είναι δύο χωριστές δοκιμασίες στον εγκέφαλο, (β) η ικανότητα της αρίθμησης διαμεσολαβείται από τη διδακτική πράξη.

Η εγκυρότητα του εργαλείου αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του βάσει αντίστοιχου έργου των Fischer, Gebhardt και Hartnegg (2008, σελ. 25), βάσει του εννοιολογικού προσδιορισμού της ικανότητας subitizing, βάσει της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας για τη μέτρηση της και του προκαταρκτικού ελέγχου των στοιχειών αυτού του εργαλείου, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για τη μέτρηση αυτής της ικανότητας. Χρησιμοποιώντας τον δείκτη άλφα του Cronbach, η αντίστοιχη μέτρηση αυτού του εργαλείου ήταν 0,969, υποδηλώνοντας εξαιρετικά χαμηλά επίπεδα στατιστικού σφάλματος. Ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,934 με τη συσχέτιση των μερών να είναι ίση με 0,917.

### 3.5.3. Δοκιμασίες της ικανότητας συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας

*Η ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας έγινε μέσω τεσσάρων εργαλείων, ο σχεδιασμός των οποίων στηριζόταν στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τον προκαταρκτικό έλεγχο των στοιχειών αυτών, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για την μέτρηση αυτής της ικανότητας. Ειδικότερα, η αξιολόγηση αυτής της ικανότητας έγινε μέσω της απαρίθμησης, της σύ-*

*γκρισης μονοψήφιων αριθμών, τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και την αντίστροφη καταμέτρηση.*

#### 3.5.3.1. Απαρίθμηση

Σκοπός αυτού του έργου ήταν να μετρήσει την ικανότητα της απαρίθμησης, όπως αυτή έχει προσδιοριστεί εννοιολογικά, δηλαδή την ικανότητα της αντιστοίχισης ένα προς ένα των αριθμολέξεων της προφορικής ακολουθίας των αραβικών ψηφίων με τα στοιχεία της συλλογής (Λεμονίδης, 2016, 2017, σελ. 47).

Προς αυτό το σκοπό, στην οθόνη του υπολογιστή παρουσιάζονταν κουκκίδες και το παιδί έπρεπε να προβαίνει σε γρήγορη καταμέτρηση αυτών. Οι κουκκίδες παρέμεναν στην οθόνη του υπολογιστή, μέχρι ο μαθητής δώσει την απάντηση πατώντας τον αριθμό που επέλεγε από το πληκτρολόγιο που εμφανιζόταν στα δεξιά της οθόνης. Προσμετρούνταν ο χρόνος απόκρισης σε msec. και οι σωστές απαντήσεις.

Η σχεδίαση του έργου έγινε με το περιβάλλον κατασκευής εφαρμογών Adobe Flash και τη γλώσσα προγραμματισμού CS6.

Ειδικότερα, το έργο περιελάμβανε 10 δοκιμές ενώ οι κουκκίδες κυμαίνονταν από 5 έως 9 (Βλ. Demo δύο ερωτήσεων work2 στο http://www.teacher-tsikritsi.gr/work2/work2-n.html και σχετικές εικόνες στο Παράρτημα 3, σελ. 355). Οι πέντε πρώτες δοκιμές εξ’ αυτών, εξέταζαν την αρχή της πληθικότητας, βάσει της οποίας, η αριθμολέξη που αντιστοιχεί στην τελευταία κουκκίδα δείχνει το συνολικό αριθμό από τις κουκκίδες, δηλαδή τον πληθάριθμο των κουκκίδων. Οι επόμενες πέντε δοκιμές εξέταζαν την αρχή της αφαίρεσης, δηλαδή την ικανότητα μέτρησης των συνολικών κουκκίδων ανεξάρτητα από το χρώμα τους, το μέγεθός τους ή την ομοιότητά τους. Ταυτοχρόνως και οι δέκα δοκιμές εξέταζαν την αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς, δηλαδή της απαρίθμησης από τον μαθητή των κουκκίδων, ξεκινώντας από όποια θέλει, αρκεί να τις μετρήσει όλες. Ο μέγιστος χρόνος χορήγησης της δοκιμασίας ήταν

2΄.

Η εγκυρότητα του εργαλείου αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του με βάση την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τον προκαταρκτικό έλεγχο των στοιχειών αυτού, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για τη μέτρηση αυτής της ικανότητας. Ο δε στατιστικός έλεγχος έδειξε ότι τα αποτελέσματα είναι αποδεκτά και υποδεικνύουν υψηλή βαθμού εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς ο δείκτης άλφα του Cronbach ήταν ίσος με 0,92 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ίσος με 0,891 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,786.

**3.5.3.2. Σύγκριση μονοψήφιων αριθμών**

Ο σκοπός του εργαλείου ήταν ο έλεγχος της ικανότητας σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών από το ένα έως το εννέα μεταξύ αριθμητικών συμβόλων, η επίδραση της απόστασης των αριθμών και η επίδραση του μεγέθους τους.

Προς αυτό το σκοπό, το εργαλείο σχεδιάστηκε ώστε να αποφασιστεί από το μαθητή, το συντομότερο δυνατόν, χωρίς να σημειωθούν σφάλματα ενώ δύο ψηφία (Times New Roman, γραμματοσειρά 72 σημείων) παρουσιάζονταν στην οθόνη του υπολογιστή, ποιο είναι αριθμητικά μεγαλύτερο (Βλ. Demo δύο ερωτήσεων work3 στο http://www.teacher-tsikritsi.gr/work3/work3A-n.html και σχετικές εικόνες στο Παράρτημα 4, σελ. 356). Τα δύο ψηφία παρέμεναν στην οθόνη μέχρι να ανταποκριθεί ο μαθητής πατώντας το κατάλληλο πλήκτρο που εμφανιζόταν στα δεξιά της οθόνης.

Δύο αποστάσεις χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση του φαινομένου της επίδρασης της απόστασης και της επίδρασης του μεγέθους. Η πρώτη αριθμητική απόσταση ήταν ένας αριθμός (συγκρίνονταν οι αριθμοί 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9) και η δεύτερη απόσταση ήταν 4 έως 5 αριθμοί (συγκρίνονταν οι αριθμοί 1-6, 2-7, 3- 8, 4-9, 1-5, 2-6, 3-7, 4-8) και κάθε ζεύγος ψηφίων παρουσιαζόταν δύο φορές (π.χ.

1-2 και 2-1) με αποτέλεσμα ένα σύνολο 32 δοκιμών, μέγιστης συνολικής διάρκειας 4΄. Στις δοκιμές καταγραφόταν ο χρόνος απόκρισης σε msec. και οι σωστές απαντήσεις, με ελάχιστη βαθμολογία το 0 και μέγιστη το 32. Η μέτρηση της ικανότητας σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών προέκυπτε από τη βαθμολογία που ο μαθητής επιτύγχανε σε αυτές τις δοκιμές. Η μέτρηση του φαινομένου της επίδρασης απόστασης προέκυπτε από τη σύγκριση των χρόνων απόκρισης στις 16 πρώτες δοκιμές όπου η αριθμητική απόσταση ήταν ένα αριθμός και των χρόνων απόκρισης στις 16 δοκιμές που η αριθμητική τους απόσταση ήταν 4 έως 5 αριθμοί. Η μέτρηση του φαινομένου της επίδρασης του μεγέθους προέκυπτε από τη σύγκριση των χρόνων απόκρισης που τα παιδιά είχαν στις δοκιμές των αριθμών 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 2-1, 3-2, 4-3, 5-4 με τους χρόνους απόκρισης που είχαν στους μεγαλύτερους σε μέγεθος αριθμούς όπως 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 6-5, 7-6, 8-7, 9-8.

Το προαναφερόμενο εργαλείο κατασκευάστηκε με το περιβάλλον κατασκευής εφαρμογών Adobe Flash και τη γλώσσα προγραμματισμού CS6.

Η δε εγκυρότητα αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του βάσει παρόμοιων δοκιμασιών, όπως αυτή των Noël και Rousselle (2011) και Olsson και συν. (2016), οι οποίες αναδύθηκαν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τον προκαταρκτικό έλεγχο των στοιχειών αυτού, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για την μέτρηση αυτής της ικανότητας. Στατιστικά ελέγχθηκε η εσωτερική συνέπεια μέσω α του Cronbach, με αποδεκτά αποτελέσματα, καθώς α = 0,904 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,807 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,703.

**3.5.3.3. Σύγκριση διψήφιων αριθμών**

Σκοπός δημιουργίας αυτού του εργαλείου ήταν ο έλεγχος της ικανότητας σύγκρισης αριθμών από το έντεκα έως το ενενήντα εννέα, μεταξύ αραβικών ψηφίων, όπως για παράδειγμα «Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος το 31 ή το 35;», με τη συνακόλουθη εξέταση της επίδρασης της απόστασης των αριθμών και της επίδρασης του μεγέθους των αριθμών.

Η δοκιμασία ήταν ίδια με τη μονοψήφια εργασία σύγκρισης, αλλά τα ερεθίσματα αποτελούσαν διψήφια ζεύγη (Noël, & Rousselle, 2011) με αριθμητική απόσταση 1 αριθμό (20-21, 35-36, 43-44, 58-59, 68-69, 76-77, 83-84, 95-94) και αριθμητική απόσταση 4 – 5 αριθμούς (23-28, 31-35, 44-48, 52-57, 63-68, 74-78, 84-89, 91-95) ενώ τα ίδια ζεύγη παρουσιάζονταν και αντίστροφα, με αποτέλεσμα 32 δοκιμές (Βλ. Demo δύο ερωτήσεων work4 στο http://www.teacher-tsikritsi.gr/work4/work4A-n.html και σχετικές εικόνες στο Παράρτημα 5, σελ. 357). Στις δοκιμές καταγραφόταν ο χρόνος απόκρισης και οι σωστές απαντήσεις με ελάχιστη βαθμολογία το 0 και μέγιστη το 32. Η μέτρηση της ικανότητας σύγκρισης διψήφιων αριθμών προέκυπτε από τη βαθμολογία που ο μαθητής επιτύγχανε σε αυτές τις δοκιμές. Η μέτρηση του φαινομένου της επίδρασης απόστασης προέκυπτε από τη σύγκριση των χρόνων απόκρισης σε msec. στις 16 πρώτες δοκιμές όπου η αριθμητική απόσταση ήταν ένα αριθμός και των χρόνων απόκρισης στις 16 δοκιμές που η αριθμητική τους απόσταση ήταν 4 έως 5 αριθμοί. Η μέτρηση του φαινομένου της επίδρασης του μεγέθους προέκυπτε από τη σύγκριση των χρόνων απόκρισης που τα παιδιά είχαν στις δοκιμές των αριθμών 20-21, 35-36, 43-44, 58-59, 21-20, 36-35, 44-43, 59-58 με τους χρόνους απόκρισης που είχαν στους μεγαλύτερους σε μέγεθος αριθμούς όπως 68-69, 76-77, 83-84, 95-94, 69-68, 77-76, 84-83, 94-95. Η μέγιστη διάρκεια της δοκιμασίας ήταν 4΄.

Το συγκεκριμένο εργαλείο κατασκευάστηκε με το περιβάλλον κατασκευής εφαρμογών Adobe Flash και τη γλώσσα προγραμματισμού CS6.

Η εγκυρότητα αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του βάσει παρόμοιων δοκιμασιών, όπως αυτή των Noël και Rousselle (2011) και Olsson και συν. (2016), οι οποίες αναδύθηκαν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τον προκαταρκτικό έλεγχο των στοιχειών αυτού, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για την μέτρηση αυτής της ικανότητας. Χρησιμοποιώντας τον δείκτη άλφα του Cronbach, η αντίστοιχη μέτρηση αυτού του εργαλείου ήταν 0,906, υποδηλώνοντας εξαιρετικά χαμηλά επίπεδα στατιστικού σφάλματος. Ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,817 με τη συσχέτιση των μερών να είναι ίση με 0,797.

#### 3.5.3.4. Αντίστροφη καταμέτρηση και εκτίμηση στην αριθμογραμμή

Σκοπός του εργαλείου ήταν ο έλεγχος της ικανότητας της αντίστροφης καταμέτρησης, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα του μαθητή να εκτιμά τη χωρική θέση των αριθμητικών αναπαραστάσεων, δηλαδή την ανάπτυξη της γραμμικότητας της συμβολικής διανοητικής γραμμής (Piazza, 2010). Ειδικότερα, αυτό το έργο στόχευε στη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών της αναπαράστασης μιας νοητικής ακριβούς αριθμογραμμής και κατ' επέκταση την τοποθέτηση σε αυτή προς τα πίσω κατάλληλα τους αριθμούς – στόχους, ξεκινώντας από ένα σημείο αναφοράς.

Το έργο συμπεριελάμβανε δύο συνθήκες. Στην πρώτη συνθήκη οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν δέκα αριθμούς σε μια άδεια αριθμογραμμή μετρώντας αντίστροφα από το 20 μέχρι τον αριθμό 8 όπως τους έδειχνε το σχετικό βέλος (Βλ. Παράρτημα 6, σελ. 358). Η ακρίβεια των εκτιμήσεων σε σχέση με την τέλεια γραμμική λειτουργία εκτιμήθηκε με ελάχιστη βαθμολογία το 0 και μέγιστη το 10. Στη δεύτερη συνθήκη οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν δέκα αριθμούς σε μια άδεια αριθμογραμμή μετρώντας αντίστροφα από το 100 μέχρι τον αριθμό 88 όπως τους έδειχνε το σχετικό βέλος (Βλ. Παράρτημα 6, σελ. 358). Η ακρίβεια των εκτιμήσεων σε σχέση με την τέλεια γραμμική λειτουργία εκτιμήθηκε με ελάχιστη βαθμολογία το 0 και μέγιστη το 10. Η ελάχιστη βαθμολογία και των δύο συνθηκών ήταν το 0 και η μέγιστη το 20. Ο μέγιστος χρόνος διάρκειας της δοκιμασίας ήταν 2΄.

Η εγκυρότητα του εργαλείου αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του βάσει της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας και τον προκαταρκτικό έλεγχο των στοιχειών αυτού, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για την μέτρηση αυτής της ικανότητας. Στατιστικά ελέγχθηκε η εσωτερική συνέπεια μέσω α του Cronbach, με τα αποτελέσματα να είναι αποδεκτά και να υποδεικνύουν υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,946 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ίσος με 0,904, με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,899.

### 3.5.4. Δοκιμασίες εργαζόμενης μνήμης

*Η αξιολόγηση της εργαζόμενης μνήμης επιτελείται μέσω του ελέγχου της Λεκτικής μνήμης εργασίας, στην οποία αξιολογούνται η μνήμη  αριθμών και η μνήμη λέξεων, της οπτικοχωρικής συγκράτησης πληροφοριών και μέσω του ελέγχου του κεντρικού εκτελεστικού συστήματος αυτής, όπου αξιολογούνται η ικανότητα της αναστολής, της προσοχής και της γνωστικής ευελιξίας.*

#### 3.5.4.1. Λεκτική μνήμη εργασίας

**α) Μνήμη αριθμών**

Σκοπός αυτού του έργου ήταν η μέτρηση της χωρητικότητας της εργαζόμενης μνήμης μέσα από μια σύνθετη εργασία επανάληψης αριθμών.

Για την αξιολόγηση της μνήμης αριθμών δόθηκε η κλίμακα «Μνήμη αριθμών» του σταθμισμένου Αθηνά Τεστ (Παρασκευόπουλος, 1999). Η συγκεκριμένη δοκιμασία περιελάμβανε έξι επίπεδα δυσκολίας, διακεκριμένα από το σύνολο των αριθμών που έπρεπε να αναπαραχθούν (3 έως 7 αριθμοί για τα έξι διαδοχικά επίπεδα δυσκολίας) (Βλ. Αθηνά Τεστ, Οδηγός Εξεταστή, σελ. 120), με δύο δοκιμές σε κάθε επίπεδο δυσκολίας. Το πρώτο επίπεδο δυσκολίας περιελάμβανε τρεις αριθμούς που έπρεπε να αναπαραχθούν, το δεύτερο επίπεδο τέσσερις αριθμούς, το τρίτο επίπεδο πέντε αριθμούς, το τέταρτο επίπεδο επίσης πέντε αριθμούς, το πέμπτο επίπεδο έξι αριθμούς και το έκτο επίπεδο εφτά. Το συγκεκριμένο τεστ περιελάμβανε μία διαδικασία ανάκλησης, καθώς η συγκεκριμένη κλίμακα ελέγχει την ικανότητα της βραχύχρονης μνήμης αριθμών. Στην παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκαν δύο διαδικασίες ανάκλησης για τον έλεγχο της εργαζόμενης μνήμης: η κανονική και η αντίστροφη. Στην κανονική η ερευνήτρια διάβαζε φωναχτά τις ακολουθίες αριθμών. Ο ρυθμός της εκφώνησης ήταν ένα ψηφίο ανά δευτερόλεπτο. Όταν ολοκληρωνόταν η εκφώνηση των αριθμών, ο μαθητής έπρεπε να αναπαράγει τους αριθμούς ακριβώς όπως τους είχε ακούσει, ενώ στην αντίστροφη ο μαθητής έπρεπε να αναπαράγει τους αριθμούς με την αντίστροφη σειρά. Για παράδειγμα μετά την εκφώνηση των αριθμών 4-3-3, ο μαθητής στην κανονική ανάκληση έπρεπε να πει 4-3-3 ενώ στην αντίστροφη 3-3-4. Όταν ολοκληρωνόταν οι δύο δοκιμές ενός επιπέδου τότε ο μαθητής μετέβαινε στο επόμενο επίπεδο δυσκολίας. Επιτυχημένη επίδοση σε ένα επίπεδο θεωρούνταν η ορθή ανάκληση των αριθμών σε μία από τις δύο δοκιμές. Η αξιολόγηση σταματούσε σε εκείνο το επίπεδο, στο οποίο ο μαθητής επαναλάμβανε ανεπιτυχώς δύο φορές. Το εύρος της μνήμης κάθε μαθητή καθοριζόταν από τον αριθμό των ψηφίων που περιλαμβάνονταν στο τελευταίο επίπεδο που απαντούσε με επιτυχία. Η ελάχιστη βαθμολογία της επίδοσης ήταν το μηδέν και η μέγιστη το 12. (Βλ. Παράρτημα 7, σελ. 359).

**β) Μνήμη Λέξεων**

Σκοπός αυτού του έργου ήταν η μέτρηση της χωρητικότητας της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης μέσα από μια σύνθετη εργασία επανάληψης λέξεων (Östergren, & Träff 2013).

Σε αυτή τη δοκιμασία της λεκτικής μνήμης εργασίας παρουσιαζόταν προφορικά στον μαθητή μια ακολουθία λέξεων και ο μαθητής έπρεπε να αποφασίσει αν κάθε λέξη που ακούει είναι ζώο ή όχι, απαντώντας «ναι» (ζώο, π.χ. γάτα) ή «όχι» (κανένα ζώο, π.χ. αυτοκίνητο), πριν παρουσιαστεί η επόμενη λέξη. Στο τέλος της ακολουθίας το παιδί έπρεπε να ανακαλέσει τις λέξεις με τη σωστή σειρά.

Η δοκιμασία αυτή απαιτούσε από τον συμμετέχοντα να συγκρατεί κάθε φορά στην εργαζόμενη μνήμη του το στοιχείο της κάθε ακολουθίας που έχει ακούσει διατηρώντας τη συγκεκριμένη σειρά ενώ παράλληλα επεξεργάζεται την κάθε λέξη ούτως ώστε να αναφέρει αν αυτό που ακούει είναι ζώο ή όχι. Η συγκεκριμένη δοκιμασία διαβαθμιζόταν σε έξι επίπεδα δυσκολίας. Το πρώτο επίπεδο περιελάμβανε δύο λέξεις, το δεύτερο επίπεδο τρεις, το τρίτο τέσσερις, το τέταρτο πέντε, το πέμπτο επίπεδο έξι και το έκτο επίπεδο επτά λέξεις με δύο δοκιμές να παρουσιάζονται σε κάθε επίπεδο δυσκολίας. Η δυσκολία του έργου μεταβαλλόταν σε συνάρτηση του αριθμού των λέξεων και της επεξεργασίας της κάθε λέξης χωριστά αν είναι ζώο ή όχι. Τοιουτοτρόπως, σε καθένα από το έξι επίπεδα δυσκολίας αυξάνονταν οι μονάδες πληροφορίας που ο μαθητής έπρεπε να συγκρατήσει ταυτόχρονα στη βραχύχρονη μνήμη και της επεξεργασίας αναγνώρισης που υφίστατο η κάθε λέξη.

Όταν ολοκληρωνόταν οι δύο δοκιμές ενός επιπέδου τότε ο μαθητής μετέβαινε στο επόμενο επίπεδο δυσκολίας. Επιτυχημένη επίδοση σε ένα επίπεδο θεωρούνταν η ορθή ανάκληση των λέξεων σε μία από τις δύο δοκιμές. Η αξιολόγηση σταματούσε σε εκείνο το επίπεδο, στο οποίο ο μαθητής επαναλάμβανε ανεπιτυχώς δύο φορές. Το εύρος της μνήμης κάθε μαθητή καθοριζόταν από τον αριθμό των λέξεων που περιλαμβάνονταν στο τελευταίο επίπεδο που απαντούσε με επιτυχία. Η ελάχιστη βαθμολογία της επίδοσης ήταν το μηδέν και η μέγιστη το 12 (Βλ. Παράρτημα 7, σελ. 360).

Η εγκυρότητα του εργαλείου αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του βάσει αντίστοιχων έργων που έχουν χρησιμοποιηθεί διεθνώς (Östergren, & Träff 2013), βάσει του εννοιολογικού προσδιορισμού της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης, βάσει της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας για τη μέτρηση της και του προκαταρκτικού ελέγχου των στοιχειών αυτού του εργαλείου, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα. Ταυτοχρόνως, ο έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας μέσω α του Cronbach, υποδεικνύει υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,932 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,908 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,801.

**3.5.4.2. Οπτικοχωρική μνήμη εργασίας**

Σκοπός αυτού του έργου ήταν η μέτρηση της χωρητικότητας (εύρος) της οπτικοχωρικής μνήμης εργασίας, και ειδικότερα της προσωρινής αποθήκευσης και διαχείρισης των οπτικών μοτίβων και των κινήσεων στο χώρο (Logie, 1995).

Η μέτρηση της έγινε με το σταθμισμένο έργο *Corsi Block Test* (Corsi, 1972) σε ηλεκτρονική μορφή. Το συγκεκριμένο έργο (Corsi Block Test) σε ηλεκτρονική μορφή, αποτελείται από εννιά μπλε τετράγωνα τοποθετημένα πάνω σε μία ορθογώνια επιφάνεια και συμπεριλαμβάνει έξι επίπεδα δυσκολίας. Στο πρώτο επίπεδο δυσκολίας, δύο από αυτά γίνονται κίτρινα και ο μαθητής έπρεπε να αναπαράγει αυτό που είδε με την ίδια σειρά πατώντας στα κατάλληλα τετράγωνα. Το έργο αύξανε σταδιακά σε βαθμό δυσκολίας καθώς στη συνέχεια ο αριθμός των τετραγώνων που άλλαζε χρώμα γινόταν μεγαλύτερος και η χωρική θέση αυτών πολυπλοκότερη. Κατά συνέπεια, στο δεύτερο επίπεδο δυσκολίας, τρία τετράγωνα από τα μπλε γίνονταν κίτρινα και ο μαθητής έπρεπε να θυμάται όχι μόνο τον αριθμό των τετραγώνων που άλλαξε χρώμα, αλλά και τη χωρική θέση αυτών και να αναπαράγει σωστά τη θέση τους. Στο τρίτο επίπεδο, τα τετράγωνα γίνονταν τέσσερα, στο τέταρτο επίπεδο γίνονταν πέντε, στο πέμπτο επίπεδο έξι και στο έκτο επίπεδο επτά. Έτσι, σε καθένα από τα έξι επίπεδα δυσκολίας, αυξάνονταν οι μονάδες οπτικοχωρικών πληροφοριών που ο μαθητής έπρεπε να συγκρατήσει αρχικά στη βραχύχρονη μνήμη και στη συνέχεια να τις αναπαράξει.

Υπήρχαν δύο περιπτώσεις σε κάθε επίπεδο δυσκολίας που έπρεπε να συμπληρωθούν για να συνεχίσει ο μαθητής στο επόμενο επίπεδο με μια τουλάχιστον σωστή απάντηση. Η μέτρηση που χρησιμοποιήθηκε σ’ αυτό το έργο ήταν η συνολική επίδοση του κάθε συμμετέχοντα μαθητή, δηλαδή το σύνολο των ορθών απαντήσεων που έδωσε. Η ελάχιστη βαθμολογία ήταν 0 και η μέγιστη 12. Η βαθμολογία του κάθε μαθητή σε αυτό το έργο αποτελούσε ένα δείκτη της οπτικοχωρικής ικανότητας.

**3.5.4.3. Δοκιμασία ελέγχου της αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού**

Σκοπός του εργαλείου ήταν ο έλεγχος του κεντρικού εκτελεστή της εργαζόμενης μνήμης μέσω της μέτρησης της ικανότητας αναστολής άσχετων με το επιτελούμενο έργο ερεθισμάτων, από το να παρεισφρήσουν στη διαδικασία επεξεργασίας των πληροφοριών και να περιορίσουν την αποτελεσματικότητα της προσοχής.

Για την επίτευξη αυτού του σκοπού σχεδιάστηκε ένα αριθμητικό έργο αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, όπου ο μαθητής έπρεπε να διακρίνει τον μεγαλύτερο ποσοτικά μεταξύ δύο αριθμών που διέφεραν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το 2), μέσω της σιωπηρής επεξεργασίας των αριθμητικών μεγεθών και της νοερής αναπαράστασής τους.

Ειδικότερα, στην οθόνη του υπολογιστή, εμφανίζονταν ζευγάρια μονοψήφιων αριθμών, που κυμαίνονταν από 1-9, με τον ένα αριθμό να είναι σε φυσικό μέγεθος μεγαλύτερο από τον άλλο. Για παράδειγμα, συγκρινόταν το 1 με το 2, και οι μαθητές έπρεπε να αναστείλουν αυτή την επίδραση του φυσικού μεγέθους και να επιλέξουν τον αριθμό που εκφράζει τη μεγαλύτερη ποσότητα. Τα ερεθίσματα παρέμεναν στην οθόνη του υπολογιστή μέχρι το παιδί δώσει την απάντηση στο πληκτρολόγιο που βρισκόταν στα δεξιά της οθόνης. Οι δοκιμές ήταν 32, εκ των οποίων οι 16 παρουσίαζαν ασυμβατότητα του φυσικού μεγέθους του αριθμού και της ποσότητας που εξέφραζαν. Ειδικότερα, οι οκτώ πρώτες δοκιμές εμφάνιζαν ασυμβατότητα φυσικού μεγέθους και ποσότητας με αριθμητική απόσταση έναν αριθμό και συγκρίνονταν οι αριθμοί, το 1 με το 2, το 2 με το 3, το 3 με το 4, το 4 με το 5, το 5 με το 6, το 6 με το 7, το 7 με το 8, το 8 με το 9 και ακολουθούσαν οκτώ μετρήσεις με τους ίδιους αριθμούς στις οποίες υπήρχε συμβατότητα φυσικού μεγέθους αριθμού και ποσότητας με την ίδια αριθμητική απόσταση και συγκρίνονταν, το 1 με το 2, το 2 με το 3, το 3 με το 4, το 4 με το 5, το 5 με το 6, το 6 με το 7, το 7 με το 8, το 8 με το 9. Οι επόμενες οκτώ δοκιμές εμφάνιζαν ασυμβατότητα του φυσικού μεγέθους του αριθμού και της ποσότητας που εξέφραζαν, με αριθμητική απόσταση τέσσερις έως πέντε αριθμοί και συγκρίνονταν οι αριθμοί, το 1 με το 6, το 2 με το 7, το 3 με το 8, το 4 με το 9, το 1 με το 5, το 2 με το 6, το 3 με το 7, το 4 με το 8 και ακολουθούσαν οκτώ δοκιμές με τους ίδιους αριθμούς στις οποίες υπήρχε συμβατότητα φυσικού μεγέθους αριθμού και ποσότητας όπως το 6 με το 1, το 7 με το 2, το 8 με το 3, το 9 με το 4, το 5 με το 1, το 6 με το 2, το 7 με το 3 και το 8 με το 4 (Βλ. Demo δύο ερωτήσεων work5 στο http://www.teacher-tsikritsi.gr/work5/work5A-n.html και σχετικές εικόνες στο Παράρτημα 8, σελ. 361). Στο έργο προσμετρούνταν ο χρόνος απόκρισης (R.T) σε msec. και οι σωστές απαντήσεις με ελάχιστη βαθμολογία το 0 και μέγιστη το 32 και η χορήγηση αυτού δεν ξεπερνούσε τα 3΄.

Η σχεδίαση του έργου έγινε με το περιβάλλον κατασκευής εφαρμογών Adobe Flash και τη γλώσσα προγραμματισμού CS6.

Η εγκυρότητα του εργαλείου αυτού στηρίζεται στη σχεδίασή του βάσει αντίστοιχων έργων που έχουν χρησιμοποιηθεί διεθνώς (Bugden, & Ansari, 2015), βάσει του εννοιολογικού προσδιορισμού της ικανότητας αναστολής, βάσει της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας για τη μέτρηση της και του προκαταρκτικού ελέγχου των στοιχειών αυτού του εργαλείου, όπως προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα. Ο έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας μέσω α του Cronbach, υποδεικνύει υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,945 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,918 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,854.

**3.5.4.4. Δοκιμασία ελέγχου της προσοχής και της γνωστικής ευελιξίας**

Σκοπός της δοκιμασίας ήταν ο περαιτέρω έλεγχος του κεντρικού εκτελεστικού συστήματος της εργαζόμενης μνήμης μέσω του ελέγχου της ικανότητας προσοχής-ταχύτητα επεξεργασίας και της ικανότητας της γνωστικής ευελιξίας.

Για την αξιολόγηση της προσοχής και της γνωστικής ευελιξίας χρησιμοποιήθηκε το Trail Making Test. Το συγκεκριμένο τεστ χρησιμοποιείται ευρέως σε κλινικές μελέτες ως διαγνωστικό εργαλείο των επιτελικών λειτουργιών της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής. Η κακή απόδοση σε αυτό συσχετίζεται με πολλούς τύπους εγκεφαλικής δυσλειτουργίας, ειδικότερα βλάβης του μετωπιαίου λοβού (Bowie, & Harvey, 2006).

Το τεστ απαρτίζεται από δύο συνθήκες. Στην Α΄ συνθήκη ζητείται από το μαθητή να ενώσει με μια γραμμή 25 εγγεγραμμένα (σε κύκλους) ψηφία σε αύξουσα σειρά, χωρίς να σηκώσει το μολύβι από το φυλλάδιο. Αυτή η συνθήκη εξετάζει την προσοχή και την ταχύτητα επεξεργασίας. Στη Β΄ συνθήκη ο συμμετέχοντας πρέπει να συνδέσει 24 κύκλους (οι 12 κύκλοι περιέχουν αριθμούς και οι 12 γράμματα) όσο πιο γρήγορα μπορεί, εναλλάσσοντας γράμματα και αριθμούς (π.χ. 1-Α-2-Β-3-Γ κ.λ.π.) (Βλ. Παράρτημα 9, σελ. 362-365). Αυτή η συνθήκη εξετάζει τη γνωστική ευελιξία. Η επίδοση σε κάθε συνθήκη ξεχωριστά μετριέται με το χρόνο, δηλαδή πόσα δευτερόλεπτα χρειάστηκαν για να ολοκληρωθεί η διαδικασία (Bowie, & Harvey, 2006). Για την πρώτη συνθήκη, ο αποδεκτός χρόνος ολοκλήρωσης πρέπει να είναι μικρότερος των 78 δευτερολέπτων, ενώ για τη δεύτερη συνθήκη ο χρόνος ολοκλήρωσης πρέπει να είναι μικρότερος των 273 δευτερολέπτων.

Αν ο μαθητής παρουσιάσει λάθος σε κάποια σύνδεση, ο εξεταστής του τεστ πρέπει να διορθώσει το μαθητή προτού οδηγηθεί στην επόμενη σύνδεση. Τα ποσοστά των λαθών δεν καταγράφονται, καθώς υποτίθεται πως εάν γίνουν λάθη, θα αντικατοπτρίζονται στον χρόνο ολοκλήρωσης.

Το συγκεκριμένο τεστ ήταν στην αγγλική γλώσσα, μεταφράστηκε από την ερευνήτρια κι έγινε ανάστροφη μετάφραση από καθηγήτρια αγγλικής γλώσσας. Ο έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας μέσω α του Cronbach, υποδεικνύει υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,995 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,928 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,893.

### 3.5.5. Δοκιμασίες ελέγχου παρέμβασης

#### 3.5.5.1. Προτέστ και μετατέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση

Σκοπός του προτέστ και μετατέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση ήταν η μέτρηση της επίδοσης των μαθητών με δυσαριθμησία στους αλγόριθμους της πρόσθεσης με κρατούμενο σε τριψήφιους αριθμούς και του αλγόριθμου της αφαίρεσης με δανεικό σε τριψήφιους αριθμούς.

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα της Γ΄ τάξης (Π. Ι., σελ 76) (Βλ. Παράρτημα 10, σελ. 366) και της διδαχθείσας ύλης του σχολικού βιβλίου (Βλ. Λεμονίδης, Θεοδώρου, Νικολαντωνάκης, Παναγάκος, & Σπανακά, 2006α), οι μαθητές στο πρώτο τρίμηνο αναπτύσσουν και εφαρμόζουν αλγόριθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με μονοψήφιο διαιρέτη, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία από στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις, διερευνούν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών προσθέσεων και αφαιρέσεων τριψήφιων αριθμών. Ειδικότερα στο Βιβλίο Μαθητή (σελ. 12-55) (Λεμονίδης et al., 2006β) και στο Τετράδιο Εργασιών Μαθητή α΄ τεύχος (σελ. 10-35) (Λεμονίδης et al., 2006γ) και β΄ τεύχος (σελ. 10-23) (Λεμονίδης et al., 2006δ), αναφέρεται ότι την Α΄ περίοδο οι μαθητές διδάσκονται στην ενότητα των αριθμών, τους αριθμούς έως το 3.000, στην ενότητα των πράξεων, νοερές πράξεις τριψήφιων και τετραψήφιων αριθμών, προσθέσεις και αφαιρέσεις τριψήφιων αριθμών, επανάληψη προπαίδειας, πολλαπλασιασμοί διψήφιου αριθμού με μονοψήφιο και διαιρέσεις.

Προς αυτό τον σκοπό συντάχτηκε το προτέστ – μετατέστ το οποίο δόθηκε στους μαθητές μετά την παρέλευση του α΄ τριμήνου της Γ΄ τάξης (Βλ. Παράρτημα 11, σελ. 367), όπου οι μαθητές είχαν ήδη διδαχτεί τους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς. Η αξιολόγηση με το συγκεκριμένο τεστ επίδοσης έδειξε αν κατέκτησαν οι μαθητές, σε αναφορά με τους διδακτικούς στόχους του αναλυτικού προγράμματος σπουδών (αξιολόγηση βάσει κριτηρίων) τους συγκεκριμένους στόχους. Η κατάκτηση των στόχων ορίστηκε σε επίπεδο κυριαρχίας / καταμάθησης 90% και πάνω, δηλαδή να λύσουν οι μαθητές τις 9 από τις 10 ασκήσεις του τεστ που αφορούν στον συγκεκριμένο στόχο και δεν έχουν ανάγκη από στάθμιση (Σαλβαράς, 2011, σελ. 41-42).

Το προτέστ περιελάμβανε δέκα ασκήσεις προσθέσεων τριψήφιων αριθμών, έξι εξ' αυτών με κρατούμενο στις μονάδες και στις δεκάδες και τέσσερις με διάκριση προσθέσεων με κρατούμενο στις δεκάδες από τις προσθέσεις με κρατούμενο στις μονάδες, όπου η κάθε άσκηση βαθμολογούνταν με 1 βαθμό και δέκα ασκήσεις αφαιρέσεων τριψήφιων αριθμών με δανεικό, έξι εξ αυτών με δανεικό από τη στήλη των δεκάδων και τέσσερις ασκήσεις με διάκριση αφαιρέσεων με δανεικό από αφαιρέσεις χωρίς δανεικό, όπου η κάθε άσκηση βαθμολογούνταν με 1 βαθμό. Ο συνολικός βαθμός για τις προσθέσεις ήταν το 10 με ελάχιστη βαθμολογία το 0. Ο συνολικός βαθμός για τις αφαιρέσεις ήταν το 10 με ελάχιστη βαθμολογία το 0. Ο συνολικός βαθμός του τεστ ήταν το 20 με ελάχιστη βαθμολογία το 0.

Το μετατέστ δε διαφοροποιούνταν σε καμία άσκηση και δόθηκε μετά τη διαμεσολάβηση της διδακτικής πράξης για τη μέτρηση εκ νέου της επίδοσης των μαθητών στους αλγόριθμους των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Η εγκυρότητα του περιεχομένου του συγκεκριμένου τεστ εξασφαλίζεται με τη συγκεκριμενοποίηση των διδακτικών στόχων και τον ορισμό κριτηρίων επιτυχίας και προς αυτό το σκοπό συντάχθηκε η παρακάτω μήτρα κατασκευής (Πίνακας 3.5.).

Πίνακας 3.5.

*Καθοδηγητικός πίνακας σύνταξης προτέστ-μετατέστ επίδοσης μαθητών προσανατολισμένος σε κριτήρια.*

| Ενότητες γνώσης | Μαθησιακή ιεραρχία | Διδακτικοί στόχοι | Ασκήσεις | Βαθμολογία |
|---|---|---|---|---|
| Πρόσθεση τριψήφιων αριθμών με κρατούμενο. | Εκμάθηση | Να εκτελούν προσθέσεις με κρατούμενο στις μονάδες και στις δεκάδες. | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 6 |
| | Διάκριση | Να ξεχωρίζουν τις προσθέσεις με κρατούμενο στις μονάδες από τις προσθέσεις με κρατούμενο στις δεκάδες | 7, 8, 9, 10 | 4 |
| Αφαίρεση τριψήφιων αριθμών με δανεικό. | Εκμάθηση | Να εκτελούν τριψήφιες αφαιρέσεις με δανεικό από τις δεκάδες. | 11, 12, 13, 14, 15, 16 | 6 |
| | Διάκριση | Να ξεχωρίζουν τις αφαιρέσεις με δανεικό από τη στήλη των δεκάδων από τις αφαιρέσεις χωρίς δανεικό. | 17, 18, 19, 20 | 4 |

Η αξιοπιστία του τεστ – κριτηρίου επίδοσης των μαθητών στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς δεν μπορεί να ελεγχθεί με τους τύπους της κλασσικής θεωρίας των τεστ για τον προσδιορισμό των δεικτών δυσκολίας και διακριτικής ικανότητας, γιατί τα αποτελέσματα του τεστ δεν παρουσιάζουν διασπορά (Σαλβαράς, 2013β, σελ. 386). Η καμπύλη κατανομής των αποτελεσμάτων θα παρουσιάζει ασυμμετρία προς τα δεξιά, εφόσον επιζητούνται επίπεδα επιτυχίας σε βαθμό κυριαρχίας 90% στους συγκεκριμένους αλγόριθμους. Η αξιοπιστία του τεστ σύμφωνα με τον Σαλβαρά (2011, σελ. 43, 2013β, σελ. 386-387), ελέγχεται με τον συντελεστή συμφωνίας με τον κάτωθι τύπο:

Συντελεστής συμφωνίας: $Y = 1 - \frac{\mathrm{SS}}{\mathrm{MaxSS}}$

Με: Y= Ο συντελεστής συμφωνίας
SS= Είναι το τετραγωνικό άθροισμα όλων των βαθμών των ασκήσεων
MaxSS= Είναι το μέγιστο τετραγωνικό άθροισμα όλων των βαθμών των ασκήσεων

Βάσει αυτού του τύπου, βαθμολογήσαμε την κάθε άσκηση με κλίμακα 1-10 στις δέκα ασκήσεις προσθέσεων τριψήφιων αριθμών και βρήκαμε τον μέσο όρο που επιτύγχαναν οι μαθητές στην κάθε άσκηση, στο μετατέστ επίδοσης, και αυτό γιατί επιζητούνταν επίπεδα επιτυχίας με βαθμό κυριαρχίας 90% στους συγκεκριμένους αλγόριθμους, και προχωρήσαμε στον προσδιορισμό του συντελεστή συμφωνίας. Ο μέσος όρος που πέτυχαν οι μαθητές στην κάθε άσκηση πρόσθεσης στο μετατέστ επίδοσης βάσει κριτηρίων ήταν:

| Ασκήσεις πρόσθεσης | 1$^{η}$ | 2$^{η}$ | 3$^{η}$ | 4$^{η}$ | 5$^{η}$ | 6$^{η}$ | 7$^{η}$ | 8$^{η}$ | 9$^{η}$ | 10$^{η}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Μ.Ο. βαθμών: | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 7 | 10 | 10 |

Αντικαθιστώντας τις τιμές στον σχετικό τύπο ο συντελεστής κυριαρχίας υποδείκνυε υψηλού βαθμού αξιοπιστία, καθώς το αποτέλεσμά του ήταν ίσο με 0,07.

Σύμφωνα με τον Σαλβαρά (2011, σελ. 44), όσο ο συντελεστής συμφωνίας πλησιάζει το Υ = 0, τόσο αυξάνει η αξιοπιστία του τεστ επίδοσης – βάσει κριτηρίων.

$$Y = 1 - \frac{9^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 7^2 + 10^2 + 10^2}{10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2} =$$

$$1 - \frac{81 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 49 + 100 + 100}{1000} =$$

$$1 - \frac{930}{1000} = \frac{1000}{1000} - \frac{930}{1000} = \frac{70}{1000} = 0{,}07$$

Αντίστοιχα, προχωρήσαμε στον προσδιορισμό του συντελεστή συμφωνίας στις ασκήσεις αφαιρέσεων. Ο μέσος όρος που πέτυχαν οι μαθητές στην κάθε άσκηση αφαίρεσης στο μετατέστ επίδοσης βάσει κριτηρίων ήταν:

| Ασκήσεις αφαίρεσης | 11η | 12η | 13η | 14η | 15η | 16η | 17η | 18η | 19η | 20η |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Μ.Ο. βαθμών: | 10 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |

Αντικαθιστώντας τις τιμές στον σχετικό τύπο ο συντελεστής κυριαρχίας υποδείκνυε υψηλού βαθμού αξιοπιστία, καθώς το αποτέλεσμά του ήταν ίσο με 0,019, δηλαδή η τιμή του πλησίαζε στο 0 (Σαλβαράς, 2011, σελ. 43, 2013β, σελ. 386-387).

$$Y = 1 - \frac{10^2 + 9^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2}{10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2} =$$

$$1 - \frac{100 + 81 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100}{1000} =$$

$$1 - \frac{981}{1000} = \frac{1000}{1000} - \frac{981}{1000} = \frac{19}{1000} = 0{,}019$$

#### 3.5.5.2. Πρωτόκολλα Διαγνωστικής και Αποδεικτικής Αξιολόγησης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση

Μετά τη βαθμολογία στο προτέστ επίδοσης, συντάξαμε Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης με τα λάθη των μαθητών με δυσαριθμησία στην εκτέλεση της πρόσθεσης και στη διάκριση, και στην εκτέλεση της αφαίρεσης και στη διάκριση αυτής

(Σαλβαράς, 2013α, σελ. 145), ως ακολούθως:

**Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης**

**Συμπτωματολογία λαθών**

**Μαθητών με**
**Δυσαριθμησία**

- Εκτέλεση προσθέσεων με κρατούμενο
- Διάκριση προσθέσεων με κρατούμενο
- Εκτέλεση αφαιρέσεων με δανεικό
- Διάκριση αφαιρέσεων με και χωρίς δανεικό

Μετά τη σύνταξη του Πρωτοκόλλου Διαγνωστικής Αξιολόγησης ακολούθησε η μεθόδευση της διδακτικής παρέμβασης, η οποία περιελάμβανε τη συγκεκριμενοποίηση του διδακτικού στόχου, την επιλογή της στρατηγικής διδασκαλίας, τη χορήγηση του μετατέστ και την εκ νέου σύνταξη Πρωτοκόλλου Αξιολόγησης για τη διαπίστωση της προόδου των μαθητών, μέσα από τη σύγκριση αυτών (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 147).

**Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης**

**Συμπτωματολογία λαθών**

**Μαθητών με**
**δυσαριθμησία**

- Εκτέλεση προσθέσεων με κρατούμενο
- Διάκριση προσθέσεων με κρατούμενο
- Εκτέλεση αφαιρέσεων με δανεικό
- Διάκριση αφαιρέσεων με και χωρίς δανεικό

### 3.5.5.3. Σχέδιο μεθόδευσης διδασκαλίας αλγόριθμου πρόσθεσης με κρατούμενο μέσω της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

**Α. Προγραμματισμός μεθόδευσης διδασκαλίας γνωστικής μαθητείας** (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 148-154)

**Ι. Αντικείμενο πρόσληψης / εσωτερίκευσης διδασκαλίας**

Στον προγραμματισμό της μεθόδευσης διδασκαλίας προσδιορίζεται από τον εκπαιδευτικό το αντικείμενο πρόσληψης/εσωτερίκευσης της διδασκαλίας δηλαδή, τι έχω να διδάξω (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 148), όπου στην παρούσα έρευνα είναι η τριψήφια πρόσθεση με κρατούμενο (αλγόριθμος της πράξης της πρόσθεσης με κρατούμενο).

**ΙΙ. Προηγούμενο γνωστικό επίπεδο**

Εντοπίζεται το προηγούμενο γνωστικό επίπεδο των μαθητών, ως προαπαιτούμενο και προπαρασκευαστικό για τη νέα μάθηση (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 148).

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους αριθμητικούς συνδυασμούς της πρώτης δεκάδας.

**ΙΙΙ. Διδακτικοί Στόχοι**

Διατυπώνονται οι διδακτικοί στόχοι – ικανότητες και δεξιότητες.

Στόχοι – ικανότητες είναι: (α) η μοντελοποίηση / σχηματοποίηση της τριψήφιας πρόσθεσης με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων, (β) η επάλληλη σύνδεση της μοντελοποιημένης/σχηματοποιημένης πρόσθεσης με τη συμβολική της έκφραση.

Στόχοι – δεξιότητες είναι του *λέγειν* (να επαναλαμβάνουν τα βήματα), του *πράττειν* (να εκτελούν όμοιες σχηματοποιημένες προσθέσεις και με τη συμβολική τους έκφραση), του *είναι* (να εφαρμόζουν το μαθησιακό συμβόλαιο ως παρακολούθηση, έλεγχο και έκφραση μεταγνωστικών εμπειριών, του *γίγνεσθαι* (να εξηγούν το σχέδιο μοντελοποίησης), του *μεταφέρειν* (να εφαρμόζουν τον κανόνα «τα δέκα κάνουν ένα» και τη θεσιακή αξία ψηφίου και σε άλλες προσθέσεις) και του *προσαρμόζειν* (να διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στις προσθέσεις με και χωρίς κρατούμενο)

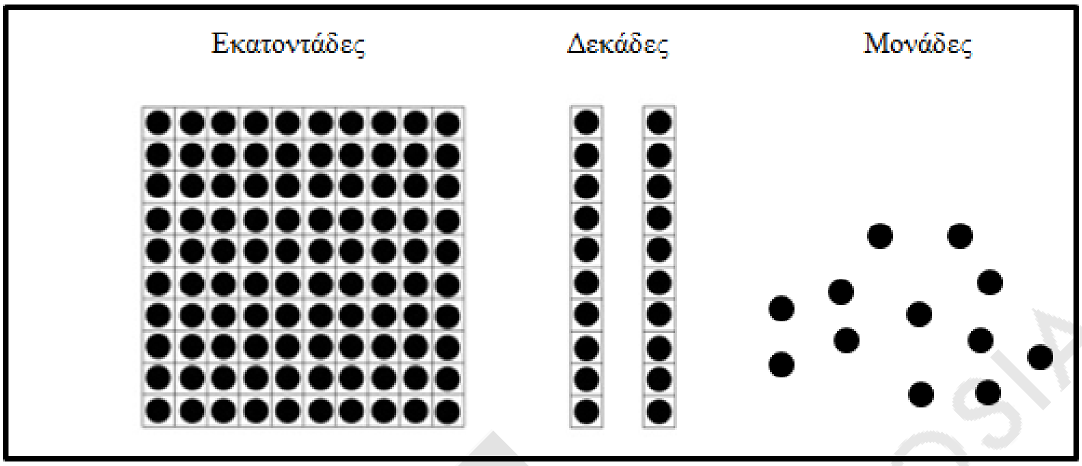
(Σαλβαράς, 2013α, σελ. 149).

Οι στόχοι - δεξιότητες δηλώνουν τη δραστηριότητα των μαθητών και για την υλοποίησή τους κρίνεται απαραίτητο να προσδιοριστεί η μεθοδολογική συνθήκη και το κριτήριο απόδοσης/επιτυχίας, έτσι οι μαθητές θα πρέπει: Να εκτελούν προσθέσεις με κρατούμενο: στόχοι δεξιότητες του *λέγειν*, του *είναι*, του *γίγνεσθαι,* του *μεταφέρειν,* του *προσαρμόζειν* (ως δραστηριότητα), ακολουθώντας τις φάσεις της μαθησιακής ιεραρχίας: εκμάθηση, διατήρηση, γενίκευση, διάκριση (ως μεθοδολογική συνθήκη), εκτελώντας σωστά τις 9 από τις 10 προσθέσεις (ως κριτήριο απόδοσης) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 149).

Οι συνθήκες υλοποίησης των στόχων στη διδασκαλία / μάθηση των αλγόριθμων των πράξεων της πρόσθεσης, υποστηρίζονται από τους πέντε διακριτούς τύπους αναπαραστάσεων των εννοιών 1) καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, 2) χειραπτικά υλικά, 3) εικόνες, 4) γραπτά σύμβολα και 5) προφορική γλώσσα (Σαλβαράς, 2011, σελ. 19· Van de Walle, 2005, σελ. 46), προστιθέμενους σ' αυτούς ο τύπος της σχηματοποίησης της παρούσας μελέτης.

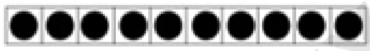
Σ' αυτή τη φάση του προγραμματισμού υλοποιούνται οι δύο τύποι αναπαραστάσεων: α. Χειραπτικά υλικά και β. Καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

***α. Χειραπτικά υλικά***. Επειδή στόχος είναι η εννοιολογική και διαδικαστική διασαφήνιση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και ιδιαίτερα των ενεργειών που συνδέονται με τη μεταφορά μονάδων διαφόρων τάξεων από στήλη σε στήλη (κρατούμενα, δανεικά), οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στην αναπαράσταση ενός και του αυτού αριθμού με μονάδες διαφορετικής τάξης, πριν την εισαγωγή στο σχηματοποιημένο μοντέλο επίλυσης των αλγόριθμων. Προς αυτό τον σκοπό, αναπαράγουμε αρκετές φορές το ομαδοποιημένο μοντέλο δεκαδικής βάσης και κόβουμε αρκετές εκατοντάδες, δεκάδες και μονάδες (Βλ. Σχήμα 3.2.). Με αυτόν τον τρόπο γίνεται ένα ομαδοποιήσιμο μοντέλο, όπου η δεκάδα μπορεί να συσταθεί από τις μονάδες και η εκατοντάδα από τις δεκάδες και από τις μονάδες. Φροντίζουμε ο κάθε μαθητής να έχει στη διάθεσή του, εκατοντάδες, αρκετές δεκάδες (τουλάχιστον 10) και πολλές μονάδες (τουλάχιστον 100).



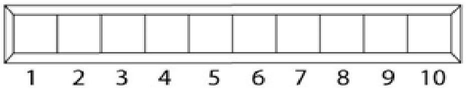

*Σχήμα 3.2. Ομαδοποιημένο μοντέλο δεκαδικής βάσης.*

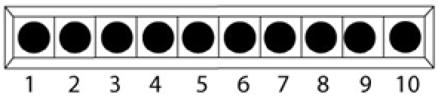
Στη συνέχεια παίζουμε με τα παιδιά ένα παιχνίδι ανταλλαγής ως εξής:

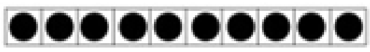
Σου δίνω δέκα κυκλάκια  δηλαδή δέκα μονάδες, πόσες δεκάδες δικές σου  μπορείς να μου δώσεις; Είναι το ίδιο; Γιατί; Φτιάξε, σχημάτισε μια εκατοντάδα χρησιμοποιώντας δέκα δεκάδες, φτιάξε μια εκατοντάδα χρησιμοποιώντας εκατό μονάδες κ.τ.λ.

Παίζουμε αρκετά ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τις σχέσεις των μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων. Η ορολογία που χρησιμοποιούμε αντιστοιχεί στις ενέργειες του μαθητή ώστε να υπάρξει η συσχέτιση ενέργειας και λέξης.

Στη συνέχεια, για να προσεγγίσουμε την έννοια του «κρατούμενου» που αποτελεί βασικό στοιχείο του αλγόριθμου που εξετάζουμε, ζητάμε από τους μαθητές να προσθέσουν 7  μονάδες και 5  μονάδες.

Σε αυτή τη φάση αφήνουμε τους μαθητές να μετρήσουν τα κυκλάκια όπως θέλουν (δηλαδή ή απαρίθμηση όλων ή απαρίθμηση από τον α΄ όρο ή απαρίθμηση από τον μεγαλύτερο). Οι μαθητές βρίσκουν 12 ●●●●●●●●●●●● μονάδες. Στη συνέχεια ζητάμε να τοποθετήσουν στη θήκη 10 θέσεων που τους δίνουμε, και η οποία είναι αριθμημένη για την ενίσχυση της σύνδεσης μη συμβολικών και συμβολικών ποσοτήτων,  τις μονάδες κυκλάκια. Σε κάθε θέση μπορούν να τοποθετήσουν μόνο μια μονάδα (ένα κυκλάκι).

Ο κάθε μαθητής μετά την τοποθέτηση βλέπει ότι τοποθετήθηκαν τα 10 κυκλάκια και του περισσεύουν  ●● 2 μονάδες.

Ρωτάμε αν μπορεί να ανταλλάξει αυτή τη θήκη με μια δεκάδα. Πραγματοποιείται η ανταλλαγή και ο μαθητής αντί για 12 ●●●●●●●●●●●● μονάδες, μπορεί να έχει 1  δεκάδα και 2 ●● μονάδες.

Συνεχίζουμε με τρεις – τέσσερις προσθέσεις αυτού του τύπου για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τις ανταλλαγές των μονάδων σε δεκάδες και την περίσσεια των μονάδων.

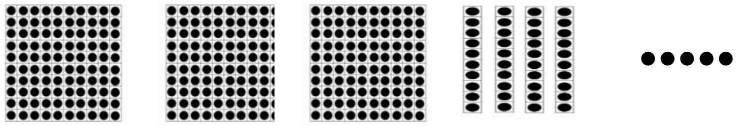
***β. Καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Πρόσθεση τριψήφιων αριθμών με κρατούμενο με πραγματικό-απεικονιστικό υλικό στη βάση του ομαδοποιημένου μοντέλου δεκαδικής βάσης.***

Η διαδικασία ξεκινά με την πρόσθεση πραγματικών υλικών στη βάση ενός προβλήματος. Με την παράθεση ενός προβλήματος τριψήφιας πρόσθεσης επιδιώκουμε να προβληματίσουμε τους μαθητές για κάποιες συγκεκριμένες καταστάσεις που διαμορφώνουν το πρόβλημα και προκαλούν κίνητρο για ενεργοποίηση κι ενδιαφέρον για μάθηση.

**Πρόβλημα**: *Η Μαρία συγκέντρωσε 237 καπάκια από πλαστικά μπουκάλια και ο Γιώργος 345 καπάκια. Θέλουν να τα προσθέσουν για να δουν πόσα έχουν συνολικά. Μετά την πρόσθεση θα τα διαθέσουν για έναν φιλανθρωπικό σκοπό. Πόσα καπάκια έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;*

Με βάση το ομαδοποιημένο μοντέλο δεκαδικής βάσης εξηγούμε στους μαθητές πώς μπορεί να αναλυθεί ο αριθμός 237 και ο αριθμός 345.

Το 237 συνίσταται από 

Το 345 συνίσταται από 

Παροτρύνουμε να προσθέσουν τα παιδιά ως εξής: 100 κυκλάκια (τα οποία αναπαριστούν τα καπάκια) και 100 μας κάνουν 200 και άλλα 100 μας κάνουν 300, και άλλα 100 μας κάνουν 400 και 100 μας κάνουν 500 κυκλάκια (καπάκια). Στη συνέχεια λέμε 500 κυκλάκια και 10 από τη μία δεκάδα μας κάνουν 510, και 10 μας κάνουν 520, 530, 540, 550, 560, 570. Μέχρι τώρα έχουμε 570 καπάκια και στη συνέχεια προσθέτουμε στα 570, τα κυκλάκια (καπάκια) που είναι μόνα τους και όχι ομαδοποιημένα ως εξής: 570 και 1 μας κάνουν 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582. Επομένως η πρόσθεση

 2 3 7

+3 4 5

μας δίνει αποτέλεσμα 5 8 2 καπάκια (χωρίς να πρέπει να γνωρίζουμε τον τυπικό αλγόριθμο της πρόσθεσης).

Έπειτα, παροτρύνουμε τους μαθητές να προσθέσουμε κάθετα τους αριθμούς για να βγάλουμε παράλληλα το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και με τα σύμβολα. Οι αριθμοί που προκύπτουν είναι:

| Ε | Δ | Μ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 |
| +3 | 4 | 5 |
| 5 | 7 | 12 |

Η πρόσθεση στη στήλη των μονάδων σχολιάζεται ως εξής; Γιατί δεν έβγαλα το ίδιο αποτέλεσμα, έκανα κάποιο λάθος στην πρόσθεση; Τι συνέβη στη στήλη των μονάδων και των δεκάδων; Πώς θα κάνω την πρόσθεση στη στήλη των μονάδων καθώς το άθροισμα των δύο αριθμών ξεπερνάει το 9;

**IV. Ανάλυση έργου**

Η ανάλυση έργου εστιάζει στην κατανομή αποφάσεων: τι θα κάνει ο εκπαιδευτικός και τι θα κάνουν οι μαθητές, ως μαθησιακό συμβόλαιο, το οποίο θα τους δώσει τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν τη διδασκαλία, να την ελέγξουν και στο τέλος να εκφράσουν τις μεταγνωστικές τους εμπειρίες (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 150). Η ανάλυση έργου επιτυγχάνεται με τη διαμόρφωση έξι γνωστικών ενεργειών:

1. Προσανατολισμός της σκέψης των μαθητών για το έργο (τι θα μάθουμε: την τριψήφια πρόσθεση με κρατούμενο), τη διαδικασία (πώς θα την μάθουμε: με σχηματοποιήσεις και με συμβολικό τρόπο) και πρωτίστως για τους ρόλους του εκπαιδευτικού και των μαθητών για την κατανομή των αποφάσεων (τι θα κάνει ο καθένας).
2. Επίδειξη από τον εκπαιδευτικό με επεξηγήσεις του τρόπου σκέψης και δράσης, σαν να επιλύει το δικό του πρόβλημα για παρατήρηση και μίμηση προτύπου από τους μαθητές.
3. Εκμάθηση του έργου από τους μαθητές με πρακτική εργασία και σχηματοποιήσεις του ενεργήματος με εξωτερική καθοδήγηση του εκπαιδευτικού.
4. Εκμάθηση του έργου με φωναχτό λόγο (λεκτική αυτοκαθοδήγηση), ώστε λόγος και πράξη να υποστηρίζονται αμοιβαία για εσωτερίκευση του τρόπου σκέψης και τη μετατροπή του σε νοερό.
5. Μεταβίβαση του τρόπου σκέψης με σιωπηρό λόγο (σιωπηρή αυτοκαθοδήγηση), όπου οι μαθητές δίνουν οδηγίες στον εαυτό τους «τι να προσέξουν» στην

εφαρμογή του ενεργήματος.

6. Εφαρμογή του ενεργήματος (τι θα κάνω, πώς, γιατί, για ποιο σκοπό) με αυτοέλεγχο, με σκοπό τη γενίκευση (μεταφορά μάθησης και σε άλλες παρόμοιες περιπτώσεις), την αύξηση του βαθμού κατοχής (ποιότητα τελικού προϊόντος με βάση την κλίμακα μαθησιακής ιεραρχίας) και την αύξηση του επιπέδου αφομοίωσης (χρήση εναλλακτικών τρόπων) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 58).

**V. Μετατροπή του αντικειμένου διδασκαλίας σε πρόβλημα**

Ο εκπαιδευτικός σε φάση προβληματισμού ρωτάει τον εαυτό του φωναχτά πώς θα πραγματοποιήσει την πρόσθεση

| Ε | Δ | Μ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 |
| +3 | 4 | 5 |
| 5 | 7 | 12 |

όταν στη στήλη των μονάδων το άθροισμα των μονάδων ξεπερνάει το 9. Προσδιορίζει το ζητούμενο (το σημαντικό σημείο), ως αφόρμηση προβληματισμού για να αποτελέσει στη συνέχεια το πρότυπο για παρατήρηση και μίμηση (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 151).

**Β. Διεξαγωγή μεθόδευσης διδασκαλίας γνωστικής μαθητείας**

**Ι. Φάση. Μαθησιακό συμβόλαιο/Προσανατολισμός των μαθητών**

Σε αυτή τη φάση προσανατολίζεται η σκέψη των μαθητών στο έργο (τι θα μάθουμε) και συγκεκριμένα την πρόσθεση τριψήφιων αριθμών με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και εξηγούνται στους μαθητές οι ρόλοι: τι θα κάνει ο εκπαιδευτικός (θα δείξει και θα εξηγήσει, θα καθοδηγήσει να κάνουν το ίδιο στο τετράδιό τους) και τι θα κάνουν εκείνοι (θα το ξανακάνουν και θα το λένε φωναχτά, ψιθυριστά και θα δίνουν οδηγίες στον εαυτό «τι να προσέξουν» π.χ. να ομαδοποιήσω τις 10 Μ, έτσι ώστε να τις κάνω 1 Δ και να τη γράψω στη στήλη των δεκάδων ως κρατούμενο) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 152).

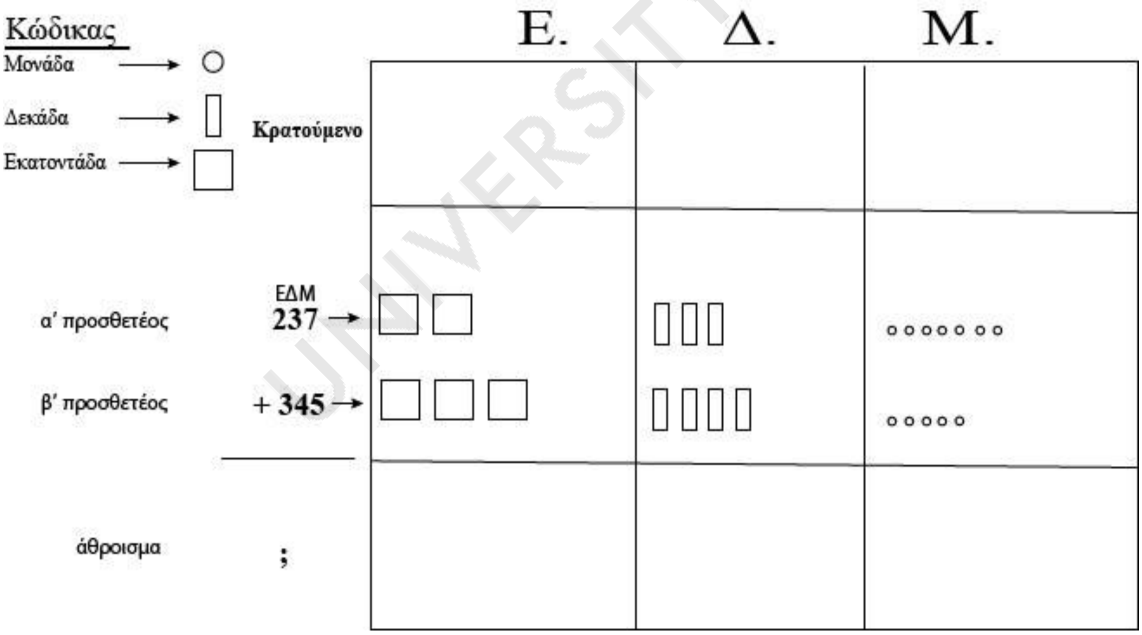
**ΙΙ. Φάση. Προτυποποίηση / Μοντελοποίηση του ενεργήματος**

Η διδασκαλία σε αυτό το βήμα επικεντρώνεται στο να διδάξει τους μαθητές τις διαδικασίες που περιλαμβάνονται στην εφαρμογή των αλγόριθμων. Σε αυτή τη φάση ο εκπαιδευτικός δείχνει και εξηγεί πώς σκέφτεται. Γράφει την τριψήφια πρόσθεση 237

+ 345

στον πίνακα όπου στη στήλη των μονάδων οι μονάδες ξεπερνούν σε άθροισμα το 9 και ρωτάει τον εαυτό του τι θα κάνει. Για την επίτευξη του διδακτικού στόχου σ' αυτή τη φάση χρησιμοποιείται ο τρίτος τρόπος αναπαράστασης του, αυτός της *σχηματοποίησης*.

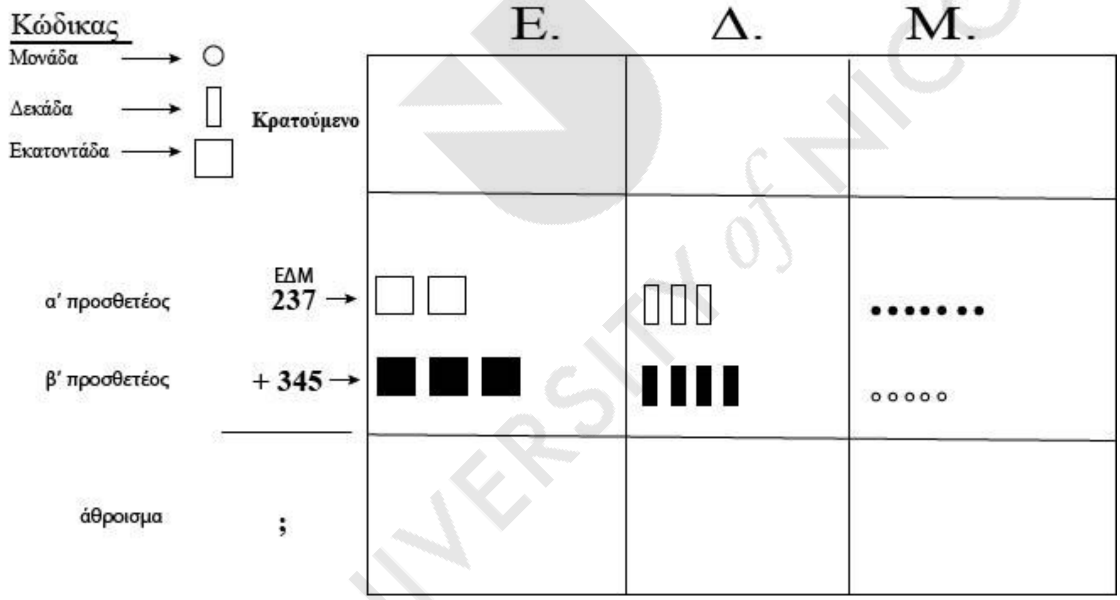
***γ. Σχηματοποίηση***. Ο εκπαιδευτικός δημιουργεί στον πίνακα το παρακάτω πλαίσιο (Βλ. Σχήμα 3.3.), όπου οι συμβολικοί αριθμοί της τριψήφιας πρόσθεσης αναπαρίστανται με μία μη συμβολική μορφή, δηλαδή αναπαρίστανται ως ποσότητα με τη μορφή σχημάτων. Η σχηματοποίηση που χρησιμοποιείται έρχεται ως αποτέλεσμα της επαφής των μαθητών με τα πραξιακά σύμβολα του ομαδοποιήσιμου και ομαδοποιημένου μοντέλου δεκαδικής βάσης. Αυτό σημαίνει πως η 1 (μία) εκατοντάδα ▦ αναπαρίσταται ως □ ένα τετράγωνο σχήμα, η 1 (μία) δεκάδα ⁞ ως ένα ▯ ορθογώνιο σχήμα και η μία (1) μονάδα ● ως ○ κύκλος.




*Σχήμα 3.3. Σχηματική αναπαράσταση των ποσοτήτων των συμβολικών αριθμών*

Οι ποσότητες παρουσιάζονται με σχηματική αναπαραστατική μορφή αρχικά, και ο εκπαιδευτικός εξηγεί τι κάνει, ώστε η σαφής έκφραση των βημάτων συλλογισμού (λόγος) και η πράξη να ενισχύονται αμοιβαία (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153). Στόχος σε αυτό το βήμα είναι η σωστή σχηματική απεικόνιση των συμβολικών ποσοτήτων χωρίς να προβούμε ακόμη στη σχηματική πρόσθεση των ποσοτήτων.

Στη συνέχεια για να εισάγουμε τη στρατηγική min, δηλαδή πρόσθεση από τον μεγαλύτερο όρο, χρωματίζουμε τη μεγαλύτερη ποσότητα με μαύρο ή κόκκινο χρώμα και το μοντέλο της σχηματοποιημένης πρόσθεσης έχει την παρακάτω μορφή (Σχήμα 3.4.). Στόχος με τον χρωματισμό της μεγαλύτερης ποσότητας είναι να διευκολυνθεί η συγκέντρωση του μαθητή στο ξεκίνημα της πρόσθεσης από αυτή.



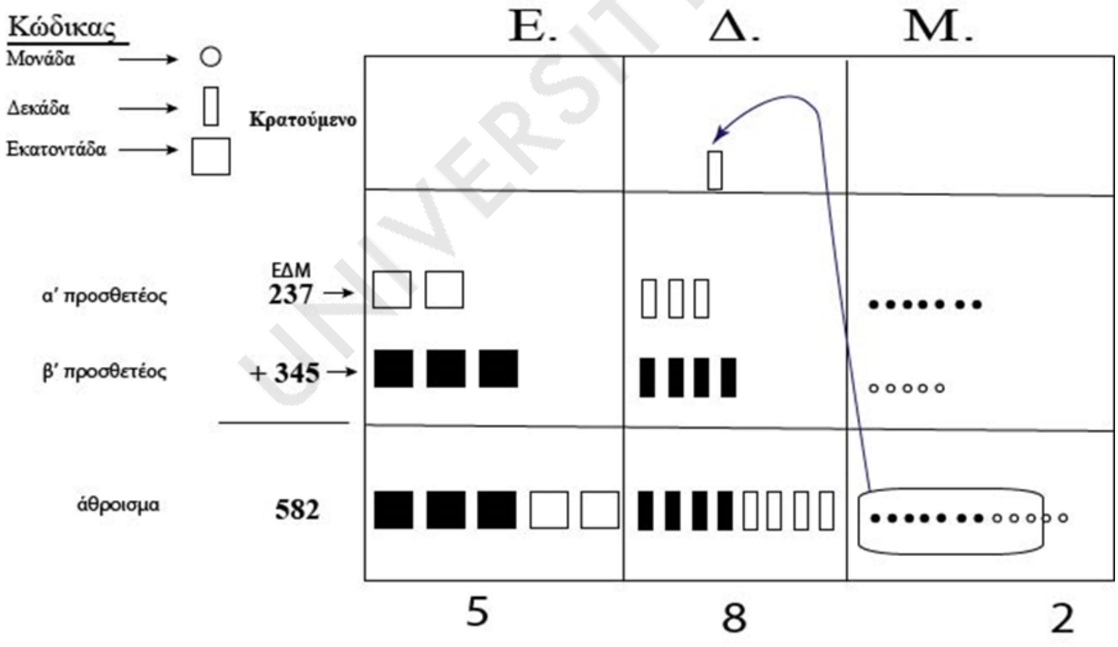

*Σχήμα 3.4. Σχηματική αναπαράσταση των ποσοτήτων με επισήμανση της μεγαλύτερης ποσότητας*

Το παραπάνω σχηματοποιημένο μοντέλο υποβοηθείται από τον λεκτικό τύπο αναπαράστασης των αριθμών, αυτών των αριθμολέξεων, αλλά και της λεκτικής επένδυσης της σχηματικής διαδικασίας επίλυσης του αλγόριθμου της πρόσθεσης.

***δ. Προφορικός λόγος/Λεκτική επένδυση.*** Ανακεφαλαιώνουμε τι κάναμε, ό,τι αναπαραστήσαμε τις ποσότητες που εκφράζουν οι αριθμοί με σχήματα στο πλαίσιο που φτιάξαμε και συνεχίζουμε με τη λεκτική επένδυση της σχηματικής πράξης της πρόσθεσης. Η λεκτική επένδυση αυτής γίνεται ως εξής:

Ξεκινάω την κάθετη πρόσθεση πάντα από τη στήλη των μονάδων και από τη μεγαλύτερη ποσότητα και λέω: 7 μονάδες και 5 μονάδες μου κάνουν 12 (εξηγούμε εδώ πως ξεκινάμε την πρόσθεση πάνω από το 7 χωρίς να ξαναπούμε το 7). Αφήνω τις 2 μονάδες στη στήλη των μονάδων και τις άλλες 10 τις ομαδοποιώ έτσι ώστε να τις κάνω 1 Δ και να τη γράψω στη στήλη των δεκάδων ως κρατούμενο. Στη συνέχεια πάω στη στήλη των δεκάδων και προσθέτω ως εξής: 4 δεκάδες και 3 δεκάδες μου κάνουν 7 και 1 (μία) επιπλέον δεκάδα που προέκυψε ως κρατούμενο μου κάνουν 8 δεκάδες. Τέλος πάω στη στήλη των εκατοντάδων και προσθέτω ως εξής: 3 εκατοντάδες και 2 εκατοντάδες μου κάνουν 5.

Το αποτέλεσμα της σχηματοποιημένης πρόσθεσης είναι 5 8 2, και το τελικό σχηματοποιημένο μοντέλο έχει τη μορφή που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.5.




*Σχήμα 3.5. Τελική μορφή του σχηματοποιημένου μοντέλου πρόσθεσης*

Επιπρόσθετος στόχος του τελικού σχηματοποιημένου μοντέλου είναι η *γεφύρωση προς τα εμπρός*. Πρόκειται για τη στρατηγική πρόσθεσης κατά την οποία κάνουμε διαδοχικές προσθέσεις μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα (Καραγιαννάκης, 2018, σελ. 53). Αυτός ο στόχος επιτυγχάνεται στην οριζόντια στήλη του αθροίσματος του τελικού μοντέλου στη στήλη των μονάδων. Συγκεκριμένα, αφού προσθέσαμε με τους μαθητές 7+5=12, ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη ποσότητα και ανεβαίνοντας ένα ένα, στο άθροισμα του τελικού μοντέλο στη στήλη των μονάδων, εξασκούμε τους μαθητές στη γεφύρωση προς τα εμπρός ως εξής: πως θα προσθέσω εύκολα τις ποσότητες 7 ••••••• + 5 ∘∘∘∘∘ ; Θα προσθέσω 7+3 = 10 $\boxed{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ}$ ∘∘ Τώρα που έφτασα στο 10 είναι εύκολο να υπολογίσω 10 + άλλα 2 μου κάνουν 12.

***ε. Συμβολικό στάδιο.*** Αμέσως μετά το σχηματικό στάδιο πρόσθεσης των ποσοτήτων ακολουθεί η άμεση σύνδεση της συμβολικής μορφής της πράξης της πρόσθεσης για να αντιληφθεί ο μαθητής τη σχέση μεταξύ συμβόλων και της σχηματικής εκτέλεσης της πράξης που προηγήθηκε.

| | Ε | Δ | Μ |
|---|---|---|---|
| | | 1 | |
| | 2 | 3 | **7** |
| + | 3 | 4 | 5 |
| | 5 | 8 | 2 |

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\phantom{0} \\ 2\,3\,7 \\ +\ 3\,4\,5 \\ \hline 5\,8\,2 \end{array}$$

Η λεκτική επένδυση της συμβολικής πρόσθεσης είναι ομόλογη με τη λεκτική επένδυση της σχηματικής πρόσθεσης, ωστόσο μπορεί να χαρακτηριστεί πιο απλή προκειμένου να αποκτηθεί η απαραίτητη ακρίβεια και ταχύτητα.

Ξεκινάω την κάθετη πρόσθεση πάντα από τη στήλη των μονάδων και από το μεγαλύτερο αριθμό και λέω: 7 και 5 μου κάνουν 12. Αφήνω τις 2 μονάδες στη στήλη των μονάδων και τις άλλες 10 τις ομαδοποιώ έτσι ώστε να τις κάνω 1 Δ και να τη γράψω στη στήλη των δεκάδων ως κρατούμενο. Στη συνέχεια πάω στη στήλη των δεκάδων και προσθέτω ως εξής: 4 και 3 μου κάνουν 7 και 1 κρατούμενο μου κάνουν 8. Τέλος, πάω στη στήλη των εκατοντάδων και προσθέτω ως εξής: 3 και 2 μου κάνουν 5. Το αποτέλεσμα της συμβολικής πρόσθεσης είναι 5 8 2.

Η σχηματοποίηση / μοντελοποίηση των ποσοτήτων έχει ως στόχο την κατανόηση από τους μαθητές των πληθικότητας των συμβολικών αριθμών και της αναπαράστασης αυτών για την ενδυνάμωση της μη συμβολικής και συμβολικής διάκρισης και την ενδυνάμωση της οπτικοχωρικής μνήμης. Παράλληλα η κωδικοποίηση των δύο συνόλων των αριθμητικών συμβόλων και των σχέσεων τους ως προσθετική δομή σε ξεχωριστές στήλες (ανάλυση σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση της θεσιακής αξίας της πληθικής σχέσης του κάθε αριθμητικού συμβόλου.

Με τη βοήθεια της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης της αναπαράστασης των ποσοτήτων αναμένεται αρχικά οι μαθητές να κατανοήσουν τα δύο σύνολα και την προσθετική τους σχέση αναπαραστατικά, καθώς υποβοηθούνται το λεκτικό και οπτικό κανάλι επεξεργασίας των πληροφοριών που υποστηρίζουν τη μνήμη εργασίας, και στη συνέχεια να μεταβούν σε αυτή τη σχέση με τη συμβολική αριθμητική έκφραση των ποσοτήτων.

Οι μαθητές με την προτυποποίηση του ενεργήματος βλέπουν τη διαδικασία που βρίσκεται πίσω από την αφηρημένη μορφή του αλγόριθμου της πρόσθεσης και διαμορφώνουν μια νοητική εικόνα τόσο των ποσοτήτων όσο και των διαδικασιών του εκπαιδευτικού για την επίλυση αυτού και αποκτούν το πρότυπο του λύτη μιας αλγοριθμικής διαδικασίας (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Εκτελούν το ίδιο έργο στο τετράδιό τους με τη σκαλωσιά που στήνει ο εκπαιδευτικός **(Εξωτερική καθοδήγηση).** Προσδιορίζουν το ζητούμενο (εκμάθηση πρόσθεσης με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων, εξηγούν τι θα κάνουν (θα αναπαραστήσουν τις ποσότητες των συμβολικών αριθμών και θα τις προσθέσουν), εκτελούν την πράξη (θα κάνουν στη συνέχεια το ίδιο με τους συμβολικούς αριθμούς) και δίνουν την απάντηση (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Επαναλαμβάνουν με φωναχτό λόγο **(Λεκτική αυτοκαθοδήγηση)** τα βήματα του συλλογισμού για να βοηθήσουν την εργαζόμενη μνήμη στη συγκράτηση των πληροφοριών. Παράλληλα εκπαιδεύονται στο να επιλογίζονται στα σημεία που τους δυσκολεύουν (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Επαναλαμβάνουν ψιθυριστά **(Σιωπηρή αυτοκαθοδήγηση)** τα βήματα του συλλογισμού (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153). Η επανάληψη προκαλεί επαναδραστηριοποίηση της πληροφορίας μέσω της διαδικασίας της εσωτερικής επανεμφάνισης.

Δίνουν οδηγίες στον εαυτό τους τι να προσέξουν **(Μεταγνώση)** (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Αναφέρονται στο ενέργημα δράσης: τι έκανα, πώς, γιατί **(ιδιωτικός λόγος).** Ο ιδιωτικός λόγος ή λεκτική έκφραση εξυπηρετείται καλύτερα με τη χρήση οδηγιών στον εαυτό και τη μοντελοποίηση, ως εργαλείων διαμεσολάβησης. Με τη λεκτική έκφραση ο μαθητής αυτορρυθμίζεται, συγκεκριμενοποιούνται τα βήματα της διαδικασίας, ολοκληρώνεται και επιλογίζεται το ενέργημα της σκέψης και της δράσης (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

**ΙΙΙ. Φάση. Εξάσκηση με φθίνουσα καθοδήγηση / Επικύρωση του ενεργήματος**

Οι μαθητές εκτελούν όμοιες απεικονιστικές μοντελοποιήσεις προσθέσεων όπως η αρχική μέχρι να φτάσουν στο σημείο να επιλύουν μόνοι τους χωρίς καθοδήγηση. Οι μαθητές εκτελούν προσθέσεις σε συμβολικό επίπεδο και με τη χρήση σκαλωσιάς υποστηρίζονται μέχρι να μπορούν να ανταποκριθούν μόνοι τους.

Σκοπός σε αυτή τη φάση είναι η αύξηση του βαθμού εξομοίωσης με το πρότυπο. Η εσωτερίκευση της διαδικασίας εν γένει εκλαμβάνεται ως μετασχηματισμός της διαψυχολογικής διαδικασίας (της διάδρασης με τον εκπαιδευτικό) σε ενδοψυχολογική διαδικασία (διάδραση με τον εαυτό) (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ. 217).

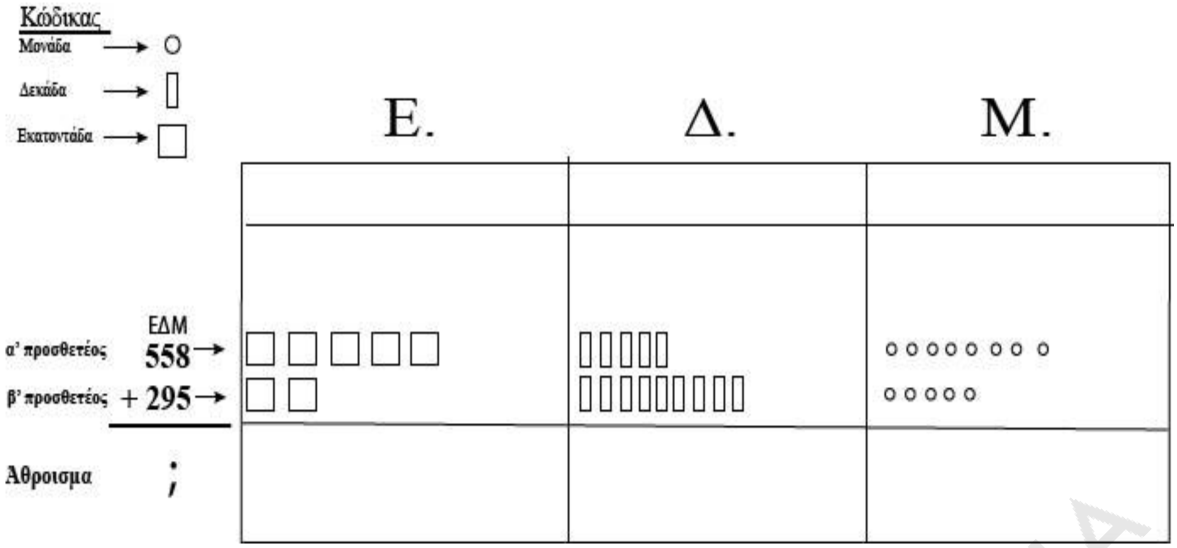
**IV. Φάση. Αξιολόγηση μαθητών / εσωτερική και εξωτερική ανατροφοδότηση**

Ο μαθητής αναφέρεται ο ίδιος στην πρόοδό του, πόσο τα κατάφερε σε σχέση με τον αρχικό στόχο και δέχεται θετική εξωτερική ανατροφοδότηση από τον εκπαιδευτικό. Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την πρόοδο του μαθητή με φύλλο ελέγχου σε σχέση με τις προηγούμενες επιδόσεις του και την ανταπόκρισή του στο ρόλο (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 154).

Οι προαναφερόμενες φάσεις της διδασκαλίας ακολουθούν τη διδασκαλία του αλγόριθμου της πρόσθεσης με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων, γι’ αυτό επιδεικνύεται μόνο η φάση της Προτυποποίησης / Μοντελοποίησης του ενεργήματος.

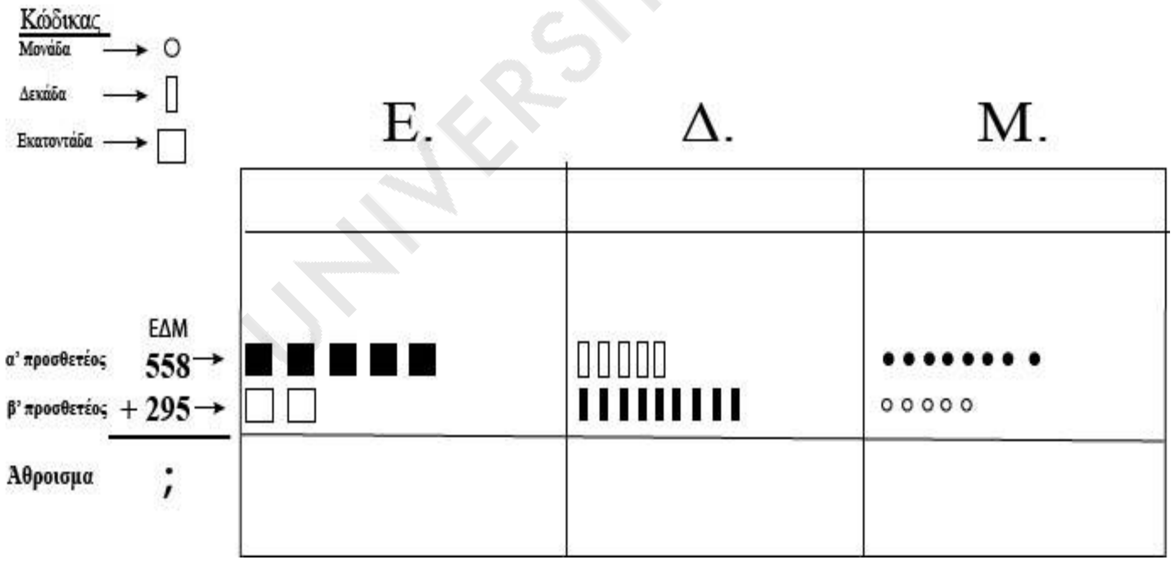
**ΙΙ. Φάση. Προτυποποίηση / Μοντελοποίηση του ενεργήματος στην τριψήφια πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων**

Γράφουμε τους αριθμούς 5 5 8 + 2 9 5 κάθετα και αριστερά του παρακάτω πλαισίου που δημιουργούμε στον πίνακα και στη συνέχεια οι ποσότητες των δύο προηγούμενων αριθμών αναπαρίστανται με σχήματα. Ο κώδικας αναπαράστασης των ποσοτήτων είναι ίδιος με την αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε για την κάθετη πρόσθεση τριψήφιων αριθμών με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων. Αφού αναπαραστήσουμε τους αριθμούς με τις ποσότητες που εκφράζουν προκύπτει το παρακάτω σχηματοποιημένο μοντέλο (Σχήμα 3.6.).




*Σχήμα 3.6. Σχηματική αναπαράσταση των ποσοτήτων των συμβολικών αριθμών*

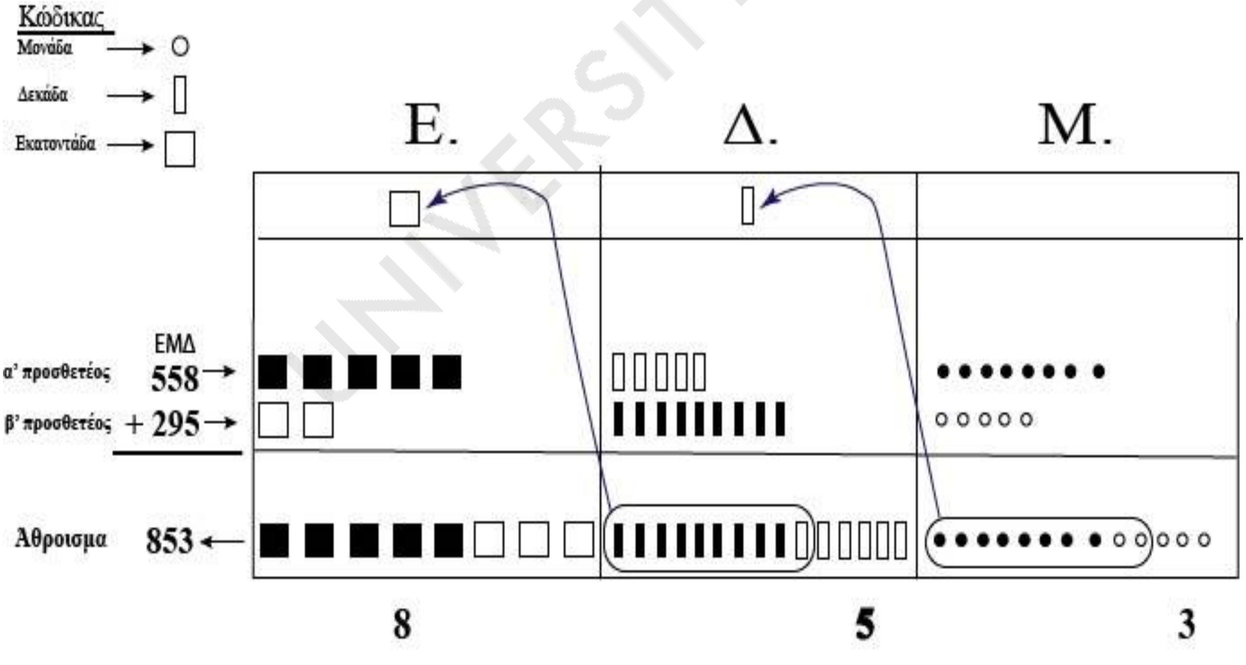
Στη συνέχεια για να εισάγουμε τη στρατηγική min, δηλαδή πρόσθεση από τον μεγαλύτερο όρο, χρωματίζουμε τη μεγαλύτερη ποσότητα με μαύρο χρώμα για να διευκολύνουμε τους μαθητές στη συγκράτηση της μεγαλύτερης ποσότητας και στο ξεκίνημα της πρόσθεσης από αυτήν. Το μοντέλο παίρνει την παρακάτω μορφή (Σχήμα 3.7.).




*Σχήμα 3.7. Σχηματική αναπαράσταση των ποσοτήτων με επισήμανση της μεγαλύτερης ποσότητας*

Η λεκτική επένδυση του σχηματοποιημένου μοντέλου είναι η εξής: Ξεκινάμε την κάθετη πρόσθεση πάντα από τη στήλη των μονάδων και από το μεγαλύτερο αριθμό και λέμε: 8 μονάδες και 5 μονάδες μου κάνουν 13 (εξηγούμε εδώ πως ξεκινάμε την πρόσθεση πάνω από το 8 χωρίς να ξαναπούμε το 8). Αφήνω τις 3 μονάδες στη στήλη των μονάδων και τις άλλες 10 τις ομαδοποιώ έτσι ώστε να τις κάνω 1 Δ και να τη γράψω στη στήλη των δεκάδων ως κρατούμενο. Στη συνέχεια πάω στη στήλη των δεκάδων και προσθέτω ως εξής: 9 δεκάδες και 5 δεκάδες μου κάνουν 14 και 1 (μία) επιπλέον δεκάδα που προέκυψε ως κρατούμενο μου κάνουν 15 δεκάδες. Αφήνω τις 5 δεκάδες στη στήλη των δεκάδων και τις άλλες 10 τις ομαδοποιώ έτσι ώστε να τις κάνω 1 εκατοντάδα και να τη γράψω στη στήλη των εκατοντάδων ως κρατούμενο. Τέλος πάω στη στήλη των εκατοντάδων και προσθέτω: 5 εκατοντάδες και 2 εκατοντάδες μου κάνουν 7 και 1 (μία) επιπλέον εκατοντάδα που προέκυψε ως κρατούμενο μου κάνουν 8.

Το αποτέλεσμα της σχηματοποιημένης πρόσθεσης είναι 8 5 3 και το μοντέλο μετά την πρόσθεση των ποσοτήτων έχει την παρακάτω μορφή (Σχήμα 3.8.).




*Σχήμα 3.8. Τελική μορφή του σχηματοποιημένου μοντέλου πρόσθεσης*

Αμέσως μετά το σχηματικό στάδιο πρόσθεσης των ποσοτήτων ακολουθεί η άμεση σύνδεση της συμβολικής μορφής της πράξης της πρόσθεσης για να αντιληφθεί ο μαθητής τη σχέση μεταξύ συμβόλων και της σχηματικής εκτέλεσης της πράξης που προηγήθηκε.

| | Ε | Δ | Μ |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| | 5 | 5 | 8 |
| + | 2 | 9 | 5 |
| | 8 | 5 | 3 |

$$
\begin{array}{r}
1\,1\phantom{\,5} \\
5\,5\,8 \\
+\ 2\,9\,5 \\
\hline
8\,5\,3
\end{array}
$$

Η λεκτική επένδυση της συμβολικής πρόσθεσης είναι αντίστοιχα ομόλογη της λεκτική επένδυσης της σχηματικής πρόσθεσης, ωστόσο μπορεί να χαρακτηριστεί πιο απλή προκειμένου να αποκτηθεί η απαραίτητη ακρίβεια και ταχύτητα.

Ξεκινάω την κάθετη πρόσθεση πάντα από τη στήλη των μονάδων και από το μεγαλύτερο αριθμό και λέω: 8 και 5 μου κάνουν 13. Αφήνω τις 3 μονάδες στη στήλη των μονάδων και τις άλλες 10 τις ομαδοποιώ έτσι ώστε να τις κάνω 1 Δ και να τη γράψω στη στήλη των δεκάδων ως κρατούμενο. Στη συνέχεια πάω στη στήλη των δεκάδων και προσθέτω ως εξής: 9 και 5 μου κάνουν 14 και 1 κρατούμενο μου κάνουν 15. Αφήνω τις 5 δεκάδες στη στήλη των δεκάδων και τις άλλες 10 τις ομαδοποιώ έτσι ώστε να τις κάνω 1 εκατοντάδα και να τη γράψω στη στήλη των εκατοντάδων ως κρατούμενο. Τέλος πάω στη στήλη των εκατοντάδων και προσθέτω ως εξής: 5 και 2 εκατοντάδες μου κάνουν 7 και 1 κρατούμενο μου κάνουν 8. Το αποτέλεσμα της συμβολικής πρόσθεσης είναι 8 5 3.

### 3.5.5.4. Σχέδιο μεθόδευσης διδασκαλίας αλγόριθμου αφαίρεσης με αναδόμηση-μετατροπή μειωτέου στη στήλη των δεκάδων, μέσω της μοντελοποίη-

**σης/σχηματοποίησης με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.**

**Α. Προγραμματισμός μεθόδευσης διδασκαλίας γνωστικής μαθητείας** (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 148-154)

**Ι. Αντικείμενο πρόσληψης / εσωτερίκευσης διδασκαλίας**

Το αντικείμενο πρόσληψης/εσωτερίκευσης της διδασκαλίας προσδιορίζεται και είναι αυτό της τριψήφιας αφαίρεσης με αναδόμηση-μετατροπή μειωτέου στη στήλη των δεκάδων (αλγόριθμος της αφαίρεσης με δανεικό). (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 148),

**ΙΙ. Προηγούμενο γνωστικό επίπεδο**

Εντοπίζεται το προηγούμενο γνωστικό επίπεδο των μαθητών, ως προαπαιτούμενο και προπαρασκευαστικό για τη νέα μάθηση (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 148).

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους αριθμητικούς συνδυασμούς εύρεσης διαφοράς.

**ΙΙΙ. Διδακτικοί Στόχοι**

Διατυπώνονται οι διδακτικοί στόχοι – ικανότητες και δεξιότητες.

Στόχοι – ικανότητες είναι: (α) η μοντελοποίηση / σχηματοποίηση της τριψήφιας αφαίρεσης με αναδόμηση-μετατροπή μειωτέου στη στήλη των δεκάδων (αλγόριθμος της αφαίρεσης με δανεικό), (β) η σύνδεση της μοντελοποιημένης αφαίρεσης με τη συμβολική της έκφραση (εκμάθηση του αλγόριθμου της αφαίρεσης με αναδόμηση-μετατροπή μειωτέου).

Στόχοι – δεξιότητες είναι του *λέγειν* (να επαναλαμβάνουν τα βήματα), του *πράττειν* (να εκτελούν σχηματοποιημένες αφαιρέσεις και με τη συμβολική τους έκφραση), του *είναι* (να εφαρμόζουν το μαθησιακό συμβόλαιο ως παρακολούθηση, έλεγχο και έκφραση μεταγνωστικών εμπειριών, του *γίγνεσθαι* (να εξηγούν το σχέδιο μοντελοποίησης της αφαίρεσης), του *μεταφέρειν* (να εφαρμόζουν τον κανόνα «τα δέκα κάνουν ένα» και τη θεσιακή αξία ψηφίου και σε άλλες αφαιρέσεις) και του *προ-*

*σαρμόζειν* (να διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στις αφαιρέσεις με και χωρίς δανεικό (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 149).

Οι στόχοι - δεξιότητες δηλώνουν τη δραστηριότητα των μαθητών και για την υλοποίησή τους κρίνεται απαραίτητο να προσδιοριστεί η μεθοδολογική συνθήκη και το κριτήριο απόδοσης/επιτυχίας, έτσι οι μαθητές θα πρέπει: Να εκτελούν αφαιρέσεις με δανεικό: στόχοι δεξιότητες του *λέγειν*, του *είναι*, του *γίγνεσθαι,* του *μεταφέρειν,* του *προσαρμόζειν* (ως δραστηριότητα), ακολουθώντας τις φάσεις της μαθησιακής ιεραρχίας: εκμάθηση, διατήρηση, γενίκευση, διάκριση (ως μεθοδολογική συνθήκη), εκτελώντας σωστά τις 9 από τις 10 αφαιρέσεις (ως κριτήριο απόδοσης) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 149).

Οι συνθήκες υλοποίησης των στόχων στη διδασκαλία / μάθηση των αλγόριθμων των πράξεων της αφαίρεσης, υποστηρίζονται από τους πέντε διακριτούς τύπους αναπαραστάσεων των εννοιών 1) καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, 2) χειραπτικά υλικά, 3) εικόνες, 4) γραπτά σύμβολα και 5) προφορική γλώσσα. (Σαλβαράς, 2011, σελ. 19· Van de Walle, 2005, σελ. 46) προστιθέμενους σ’ αυτούς ο τύπος της σχηματοποίησης της παρούσας μελέτης.

Σ’ αυτή τη φάση του προγραμματισμού υλοποιούνται οι δύο τύποι αναπαραστάσεων: α. Χειραπτικά υλικά και β. Καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

***α. Χειραπτικά υλικά***. Επειδή στόχος είναι η εισαγωγή του μαθητή στην έννοια και χρήση της αφαίρεσης, η οποία εκφράζει την έννοια της απόσπασης – απομάκρυνσης ενός τμήματος ενός αριθμού ή μιας ποσότητας, από μια άλλη, οι μαθητές εξασκούνται αρχικά με το ομαδοποιήσιμο μοντέλο στην εύρεση υπολοίπου. Για παράδειγμα πόσο μας κάνει 6-4; Έχω 6 μονάδες (κυκλάκια) και αφαιρώ – αποσπώ – απομακρύνω τις 4 μονάδες και μου μένουν 2 

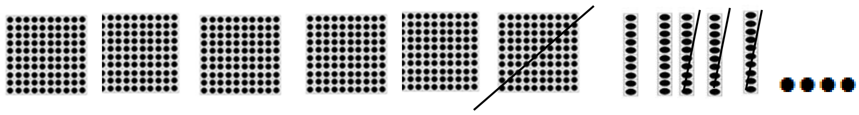
Επειδή η αναδόμηση μειωτέου στηρίζεται στην αρχή ότι μια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί – αναπαρασταθεί με αριθμούς διαφορετικής τάξης μεγέθους, χωρίς να αλλάξει η ποσότητα, αρκεί κατά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις να τηρούνται οι προϋποθέσεις της κοινής βάσης του αριθμητικού συστήματος (του δέκα) και της θεσιακής αξίας, γράφουμε τους αριθμούς 6 5 4 – 1 3 6 και χωρίς να τους αφαιρέσουμε, ζητάμε απλά να αναπαρασταθούν με βάση το ομαδοποιήσιμο μοντέλο δεκαδικής βάσης. Έτσι για παράδειγμα το 654 μπορεί να αναπαρασταθεί είτε ως 6 εκατοντάδες, 5 δεκάδες και 4 μονάδες, είτε ως 5 εκατοντάδες, 15 δεκάδες και 4 μονάδες, είτε ως 5 εκατοντάδες, 14 δεκάδες και 14 μονάδες χωρίς να αλλάξει το μέγεθός του. Το ίδιο ισχύει και για το 136. Οι μαθητές εξασκούνται αρκετά πριν την εφαρμογή του σχηματοποιημένου μοντέλου.

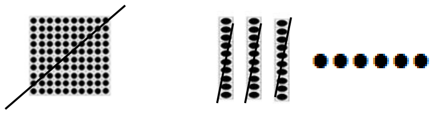
***β. Καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Αφαίρεση τριψήφιων αριθμών με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων με πραγματικό-απεικονιστικό υλικό στη βάση του ομαδοποιημένου μοντέλου δεκαδικής βάσης.***

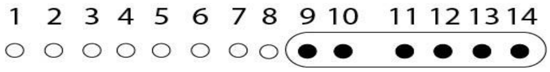
Η διαδικασία ξεκινά με την αφαίρεση πραγματικών υλικών στη βάση ενός προβλήματος. Με την παράθεση ενός προβλήματος τριψήφιας αφαίρεσης επιδιώκουμε να προβληματίσουμε τους μαθητές για κάποιες συγκεκριμένες καταστάσεις που διαμορφώνουν το πρόβλημα και προκαλούν κίνητρο για ενεργοποίηση κι ενδιαφέρον για μάθηση.

**Πρόβλημα**: *Η Μαρία συγκέντρωσε 654 καπάκια από πλαστικά μπουκάλια και έδωσε στον Γιώργο 136 καπάκια. Πόσα καπάκια της έμειναν;*

Με βάση το ομαδοποιημένο μοντέλο δεκαδικής βάσης εξηγούμε στους μαθητές πώς μπορεί να αναλυθεί ο αριθμός 654 και ο αριθμός 136.

Το 654 συνίσταται από 

Το 136 συνίσταται από 

Μετά την αναπαράσταση των αριθμών με τη βοήθεια του ομαδοποιημένου μοντέλου δεκαδικής βάσης, προτρέπουμε τους μαθητές να αφαιρέσουν ως εξής: Από τις 6 εκατοντάδες αφαιρώ-αποσπώ τη 1 και μου μένουν 5. Από τις 5 δεκάδες αφαιρώ τις 3 και μου μένουν 2. Έχω 4 μονάδες να αφαιρέσω – αποσπάσω τις έξι δε γίνεται. Αυτό που μπορώ να κάνω είναι να πάρω τη 1 δεκάδα από τις 2 που μου έμειναν, να τη μετατρέψω σε μονάδες και να τις προσθέσω με τις 4 μονάδες οπότε θα έχω 14 μονάδες συνολικά. Από τις 14 μονάδες μπορώ να αποσπάσω τις 6 

και το αποτέλεσμα είναι 8. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι 5 1 8 χωρίς να πρέπει να γνωρίζουμε τον τυπικό αλγόριθμο της αφαίρεσης.

**IV. Ανάλυση έργου**

Η ανάλυση έργου εστιάζει στην κατανομή αποφάσεων: τι θα κάνει ο εκπαιδευτικός και τι θα κάνουν οι μαθητές, ως μαθησιακό συμβόλαιο, το οποίο θα τους δώσει τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν τη διδασκαλία, να την ελέγξουν και στο τέλος να εκφράσουν τις μεταγνωστικές τους εμπειρίες (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 150).

**V. Μετατροπή του αντικειμένου διδασκαλίας σε πρόβλημα**

Ο εκπαιδευτικός σε φάση προβληματισμού ρωτάει τον εαυτό του φωναχτά πώς θα πραγματοποιήσει την αφαίρεση όταν στη στήλη των μονάδων η αφαίρεση δεν πραγματοποιείται γιατί ο επάνω αριθμός (μειωτέος είναι μικρότερος από τον κάτω αριθμό τον αφαιρετέο. Προσδιορίζει το ζητούμενο (το σημαντικό σημείο), ως αφόρμηση προβληματισμού για να αποτελέσει στη συνέχεια το πρότυπο για παρατήρηση και μίμηση (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 151).

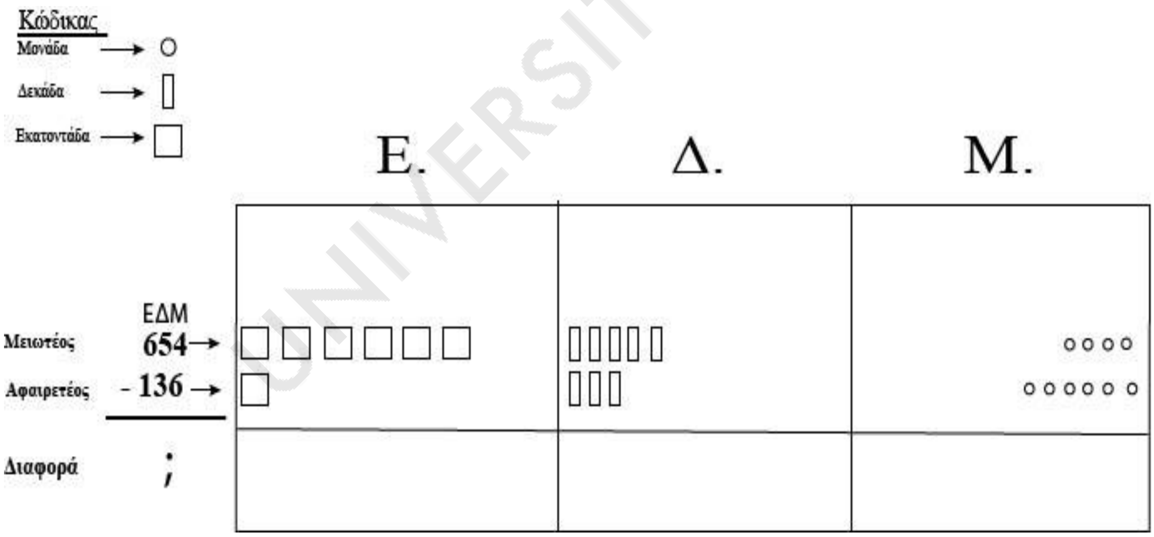
**Β. Διεξαγωγή μεθόδευσης διδασκαλίας γνωστικής μαθητείας**

**Ι. Φάση. Μαθησιακό συμβόλαιο/Προσανατολισμός των μαθητών**

Σε αυτή τη φάση προσανατολίζεται η σκέψη των μαθητών στο έργο (τι θα μάθουμε) και συγκεκριμένα την αφαίρεση τριψήφιων αριθμών με μετατροπή του μειωτέου στη στήλη των δεκάδων και εξηγούνται στους μαθητές οι ρόλοι: τι θα κάνει ο εκπαιδευτικός (θα δείξει και θα εξηγήσει, θα καθοδηγήσει να κάνουν το ίδιο στο τετράδιό τους) και τι θα κάνουν εκείνοι (θα το ξανακάνουν και θα το λένε φωναχτά, ψιθυριστά και θα δίνουν οδηγίες στον εαυτό «τι να προσέξουν» π.χ. να μετατρέψω 1 Δ σε μονάδες και να τις μεταφέρω στη στήλη των μονάδων για να κάνω την αφαίρεση, αλλά και να μειώσω κατά μία τις Δ στη στήλη των δεκάδων) (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 152).

**II. Φάση. Προτυποποίηση / Μοντελοποίηση του ενεργήματος**

***γ. Σχηματοποίηση***. Γράφουμε τους αριθμούς 6 5 4 – 1 3 6 κάθετα και αριστερά του παρακάτω πλαισίου που δημιουργούμε στον πίνακα, και στη συνέχεια οι ποσότητες των δύο προηγούμενων αριθμών αναπαρίστανται με σχήματα. Ο κώδικας αναπαράστασης των ποσοτήτων είναι ίδιος με την αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε για την κάθετη πρόσθεση τριψήφιων αριθμών με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων. Αφού αναπαραστήσουμε τους αριθμούς με τις ποσότητες που εκφράζουν προκύπτει το παρακάτω σχηματοποιημένο μοντέλο (Σχήμα 3.9.)

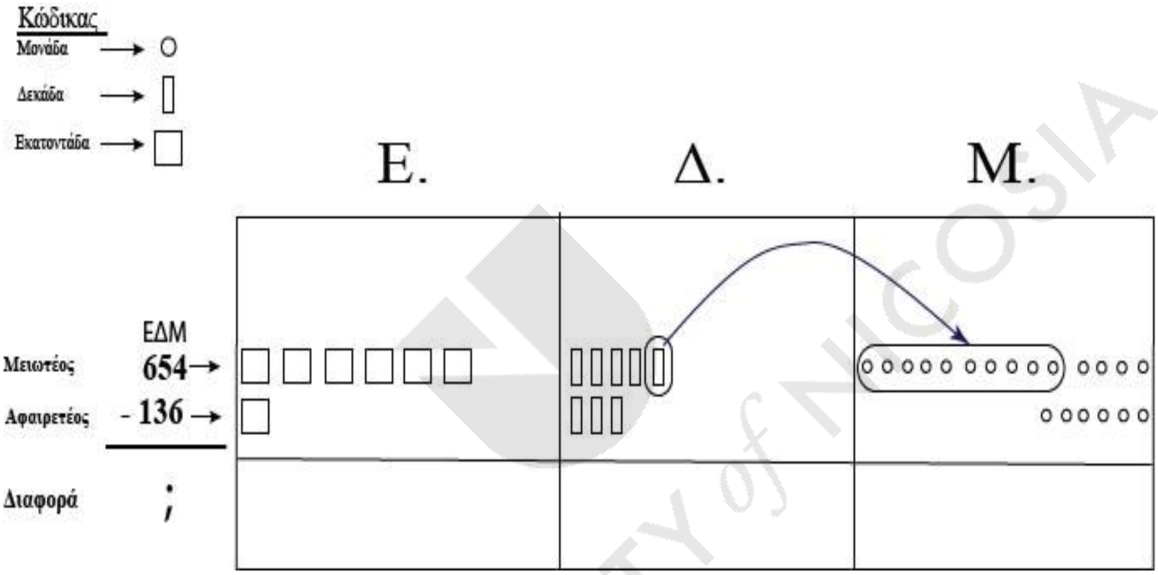



*Σχήμα 3.9. Σχηματική αναπαράσταση των ποσοτήτων των συμβολικών αριθμών στην αφαίρεση*

Μετά την αναπαράσταση των ποσοτήτων ακολουθεί η λεκτική επένδυση της σχηματοποιημένης αφαίρεσης.

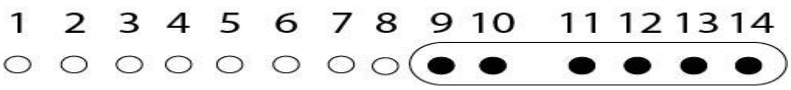
***δ. Προφορικός λόγος/Λεκτική επένδυση.*** Ξεκινάμε την κάθετη αφαίρεση πάντα από τη στήλη των μονάδων και πάντα από τον μειωτέο, δηλαδή τον επάνω αριθμό και λέμε: 4 μονάδες να αφαιρέσω, δηλαδή να απομακρύνω τις 6 μονάδες δε γίνεται. Μετατρέπουμε μια δεκάδα από τις 5 (πέντε) αρχικές που έχουμε σε μονάδες και τις πάμε στη στήλη των μονάδων, οπότε οι μονάδες γίνονται συνολικά 14.

Το σχηματοποιημένο μοντέλο παίρνει την παρακάτω μορφή (Σχήμα 3.10.).




*Σχήμα 3.10. Σχηματική αναπαράσταση των ποσοτήτων των συμβολικών αριθμών και αναδόμηση του μειωτέου στη στήλη των δεκάδων κατά την αφαίρεση*

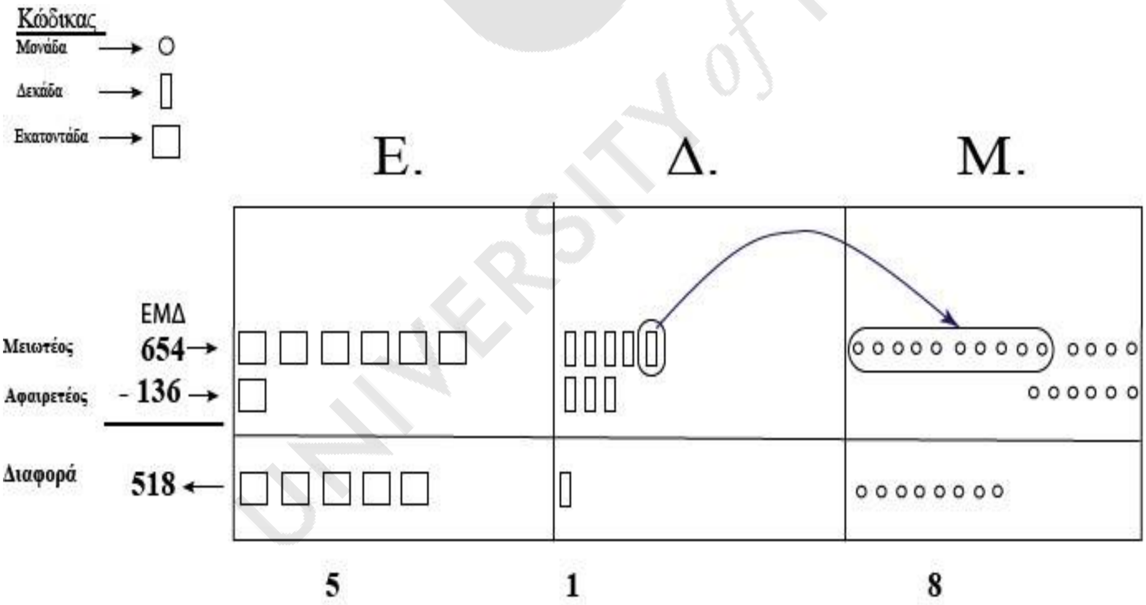
Για τη διευκόλυνση του μαθητή σχηματικά στην έννοια και χρήση της αφαίρεσης, η οποία αναφέρεται στην απόσπαση – απομάκρυνση ενός τμήματος ενός αριθμού ή μιας ποσότητας από μια άλλη, εξασκούμε τον μαθητή στη στρατηγική της *γεφύρωσης προς τα πίσω* (Καραγιαννάκης, 2018, σελ. 72). Πρόκειται για τη στρατηγική αφαίρεσης κατά την οποία κάνουμε διαδοχικές αφαιρέσεις μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αναπαριστούμε τις 14 μονάδες τόσο σχηματικά όσο και συμβολικά και αποσπάμε – απομακρύνουμε τις 6 μονάδες όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η λεκτική επένδυση είναι η εξής: Στόχος μου είναι από τις 14 μονάδες να αφαιρέσω – αποσπάσω τις 6. Αφαιρώ πρώτα τις 4 μονάδες μένοντας έτσι 10 μονάδες και στη συνέχεια αποσπώ τις άλλες 2, με αποτέλεσμα να μου μένουν 8 μονάδες. Στη βάση του παραπάνω σχήματος εξασκούμε επάλληλα τους μαθητές στην αριθμητική διαδικασία της αντίστροφης καταμέτρησης.

Στη συνέχεια πάμε στη στήλη των δεκάδων και λέμε ότι οι δεκάδες του μειωτέου είναι πια 4 και όχι 5, καθώς τη μία δεκάδα την πήραμε και την μετατρέψαμε προηγουμένως σε μονάδες. Επομένως, στη στήλη των δεκάδων λέμε: 4 δεκάδες να αφαιρέσω, να απομακρύνω τις 3 δεκάδες, γίνεται μου κάνει 1 και το γράφω. Τέλος, πάω στη στήλη των εκατοντάδων και λέω 6 εκατοντάδες να αφαιρέσω τη 1 εκατοντάδα μου κάνει 5 εκατοντάδες και το γράφω.

Το τελικό σχηματοποιημένο μοντέλο που προκύπτει έχει την παρακάτω μορφή (Σχήμα 3.11.)




*Σχήμα 3.11. Τελικό σχηματοποιημένο μοντέλο αφαίρεσης*

***ε. Συμβολικό στάδιο.*** Αμέσως μετά το σχηματικό στάδιο αφαίρεσης των ποσοτήτων ακολουθεί η άμεση σύνδεση της συμβολικής μορφής της πράξης της αφαίρεσης για να αντιληφθεί ο μαθητής τη σχέση μεταξύ συμβόλων και της σχηματικής εκτέλεσης της πράξης που προηγήθηκε.

| | Ε | Δ | Μ |
|---|---|---|---|
| | | 4 | 14 |
| | 6 | ~~5~~ | ~~4~~ |
| – | 1 | 3 | 6 |
| | 5 | 1 | 8 |

$$\begin{array}{r} 4\;14 \\ 6\,\cancel{5}\,\cancel{4} \\ -\ 1\ 3\ 6 \\ \hline 5\ 1\ 8 \end{array}$$

Η λεκτική επένδυση της συμβολικής αφαίρεσης είναι ανάλογη της λεκτικής επένδυσης της σχηματικής αφαίρεσης, και αποτελεί φυσική συνέχεια των σταδίων επαφής με την αφαίρεση που προηγήθηκαν, γεγονός που σε μεγάλο βαθμό βοηθά στην κατανόηση των ενεργειών που τη συνθέτουν.

Ξεκινάω την κάθετη πρόσθεση πάντα από τη στήλη των μονάδων και από τον επάνω αριθμό (μειωτέο) και λέω: 4 να αφαιρέσω το 6 δεν γίνεται. Μετατρέπω μια δεκάδα από τις 5 σε μονάδες και τις μεταφέρω στη στήλη των μονάδων όπου οι μονάδες γίνονται συνολικά 14 και λέω 14 να αφαιρέσω τις 6 μου μένουν 8. Στη συνέχεια πάω στη στήλη των δεκάδων όπου σβήνω τη 1 δεκάδα από τις 5 και μου μένουν 4, και λέω 4 να αφαιρέσω το τρία μου κάνει 1 και το γράφω. Τέλος, πάω στη στήλη των εκατοντάδων και λέω 6 να αφαιρέσω το 1 μου κάνει 5 και το γράφω. Το αποτέλεσμα της συμβολικής πρόσθεσης είναι 5 1 8.

Οι μαθητές με την προτυποποίηση του ενεργήματος, της σχηματοποίησης του αλγόριθμου της αφαίρεσης και της επάλληλης συμβολικής σύνδεσης, βλέπουν τη διαδικασία που βρίσκεται πίσω από την αφηρημένη μορφή του αλγόριθμου της αφαίρεσης και διαμορφώνουν μια νοητική εικόνα τόσο των ποσοτήτων όσο και των διαδικασιών του εκπαιδευτικού για την επίλυση αυτού και αποκτούν το πρότυπο του λύτη της αλγοριθμικής διαδικασίας (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Εκτελούν το ίδιο έργο στο τετράδιό τους με τη σκαλωσιά που στήνει ο εκπαιδευτικός **(Εξωτερική καθοδήγηση).** Προσδιορίζουν το ζητούμενο (εκμάθηση τριψήφιας αφαίρεσης με αναδόμηση-μετατροπή μειωτέου στη στήλη των δεκάδων), εξηγούν τι θα κάνουν (θα μετατρέψω 1 Δ σε μονάδες τις οποίες θα τις μεταφέρω στη στήλη των μονάδων για να κάνω την αφαίρεση και στη στήλη των δεκάδων θα διαγράψω τη 1 Δ που μετέτρεψα), εκτελούν την πράξη και δίνουν την απάντηση (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Επαναλαμβάνουν με φωναχτό λόγο **(Λεκτική αυτοκαθοδήγηση)** τα βήματα του συλλογισμού για να βοηθήσουν την εργαζόμενη μνήμη στη συγκράτηση των πληροφοριών, ενώ εκπαιδεύονται στο να επιλογίζονται στα σημεία που τους δυσκολεύουν (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Επαναλαμβάνουν ψιθυριστά **(Σιωπηρή αυτοκαθοδήγηση)** τα βήματα του συλλογισμού (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153). Η επανάληψη προκαλεί επαναδραστηριοποίηση της πληροφορίας μέσω της διαδικασίας της εσωτερικής επανεμφάνισης.

Δίνουν οδηγίες στον εαυτό τους τι να προσέξουν **(Μεταγνώση)** (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

Αναφέρονται στο ενέργημα δράσης: τι έκανα, πώς, γιατί **(ιδιωτικός λόγος)** (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 153).

**III. Φάση. Εξάσκηση με φθίνουσα καθοδήγηση / Επικύρωση του ενεργήματος**

Οι μαθητές εκτελούν όμοιες απεικονιστικές μοντελοποιήσεις αφαιρέσεων όπως η αρχική, μέχρι να φτάσουν στο σημείο να επιλύουν μόνοι τους χωρίς καθοδήγηση. Οι μαθητές εκτελούν αφαιρέσεις με αναδόμηση μειωτέου σε συμβολικό επίπεδο και με τη χρήση σκαλωσιάς υποστηρίζονται μέχρι να μπορούν να ανταποκριθούν μόνοι τους.

Σκοπός σε αυτή τη φάση είναι η αύξηση του βαθμού εξομοίωσης με το πρότυπο. Η εσωτερίκευση της διαδικασίας εν γένει εκλαμβάνεται ως μετασχηματισμός της διαψυχολογικής διαδικασίας (της διάδρασης με τον εκπαιδευτικό) σε ενδοψυχολογική διαδικασία (διάδραση με τον εαυτό) (Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011, σελ. 217).

**IV. Φάση. Αξιολόγηση μαθητών / εσωτερική και εξωτερική ανατροφοδότηση**

Ο μαθητής αναφέρεται ο ίδιος στην πρόοδό του, πόσο τα κατάφερε σε σχέση με τον αρχικό στόχο και δέχεται θετική εξωτερική ανατροφοδότηση από τον εκπαιδευτικό. Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την πρόοδο του μαθητή με φύλλο ελέγχου σε σχέση με τις προηγούμενες επιδόσεις του και την ανταπόκρισή του στο ρόλο (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 154).

**3.5.5.5. Κλείδα παρατήρησης της διδασκαλίας**

Η κλείδα παρατήρησης στην παρούσα έρευνα είχε το σκοπό του ελέγχου της δόμησης και της κατανομής του διδακτικού χρόνου της λειτουργικότητας της στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 193) (Βλ. Παράρτημα 15, σελ. 432).

**3.6. Διαδικασία – Συλλογή δεδομένων**

Για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας τηρήθηκε η κείμενη νομοθεσία περί προσωπικών δεδομένων και σεβασμός για τα ατομικά και γενικά όλα τα συνταγματικά δικαιώματα των συμμετεχόντων και χορηγήθηκε άδεια από το Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων (ΥΠ.Π.Ε.Θ.), κατόπιν γνωμοδοτήσεως του Τμήματος Ερευνών του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π), αρ. Πράξης 7/21-2-2019 (Βλ. Παράρτημα 16, σελ. 439-440).

Κατά τη διάρκεια υλοποίησης της ερευνητικής διαδικασίας τηρήθηκαν όλοι οι κανόνες ηθικής και δεοντολογίας, όπως αυτοί επισημαίνονται στο εγχειρίδιο της Αμερικανικής Ένωσης Ψυχολόγων (American Psychological Association, APA) https://www.apa.org/ethics/committee-rules-procedures-2018.pdf. Ειδικότερα, ζητήθηκε η έγγραφη συναίνεση των γονέων/κηδεμόνων για τη συμμετοχή των ανήλικων μαθητών/τριών για την πραγματοποίηση των δύο φάσεων της έρευνας, μέσω δύο επιστολών συναίνεσης και πραγματοποιήθηκε πλήρης ενημέρωση για τους σκοπούς της έρευνας και τη μεθοδολογία που θα λάβει χώρα. Υπογράφτηκαν δύο αντίγραφα των επιστολών συναίνεσης από τον κηδεμόνα και την ερευνήτρια, ώστε οι συμμετέχοντες να κρατήσουν από ένα αντίγραφο αυτών (Βλ. Παράρτημα 17, σελ. 441-445).

Επιπλέον τονίστηκε η εθελοντική συμμετοχή των συμμετεχόντων, η δυνατότητα διακοπής της συμμετοχής τους οποιαδήποτε στιγμή της διαδικασίας, η εμπιστευτικότητα των προσωπικών δεδομένων και η διασφάλιση της ανωνυμίας, η προστασία από την έκθεση σε πιθανό κίνδυνο, ταλαιπωρία ή δυσμενείς επιπτώσεις, καθώς και η απαλλαγή από διαφημιστικό υλικό, σύμφωνα με την κείμενη νομοθεσία. Κατά τη διάρκεια της έρευνας και για τη συλλογή δεδομένων δε χρησιμοποιήθηκαν οπτικοακουστικά μέσα.

Πριν τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας, πραγματοποιήθηκε πιλοτική εφαρμογή αυτής - σε τρεις μαθητές με δυσαριθμησία - κατά τη διάρκεια της οποίας αξιολογήθηκε ο βαθμός της αξιοπιστίας και της εγκυρότητας των εργαλείων της πρώτης φάσης της έρευνας, πιθανή τροποποίηση αυτών και ο ακριβής χρόνος της ατομικής συνεδρίας.

Ο έλεγχος της διενέργειας των τριών μεθοδολογικών εργαλείων της ανίχνευσης των συμμετεχόντων και συγκεκριμένα του αυτοσχέδιου τεστ μαθηματικής επίδοσης, του τεστ νοημοσύνης Raven και του τεστ-Α για την ανίχνευση της αναγνωστικής ικανότητας, εστιάστηκε μόνο στο αυτοσχέδιο τεστ μαθηματικής επίδοσης, καθότι τα άλλα προαναφερόμενα δύο έχουν σταθμιστεί στον ελληνικό πληθυσμό και είναι καθιερωμένα στον επιστημονικό τομέα αναφοράς.

Ειδικότερα για την αξιολόγηση του νεοσύστατου αυτοσχέδιου τεστ μαθηματικής επίδοσης, πέραν της εγκυρότητας περιεχομένου, που εξασφαλίστηκε με την ανάλυση έργου του Αναλυτικού Προγράμματος και μέσω της μήτρας κατασκευής, αξιολογήθηκε η εγκυρότητα κριτηρίου. Προς αυτόν τον σκοπό δόθηκε σε τρεις μαθητές με προφίλ δυσαριθμησίας - που ανιχνεύθηκαν με το εν λόγω εργαλείο και η επίδοσή τους ήταν ≤ του 10ου εκατοστημορίου και συνάμα η νοημοσύνη τους και η αναγνωστική ευχέρεια βάσει των σταθμισμένων τεστ Raven και Τεστ-Α αντίστοιχα, κυμαινόταν σε τυπικά επίπεδα - η *Ανιχνευτική Δοκιμασία Μαθηματικής Επίδοσης* (ΑΔΜΕ) των Παπαϊωάννου, Μουζάκη, Σιδερίδη και Σίμο (2008), για τον έλεγχο της εγκυρότητας κριτηρίου. Το συγκεκριμένο τεστ είναι καθιερωμένο στον επιστημονικό τομέα αναφοράς, δηλαδή έχει ήδη ελεγχτεί ως προς την αξιοπιστία και την εγκυρότητά του, αποτελώντας, τοιουτοτρόπως, σημείο αναφοράς. Η σύγκρισή του με το τεστ μαθηματικής επίδοσης επέτρεψε την αξιολόγηση της συγκλίνουσας ή συντρέχουσας εγκυρότητας. Το συγκεκριμένο όργανο είχε δείκτη αξιοπιστίας άνω του 0,7 σε προηγούμενες ερευνητικές προσπάθειες. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του τεστ που χρησιμοποιήθηκε με το τεστ μαθηματικής ικανότητας, προέκυψε υψηλή συνάφεια άνω του 95%, με τα αποτελέσματα να μη διαφέρουν στατιστικά μεταξύ τους.

Ο έλεγχος του βαθμού αξιοπιστίας έδειξε ότι το τεστ στο σύνολό του είχε δείκτη άλφα (α) του Cronbach ίσο με 0,901 όταν αποδεκτές τιμές είναι της τάξης του 0,70 και μεγαλύτερες. Στις επιμέρους υποδοκιμές, είχε δείκτες εσωτερικής συνέπειας ίσους με 0,898, 0,854 και 0,893. Τέλος, ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,872 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,863.

Η πιλοτική αξιολόγηση των δοκιμασιών μέτρησης της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης εμπεριείχε την αξιολόγηση δύο μεθοδολογικών εργαλείων. Το πρώτο εργαλείο ήταν το Panamath test, το οποίο είναι τεστ μέτρησης της ικανότητας του ANS και αναφέρεται στη βιβλιογραφία από έρευνα που προηγήθηκε για να μετρήσει τη συγκεκριμένη ικανότητα. Οι ερευνητές που το σχεδίασαν έχουν διεξάγει το τεστ σε αρκετά άτομα, έχουν υπολογίσει τους μέσους όρους των τιμών τους, και έχουν εξετάσει τις διαφορές σε αυτές, έτσι ώστε να μπορούν να συγκρίνουν τις ατομικές τιμές με τις τυπικές τιμές για τα άτομα που έχουν κάνει το τεστ. Το συγκεκριμένο τεστ έχει σταθμιστεί στην Αμερική και γι' αυτό στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε μόνο η αξιοπιστία αυτού. Ο έλεγχος του βαθμού αξιοπιστίας έδειξε ότι το τεστ στο σύνολό του είχε δείκτη άλφα (α) του Cronbach ίσο με 0,915, ενώ ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,852 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,8.

Το δεύτερο μεθοδολογικό εργαλείο της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης που αξιολογήθηκε, αναφέρεται στη μέτρηση της ικανότητας του subitizing και είναι αυτοσχέδιο, καθώς για την αξιολόγηση αυτής της ικανότητας δεν υπάρχει έτοιμο διαθέσιμο εργαλείο στη βιβλιογραφία ή στο εμπόριο. Προκειμένου να ελεγχθεί η εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του τεστ επιλέχτηκε η μέθοδος *των γνωστών ομάδων*. Με τη μέθοδο των γνωστών ομάδων (known groups method) (Creswell, 2016, σελ. 159-162), χορηγείται ένα όργανο μέτρησης σε δύο ομάδες οι οποίες είναι γνωστό ότι διαφέρουν αναφορικά με το προς μέτρηση χαρακτηριστικό. Εάν από τα αποτελέσματα των μετρήσεων αποδειχτεί ότι οι δύο ομάδες εμφανίζουν διαφορά στην εκτίμηση του χαρακτηριστικού που μετράται, όπως αρχικά ήταν γνωστό, τότε θεωρείται ότι το όργανο μέτρησης έχει εννοιολογική εγκυρότητα. Το δείγμα αυτό της ομάδας-ελέγχου του τεστ αποτέλεσαν οι τρεις μαθητές που είχαν προφίλ δυσαριθμησίας και τρεις μαθητές που πληρούσαν τα κριτήρια των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών, τουτέστιν επίδοση ≥ του 25ου εκατοστημορίου και ≤ του 75ου, νοημοσύνη και αναγνωστική ευχέρεια τυπική, βάσει των σταθμισμένων τεστ Raven και Τεστ-Α, αντίστοιχα. Από τα αποτελέσματα αναμενόταν οι μαθητές με προφίλ δυσαριθμησίας να εμφανίζουν μικρή βαθμολογία (score) στο τεστ, ενώ οι τυπικά αναπτυσσόμενοι μαθητές υψηλή. Ο βαθμός της εννοιολογικής εγκυρότητας ήταν υψηλός, αφού οι δύο ομάδες μαθητών διέφεραν στατιστικά σημαντικά ($p$ = 0,0001) μεταξύ τους, όπως άλλωστε αναμενόταν.

Για την επαύξηση των αποτελεσμάτων της εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής, πραγματοποιήθηκε έλεγχος της διακρίνουσας εγκυρότητας. Μέρος της διακρίνουσας εγκυρότητας είναι η ικανότητα ενός εργαλείου να διακρίνει με βάση την επίδοση διαφορετικούς πληθυσμούς. Για τις ανάγκες της έρευνας χρησιμοποιήθηκε στατιστική ανάλυση των καμπυλών ROC (Receiver Operating Curves) (Creswell, 2016), με το ζητούμενο η καμπύλη γραμμή πρόβλεψης να είναι όσο το δυνατόν πιο μακριά από τη διαγώνιο, η οποία εκφράζει τυπικές τιμές. Τα αποτελέσματα έδειξαν την ικανότητα του τεστ να διακρίνει παιδιά με προφίλ δυσαριθμησίας και τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους, καθώς το μέγεθος της περιοχής της καμπύλης ήταν 0,677 ($Z$ = 3,098, $p$ < 0,05) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,569 και 0,773. Χρησιμοποιώντας τον δείκτη άλφα του Cronbach, η αντίστοιχη μέτρηση αυτού του εργαλείου ήταν 0,969, υποδηλώνοντας υψηλού βαθμού εσωτερικής συνέπειας και εξαιρετικά χαμηλά επίπεδα στατιστικού σφάλματος. Ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,934 με τη συσχέτιση των μερών να είναι ίση με 0,917.

Η πιλοτική αξιολόγηση της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας έγινε μέσω τεσσάρων εργαλείων, ο σχεδιασμός των οποίων στηριζόταν στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, καθώς δεν υπάρχουν σταθμισμένα εργαλεία για την μέτρηση αυτής. Ειδικότερα, η αξιολόγηση αυτής της ικανότητας έγινε μέσω της απαρίθμησης, της σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών, τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και την αντίστροφη καταμέτρηση.

Ειδικότερα, μελετήθηκε η εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του τεστ απαρίθμησης, του τεστ σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών, της σύγκρισης διψήφιων αριθμών και της δοκιμασίας αντίστροφης καταμέτρησης, με τη μέθοδο των γνωστών ομάδων. Ο στατιστικός έλεγχος έδειξε ότι οι δύο ομάδες μαθητών διέφεραν στατιστικά σημαντικά ($p$ = 0,0001) μεταξύ τους, και στα τέσσερα προαναφερόμενα εργαλεία όπως άλλωστε αναμενόταν. Ο αντίστοιχος έλεγχος των καμπυλών ROC ανέδειξε την ικανότητα των τεσσάρων εργαλείων να διακρίνουν με βάση την επίδοση τούς δύο πληθυσμούς, καθώς η περιοχή της καμπύλης ήταν ίση με 0,866 (Z = 7,627, $p$ < 0,05) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,753 και 0,940 για το τεστ απαρίθμησης, 0,766 (Z = 6,527, $p$ < 0,05) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,653 και 0,830 για το τεστ σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών, 0853 (Z = 7,627, $p$ < 0,05) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,773 και 0,956 για το τεστ σύγκρισης διψήφιων αριθμών και 0,892 (Z = 7,627, $p$ < 0,05) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,707 και 0,923 για τη δοκιμασία της αντίστροφης καταμέτρησης.

Ο δε στατιστικός έλεγχος της αξιοπιστίας των εν λόγω εργαλείων, έδειξε ότι τα αποτελέσματα είναι αποδεκτά και υποδεικνύουν υψηλή βαθμού εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς ο δείκτης άλφα του Cronbach ήταν ίσος με 0,92 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ίσος με 0,891 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,786 στο τεστ απαρίθμησης, το α του Cronbach α = 0,904 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ίσος με 0,807 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,703, στο τεστ σύγκρισης μονοψήφιων, ο δείκτης άλφα του Cronbach α = 0,906 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ίσος με 0,817 με τη συσχέτιση των μερών να είναι ίση με 0,797, στο τεστ σύγκρισης διψήφιων και το α του Cronbach α = 0,946 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ίσος με 0,904, με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,899 στην αντίστροφη καταμέτρηση.

Η προέρευνα αξιολόγησης των εργαλείων των γνωστικών λειτουργιών επιτελέστηκε μέσω του ελέγχου της Λεκτικής μνήμης εργασίας, στην οποία αξιολογήθηκε η μνήμη αριθμών και η μνήμη λέξεων, της οπτικοχωρικής συγκράτησης πληροφοριών μέσω του ελέγχου του κεντρικού εκτελεστικού συστήματος αυτής, όπου αξιολογήθηκε η ικανότητα της αναστολής, της προσοχής και της γνωστικής ευελιξίας.

Ειδικότερα, σχετικά με τον έλεγχο των εργαλείων της λεκτικής μνήμης εργασίας, αξιολογήθηκε μόνο ο ατομικός χρόνος χορήγησης του τεστ μνήμης αριθμών, εφόσον η αξιολόγηση αυτού έγινε μέσω υποκλίμακας του σταθμισμένου στα ελληνικά δεδομένα, τεστ Αθηνά, ενώ ελέγχθηκε η εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του αυτοσχέδιου τεστ της μνήμης λέξεων και η αξιοπιστία αυτού. Εκ νέου ο έλεγχος της εγκυρότητας έγινε με τη μέθοδο των γνωστών ομάδων, βάσει του οποίου διαπιστώθηκε πως οι δύο ομάδες μαθητών διέφεραν στατιστικά σημαντικά ($p$ = 0,0001), ως προς το χαρακτηριστικό που μετρήθηκε, ενώ ο έλεγχος της διακρίνουσας εγκυρότητας μέσω καμπύλης ROC χαρακτηρίζεται από περιορισμένα επίπεδα στατιστικού σφάλματος στη μέτρηση του εν λόγω χαρακτηριστικού, καθώς η περιοχή της καμπύλης ήταν ίση με 0,894 (Ζ = 10,747, $p$ < 0,001) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,801-0,954. Εκ παραλλήλου, ο έλεγχος εσωτερικής συνέπειας μέσω α του Cronbach, υποδείκνυε υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,932 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,908 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,801.

Η μέτρηση της οπτικοχωρικής εργαζόμενης μνήμης έγινε με το σταθμισμένο έργο *Corsi Block Test* (Corsi, 1972), κι επομένως αξιολογήθηκε μόνο ο ατομικός χρόνος της συνεδρίας.

Ο έλεγχος του κεντρικού εκτελεστή της εργαζόμενης μνήμης μέσω της αυτοσχέδιας μέτρησης της ικανότητας αναστολής άσχετων με το επιτελούμενο έργο ερεθισμάτων, αποκάλυψε αποδεκτή βαθμού εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής, καθώς η μέθοδος των γνωστών ομάδων έδειξε πως οι μαθητές διέφεραν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους στην ικανότητα της αυτοματοποίησης της άσχετης πληροφορίας του αντιληπτικού μεγέθους του αριθμού. Εκ παραλλήλου, διενεργήθηκε έλεγχος διακρίνουσας εγκυρότητας μέσω των καμπυλών ROC, με τα αποτελέσματα να δείχνουν σημαντική διάκριση μεταξύ των δύο πληθυσμών, με την περιοχή της καμπύλης να είναι ίση με 0,892 ($Z = 10{,}047$, $p < 0{,}001$) με διάστημα εμπιστοσύνης 0,802-0,928. Αναφορικά με την αξιοπιστία του οργάνου, ο έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας μέσω α του Cronbach, υποδείκνυε υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,945 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,918 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,854.

Για την αξιολόγηση της προσοχής και της γνωστικής ευελιξίας χρησιμοποιήθηκε το Trail Making Test. Το συγκεκριμένο τεστ χρησιμοποιείται ευρέως σε κλινικές μελέτες ως διαγνωστικό εργαλείο των επιτελικών λειτουργιών της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής. Το συγκεκριμένο τεστ ήταν στην αγγλική γλώσσα, μεταφράστηκε από την ερευνήτρια κι έγινε ανάστροφη μετάφραση από καθηγήτρια Αγγλικής Γλώσσας. Ο έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας μέσω α του Cronbach, υποδείκνυε υψηλή εσωτερική συνέπεια και αξιοπιστία, καθώς α = 0,995 και ο δείκτης ισοδυναμίας των δύο ημίσεων του Guttman ήταν ίσος με 0,928 με τις δύο μορφές να συσχετίζονται κατά 0,893.

Από την επισκόπηση της ανάλυσης των δεδομένων της πιλοτικής έρευνας, διαπιστώνεται ότι ο βαθμός εγκυρότητας και αξιοπιστίας των έργων είναι υψηλός κι επομένως αποδεκτός γι’ αυτού του είδους τις δοκιμασίες. Η συγκέντρωση στοιχείων εγκυρότητας των τιμών των τεστ και της συνέπειας αυτών, παρέχει υποστήριξη της επικύρωσης των τιμών των εργαλείων, έτσι ώστε να δοθεί απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα και στις υποθέσεις της έρευνας. Δεδομένης της ανάπτυξης αυτών των βάσιμων στοιχείων - που δείχνουν ότι η πρόθεση ερμηνείας των τεστ αντιστοιχεί στον σκοπό αυτών και συνάμα βασίζονται στο περιεχόμενο, στις διαδικασίες των απαντήσεων και στις συνέπειες των τεστ - τα εργαλεία της πρώτης φάσης της έρευνας κρίθηκαν επαρκή και δε χρειάστηκε κάποια τροποποίηση αυτών. Η πιλοτική εφαρμογή της έρευνας μεταφράστηκε στη συνέχεια σε μια ενδιαφέρουσα έρευνα με λογικά και συναφή ευρήματα.

Μετά την εφαρμογή της πιλοτικής έρευνας διεξήχθη η κυρίως έρευνα και ειδικότερα η πρώτη φάση αυτής. Αυτή συμπεριελάμβανε την ομαδική χορήγηση των τριών εργαλείων για την ανίχνευση των μαθητών που ενδιέφερε την έρευνα, συνολικής διάρκειας 60΄, παρουσία των εκπαιδευτικών του μαθήματος και εντός ωρολογίου προγράμματος. Μετά την εξεύρεση των συμμετεχόντων έλαβαν χώρα οι ατομικές συνεδρίες. Η κάθε ατομική συνεδρία περιελάμβανε την εξέταση της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας της επεξεργασίας συμβολικών ποσοτήτων και τις γνωστικές λειτουργίες, με τη χορήγηση προς αυτόν τον σκοπό των κατάλληλων εργαλείων. Η διάρκεια της κάθε ατομικής συνεδρίας ήταν 20΄, και έλαβε χώρα σε ξεχωριστό από την τάξη χώρο (π.χ. βιβλιοθήκη, γραφείο δασκάλων, κάποια άδεια τάξη συμπεριλαμβανομένου τμήματος ένταξης ή τμήματος ενισχυτικής διδασκαλίας όπου υπήρχαν). Η σειρά οδηγιών στο πλαίσιο των συνεδριών ήταν η ίδια για όλα τα παιδιά και όλες οι δοκιμασίες πραγματοποιήθηκαν στα σχολεία των παιδιών. Όλες οι δοκιμασίες παρουσιάστηκαν προφορικά στους μαθητές και είχε συμπεριληφθεί τουλάχιστον μια πρακτική δοκιμή των έργων για τη διασφάλιση της κατανόησης των έργων από τα παιδιά.

Η συλλογή δεδομένων της πρώτης φάσης της έρευνας, πραγματοποιήθηκε από τον Μάρτιο του 2019 έως και τον Απρίλιο 2019. Στη συνέχεια ακολούθησε η συλλογή των δεδομένων της δεύτερης φάσης της έρευνας, η οποία υλοποιήθηκε από τον Μάιο του 2019 έως τον Ιούνιο του 2019.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας, δημιουργηθήκαν οι δύο ισομεγέθεις ομάδες των μαθητών με δυσαριθμησία (πειραματική και ελέγχου) και δόθηκε και στις δύο ομάδες το προτέστ επίδοσης, το οποίο αποτελούσε ένα αξιολογικό τεστ επίδοσης στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Βλ. Παράρτημα 12, σελ. 368-377). Οι πέντε μαθητές που αποτέλεσαν τους συμμετέχοντες της πειραματικής ομάδας για τον εμπειρικό έλεγχο της αποτελεσματικότητας της πειραματικής παρέμβασης, δηλαδή αν η διδακτική διαμεσολάβηση με τη σχηματοποίηση / μοντελοποίηση των ποσοτήτων με τη στρατηγική της γνωστικής μαθητείας, επιδρά αιτιακά στην επίδοση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και ταυτοχρόνως στα δομικά ελλείμματα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της επεξεργασίας συμβολικών μεγεθών και των γνωστικών λειτουργιών, δέχτηκαν εξατομικευμένη υποστήριξη, ίδιας μορφής, διάρκειας 10 διδακτικών ωρών στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (5 διδακτικές παρεμβάσεις για κάθε αλγόριθμο) και αξιολογήθηκαν σε κάθε μια παρέμβαση με το σχετικό φύλλο ελέγχου (Βλ. Παράρτημα 13, σελ. 378-427). Στην ομάδα ελέγχου δε διενεργήθηκε καμία αλλαγή από τη συνήθη διδασκαλία. Στο τέλος της πειραματικής διαδικασίας δόθηκε το μετατέστ επίδοσης και στις δύο ομάδες (Βλ. Παράρτημα 14, σελ.428-437). Στη συνέχεια οι μαθητές της πειραματικής ομάδας ελέγχθηκαν εκ νέου στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία και στις γνωστικές λειτουργίες.

Η Β΄ φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε εξωδιδακτικό ωράριο σε συνεννόηση με τους γονείς και κατόπιν της έγγραφης συναίνεσής τους.

Η πορεία και η εξέλιξη εν γένει όλου του ερευνητικού προγράμματος ελεγχόταν και καταγραφόταν συστηματικά για την καθόλα νόμιμη, ομαλή, ασφαλή και αποδεκτή πραγμάτωσή του και ταυτοχρόνως η τήρηση του κώδικα ηθικής και δεοντολογίας σε κάθε στάδιο αυτού, διασφαλίζει επιπροσθέτως την εγκυρότητα και αξιοπιστία της συλλογής των εν λόγω δεδομένων.

Τα δεδομένα της έρευνας αναλύθηκαν με το πακέτο στατιστικής ανάλυσης IBM Statistics Package for Social Sciences (SPSS) έκδοση 24. Για το πρώτο ερώτημα της έρευνας (διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και του μη συμβολικού αριθμητικού συστήματος), πραγματοποιήθηκε μη παραμετρικός συσχετιστικός έλεγχος Spearman rho (*rs*), εξαιτίας μη κανονικής κατανομής του δείγματος, βάσει των μοντέλων Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk Test. Για το 1δ υποερώτημα, που αποσκοπούσε στον έλεγχο διαφορών μεταξύ μαθητών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και τυπικών στην ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, έγινε χρήση του απαραμετρικού Mann – Whitney Test, καθώς δεν πληρούνταν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του T-test ανεξάρτητων δειγμάτων (Βλ. Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016, σελ. 209).

Για το δεύτερο ερώτημα της έρευνας, δηλαδή τη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και της ικανότητας της επεξεργασίας συμβολικών μεγεθών, εφαρμόστηκε ο μη παραμετρικός συσχετιστικός έλεγχος Spearman rho (*rs*), λόγω μη κανονικής κατανομής των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, βάσει των μοντέλων Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk Test.

Η ίδια διαδικασία με την προηγούμενη ακολουθήθηκε για το τρίτο ερώτημα της έρευνας, το οποίο εστίαζε στη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών με δυσαριθμησία και της επίδοσης στους γνωστικούς μηχανισμούς.

Η ανάλυση των δεδομένων του τέταρτου και πέμπτου ερωτήματος της έρευνας, που εστίαζαν στον έλεγχο της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ των παιδιών με την εν λόγω διαταραχή και τους τυπικούς συνομήλικους στις δοκιμασίες της ικανότητας επεξεργασίας συμβολικών μεγεθών και στον έλεγχο της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων παιδιών στις επιδόσεις τους στην εργαζόμενη μνήμη και στις εκτελεστικές λειτουργίες αντίστοιχα, εφαρμόστηκε ο απαραμετρικός έλεγχος Mann – Whitney.

Ο έλεγχος της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης μεταξύ της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων, που ήταν το επίκεντρο του έκτου ερωτήματος, έγινε μέσω του απαραμετρικού συσχετιστικού συντελεστή Spearman rho (*rs*).

Το έβδομο ερώτημα της έρευνας, που στόχευε στη μελέτη των ποιων στατιστικά σημαντικών συσχετίσεων προκύπτουν μεταξύ της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων με τον τομέα των γνωστικών μηχανισμών, διερευνήθηκε μέσω του απαραμετρικού συντελεστή Spearman rho (*rs*).

Για τη διερεύνηση της ισχύς σε ένα μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, των ικανοτήτων της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, στην ηλικία των 8-9 ετών, το οποίο αποτελούσε το όγδοο ερώτημα της έρευνας, πραγματοποιήθηκε Πολλαπλή Παλινδρομική Ανάλυση (Multiple Regression Analysis) (Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016, σελ. 304).

Η ανάλυση των δεδομένων του ένατου ερωτήματος της έρευνας, που εξέταζε την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ των επιδόσεων στους αλγόριθμους των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, όπως αυτές προέκυψαν από την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης μέσω των μοντελοποιήσεων / σχηματοποιήσεων των ποσοτήτων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, στην πειραματική ομάδα, διενεργήθηκε μέσω του Paired Samples t – test, λόγω της κανονικότητας των δεδομένων στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης, βάσει των μοντέλων Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk Test. Ο έλεγχος ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς στην ομάδα ελέγχου στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης που ακολούθησαν τη συνήθη διδασκαλία διενεργήθηκε μέσω του Paired Samples t – test, λόγω της κανονικότητας των δεδομένων. Η σύγκριση των δύο ομάδων πειραματικής και ελέγχου για την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ των δύο, έγινε μέσω του ελέγχου T-test ανεξάρτητων δειγμάτων και ελέγχου ANCOVA. Εκ παραλλήλου, αξιοποιήθηκαν πληροφορίες από τα πρωτόκολλα αξιολόγησης (διαγνωστικής και αποδεικτικής) και στατιστικός έλεγχος αυτών. Ο στατιστικός έλεγχος έγινε μέσω του Paired Samples t – test, βάσει των μοντέλων Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk Test, που πιστοποιούσαν την κανονική κατανομή των δεδομένων των πρωτοκόλλων αξιολόγησης.

Η ύπαρξη στατιστικά σημαντικής διαφοράς στις ικανότητες της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών πριν και μετά τη διδακτική-πειραματική παρέμβαση, που απασχόλησε το δέκατο και τελευταίο ερώτημα της έρευνας, διερευνήθηκε μέσω του Paired Samples t – test, λόγω της κανονικότητας των μεταβλητών των δεδομένων μετά παρέμβασης, βάσει των μοντέλων Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk Test.

Τα αποτελέσματα της επαγωγικής στατιστικής επιβεβαίωσαν το πλήθος της ορθότητας των υποθέσεων και διαπιστώσεων της εν λόγω έρευνας και απέρριψαν ελάχιστες από αυτές. Συνήθως, βέβαια, υπάρχει μία λογική σχέση μεταξύ της ποσοτικής στατιστικής ανάλυσης και των πορισμάτων τέτοιου είδους ερευνητικών μελετών, ενώ συνάμα, υπάρχει συνοχή στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται και στα αριθμητικά στοιχεία. Επιπλέον, η εμφάνιση των αποτελεσμάτων σε πίνακες με τη χρήση της μεθόδου SPSS (Creswell, 2016), συμβάλλει στην ακριβή απόδοση και συνοδή παρουσίαση των ευρημάτων.

**3.7. Ηθικά ζητήματα – Δεοντολογία της έρευνας**

Καθίσταται σαφές πως κατά τη διάρκεια της ερευνητικής φάσης μέσα από τη χορήγηση των εργαλείων προς τους συμμετέχοντες μαθητές για τη συλλογή των δεδομένων, η ερευνήτρια οφείλει να σέβεται τους κανόνες ηθικής και δεοντολογίας για την έρευνα, οι οποίοι θα πρέπει να τηρούνται πιστά.

Ο κώδικας ηθικής και δεοντολογίας αποτελεί ένα σύνολο κανόνων, που ισχύει διεθνώς για όλους τους ερευνητές (Creswell, 2016). Έτσι, λοιπόν, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως σε ό,τι αφορά ορισμένα θεωρητικής φύσεως ζητήματα που άπτονται της υποχρεωτικής τήρησης του κώδικα ηθικής και δεοντολογίας, σχετίζεται με την απόλυτη ξεκάθαρη συγκατάθεση των συμμετεχόντων στην έρευνα, τη διασφάλιση της ανωνυμίας τους, αλλά και την εκούσια επιλογή της συμμετοχής τους, έπειτα από την αναλυτική ενημέρωση των γονέων τους που είχαν λάβει από την ίδια την ερευνήτρια σχετικά με τη σημαντικότητα, τον σκοπό και τη διαδικασία της έρευνας (Creswell, 2016· Mertens, 2009). Ουσιαστικά, οι συμμετέχοντες και οι γονείς τους γνώριζαν όλες τις σχετικές λεπτομέρειες για τη διεξαγωγή της έρευνας, όπως είναι το περιεχόμενο, οι αρχικές υποθέσεις, τα βασικά ερωτήματα, τη διαδικασία που θα ακολουθηθεί, τα δικαιώματά τους, όπως τη δυνατότητά τους να αποσύρουν τη συμμετοχή του παιδιού τους σε οποιοδήποτε στάδιο της έρευνας, το σεβασμό σε μια ενδεχόμενη κούραση μαθητή από τη χορήγηση εργαλείου και την αποδοχή της επιθυμίας του να μη συνεχίσει άλλο, τις υποχρεώσεις και των δύο πλευρών, αφενός των συμμετεχόντων και αφετέρου της ερευνήτριας, αλλά και τον ευρύτερο σκοπό και τα οφέλη της συνολικής ερευνητικής διαδικασίας, εν γένει.

Σε κάθε περίπτωση, ο κώδικας ηθικής και δεοντολογίας στην έρευνα (Παπαναστασίου, & Παπαναστασίου, 2016· Mertens, 2009· Σαλβαράς, 2013α) αποτελεί τη βασικότερη προϋπόθεση όλων για τη νόμιμη, ομαλή, ασφαλή και αποδεκτή πραγμάτωσή της και ταυτοχρόνως η τήρησή του διασφαλίζει επιπροσθέτως την εγκυρότητα και αξιοπιστία της εν λόγω έρευνας, εφόσον οι γονείς αλλά και οι ίδιοι οι συμμετέχοντες μαθητές που έλαβαν μέρος στη διαδικασία, γνώριζαν εκ των προτέρων τους στόχους και τους σκοπούς της, συμμετείχαν ανώνυμα και εκούσια στα πλαίσια μιας καθόλα νόμιμης ερευνητικής διαδικασίας.

# Κεφάλαιο 4ο ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

*Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας όπως αυτά προέκυψαν κατά τη διάρκεια αυτής, καθώς και η στατιστική τους επεξεργασία. Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων της έρευνας και των υποθέσεων αυτής, πραγματώθηκε μέσω της χρήσης της περιγραφικής και επαγωγικής στατιστικής.*

## 4.1. Αποτελέσματα διερεύνησης της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης στους μαθητές με δυσαριθμησία

Το πρωταρχικό ερώτημα της μελέτης εστίαζε στη διερεύνηση της σχέσης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία και της εγγενούς ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, καθώς και στη διερεύνηση διαφορών τυπικών μαθητών και μαθητών με δυσαριθμησία σε αυτή τη φυλογενετικά προσδιορισμένη ικανότητα. Προς αυτό τον σκοπό, πραγματοποιήθηκε συσχετιστικός στατιστικός έλεγχος για τη μέτρηση του βαθμού συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία με την οξύτητα-ακρίβεια (W) του συστήματος των κατά προσέγγιση αριθμών (ANS) και με τον χρόνο απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T W), της μαθηματικής ικανότητας με την ικανότητα της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (subitize) και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing), καθώς και στατιστικά τεστ ελέγχου της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία αναφορικά με το ANS και την ικανότητα subitizing.

Στον Πίνακα 4.1.1., παρουσιάζονται κάποια περιγραφικά στατιστικά των πέντε μεταβλητών αυτού του ερωτήματος. Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι μέσες τιμές (M), οι τυπικές αποκλίσεις (SD), οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), η λοξότητα (Skewness) και η κύρτωση (Kurtosis) της μαθηματικής ικανότητας και των ικανοτήτων στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση.

Όπως παρατηρούμε στον προαναφερθέντα πίνακα, η αναμενομένη (μέση) τιμή της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών που βρίσκονται στο δείγμα μας είναι της τάξης του 7,3667. Η μέγιστη τιμή στη βαθμολόγηση της μαθηματικής ικανότητας που πέτυχε κάποιος μαθητής είναι 10 με άριστα το 100 ενώ η ελάχιστη είναι 3. Ενδεικτικά επισημαίνουμε, ότι η μέση τιμή της μεταβλητής W, ισούται με 0,6520, με τυπικό εύρος τιμών μαθητών τυπικής ανάπτυξης της ηλικίας που εξετάζουμε, από 0,20 έως 0,57, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T. W) είναι ίσες με 4.524 και 1.918 ms. αντίστοιχα, με τυπικό εύρος τιμών 1.085 έως 1829 ms. και η τυπική απόκλιση ισούται με 0,51852. Η μέση τιμή της μεταβλητής ικανότητα Subitizing ισούται με 19,6167. Η μέγιστη τιμή στη βαθμολόγηση αυτής της ικανότητας που πέτυχε κάποιος μαθητής, είναι 27 με άριστα το 32 ενώ η ελάχιστη 11. Η τυπική απόκλιση της ικανότητας Subitizing είναι μεγάλη, ίση περίπου με 4,76.

Επιπλέον, δίδουμε την κύρτωση και τη λοξότητα των μεταβλητών σαν ένα πρώτο κριτήριο για την ύπαρξη κανονικότητας. Αν οι μεταβλητές μας ακολουθούσαν κανονική κατανομή θα περιμέναμε λοξότητα ίση με 0 και κύρτωση ίση με 3, γεγονός που δε συμβαίνει. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε μη ύπαρξη κανονικότητας. Για την επιβεβαίωση όμως αυτής της υπόθεσης μας χρησιμοποιούνται επιπλέον ιστογράμματα, αλλά και κάποια ευρέως διαδεδομένα στατιστικά test τα οποία μας δίνουν περισσότερο αξιόπιστα αποτελέσματα.

Πίνακας 4.1.1.

*Μέσες τιμές (M), τυπικές αποκλίσεις (SD), ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), συντελεστές ασυμμετρίας (Skewness) και Κύρτωση (Kurtosis) της μαθηματικής ικανό-*

*τητας και των ικανοτήτων στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση των μαθητών με δυσαριθμησία*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία (N=60) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | *SD* | *Min* | *Max* | *Skewness* | *Kurtosis* |
| Μαθηματική Ικανότητα | 7,3667 | 1,84084 | 3 | 10 | -0,160 | -1,026 |
| W Οξύτητα ANS | 0,6520 | 0,51852 | 0,21 | 4,23 | 5,697 | 39,456 |
| R.T W | 2934,20 | 635,35107 | 1918 | 4524 | 0,526 | -0,366 |
| Ικανότητα Subitizing | 19,6167 | 4,75890 | 11 | 27 | 0,024 | -1,196 |
| R.T Subitizing | 114282 | 34273,39820 | 85282 | 203078 | 1,648 | 1,290 |

Στο Παράρτημα 18 (σελ. 446) παρουσιάζονται τα ιστογράμματα των πέντε τυχαίων μεταβλητών Μαθηματική Ικανότητα, W Οξύτητα ANS, R.T. W, Ικανότητα Subitizing, R.T. Subitizing, από την εξέταση των οποίων, οι μεταβλητές μας δε φαίνεται να ακολουθούν κανονική κατανομή, αφού σε κανένα από τα συγκεκριμένα ιστογράμματα δε φαίνεται να διατηρείται κάποια σχετική συμμετρία, όπως επίσης και οι υψηλότερες συχνότητες δε φαίνεται να παρουσιάζονται στα κεντρικά διαστήματα τιμών.

Περαιτέρω, για τη συμβατότητα της κατανομής με την κανονική, προχωρήσαμε στη διενέργεια των στατιστικών test Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-wilk σε κάθε μια από αυτές. Βάσει των συγκεκριμένων στατιστικών τεστ (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακας 1, σελ. 452-457), απορρίπτεται η υπόθεση της κανονικής κατανομής για το σύνολο των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της μαθηματικής ικανότητας, καθώς τόσο το p-value του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov όσο και του Shapiro-wilk test, βρίσκονται σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο του 5%. Ως εκ τούτου, για τον έλεγχο της ύπαρξης γραμμικής σχέσης μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης διενεργήθηκε συσχετιστικός έλεγχος μέσω του μη παραμετρικού συντελεστή Spearman’s rho.

Βάσει του Πίνακα 4.1.2., η υπόθεση ύπαρξης συσχέτισης της μαθηματικής ι-κανότητας επαληθεύεται για τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης.

Ειδικότερα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει με τη μεταβλητή W Οξύτητα ANS μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση, $r_s$ = - 0,334, $p$ = 0,009 < 0,05 ενώ με τη μεταβλητή R.T. W μικρού μεγέθους αρνητική συσχέτιση, $r_s$ = - 0,162, $p$ = 0,215 > 0,05, αντανακλώντας το γεγονός ότι η μαθηματική ικανότητα αυξάνει όσο μικρότερο είναι το W (όσο μικρότερο είναι το W τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα διάκρισης ποσοτήτων) και ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας διάκρισης (R.T. W). Ωστόσο, το p-value του συντελεστή Spearman για τη μεταβλητή R.T. W είναι $p$ = 0,215 > 0,05, κι επομένως, δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής ικανότητας με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας του ANS.

Επιπροσθέτως, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει ισχυρή συσχέτιση με τις μεταβλητές που αφορούν την ικανότητα της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (subitize). Πιο συγκεκριμένα, με τη μεταβλητή Ικανότητα Subitizing υπάρχει ισχυρή θετική συσχέτιση και ισούται με $r_s$ = 0,916, $p$ = 0,001 < 0,05, ενώ με τη μεταβλητή R.T. Subitizing υπάρχει ισχυρή αρνητική συσχέτιση και ισούται με $r_s$ = - 0,707, $p$ = 0,001 < 0,05. Αυτά τα δύο αποτελέσματα καταδεικνύουν, ότι η μαθηματική ικανότητα έχει ανάλογη σχέση με την αύξηση της ικανότητας της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων και αντιστρόφως ανάλογη με τον χρόνο που μεσολαβεί για την εκτίμηση αυτής της μικρής ποσότητας.

Πίνακας 4.1.2.

*Συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης των μαθητών με δυσαριθμησία*

| | | W Οξύτητα ANS | R.T W | Ικανότητα Subitizing | R.T Subitizing |
|---|---|---|---|---|---|
| Μαθηματική Ικανότητα | *Spearman's rho* | -0,334** | -0,162 | 0,916** | -0,707** |
| | *P-value* | 0,009 | 0,215 | 0,001 | 0,001 |

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed)

Έχοντας καταλήξει ότι τα ποσοτικά δεδομένα τα οποία εξετάζονται δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, συνεχίζεται περαιτέρω η ανάλυσή τους με μη παραμετρικούς ελέγχους. Το απαραμετρικό τεστ το οποίο χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τη διερεύνηση της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικών μαθητών στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, είναι αυτό των Mann-Whitney. Ο έλεγχος των Mann-Whitney είναι ο αντίστοιχος μη παραμετρικός έλεγχος του t-test για δύο ανεξάρτητα δείγματα, και προβαίνει στον έλεγχο της ισότητας δύο μέσων μεταξύ ανεξάρτητων δειγμάτων, τα οποία όμως δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.

Βάσει του Πίνακα 4.1.3., το p-value του ελέγχου Mann-Whitney για την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία για τη μεταβλητή W Οξύτητα ANS είναι $p = 0,0001 < 0,05$ κι επομένως, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο πληθυσμών στην ικανότητα της κατά προσέγγιση εκτίμηση της πληθικότητας διαφορετικών αριθμητικών ποσοτήτων. Ομοίως, το p-value του ελέγχου Mann-Whitney για τη μεταβλητή που αφορά στον χρόνο απόκρισης που κάνουν οι μαθητές κατά τη διάκριση ποσοτήτων (R.T. W), βρίσκεται σε επίπεδο σημαντικότητας μικρότερο του 5% ($p = 0,0001 < 0,05$). Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο πληθυσμών συνολικά για το πρώτο εγγενές μη συμβολικό γνωστικό αριθμητικό σύστημα (ANS), που υποστηρίζει την εκτίμηση των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αριθμητικών ποσοτήτων.

Περαιτέρω, ο έλεγχος της υπόθεσης για την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ τυπικών μαθητών και μαθητών με δυσαριθμησία τόσο ως προς την ικανότητα της ακριβούς και ταχείας διάκρισης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (Ικανότητα Subitizing) όσο και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T. Subitizing), επιβεβαιώνεται, καθώς το p-value του test Mann-Whitney είναι $p = 0{,}0001 < 0{,}05$ και για τις δύο προαναφερόμενες μεταβλητές. Συνεπώς, οι μαθητές με δυσαριθμησία διαφοροποιούνται σημαντικά και ως προς το δεύτερο εγγενές μη συμβολικό σύστημα αριθμών, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI).

Στη βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων της στατιστικής επεξεργασίας, καταδεικνύεται μια εδραιωμένη διαφορά μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικών μαθητών στην ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης.

Πίνακας 4.1.3.

*Έλεγχος ύπαρξης σημαντικής διαφοράς μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών στην ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης*

| | Έλεγχος Mann-Whitney U μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών στις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης | | | |
|---|---|---|---|---|
| | W Οξύτητα ANS | R.T. W | Ικανότητα Subitizing | R.T. Subitizing |
| ***Mann-Whitney U*** | 546,500 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| ***Wilcoxon W*** | 2376,500 | 1830 | 1830 | 1830 |
| ***P-value*** | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |

Κατόπιν του ελέγχου της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς ανάμεσα στους δύο πληθυσμούς, διενεργήθηκε έλεγχος των διαφορών στους μέσους κάθε μεταβλητής μέσω της χρήσης της περιγραφικής στατιστικής.

Στον Πίνακα 4.1.4. παρουσιάζονται οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις των μεταβλητών W Οξύτητα ANS, R.T. W, Ικανότητα Subitizing, R.T. Subitizing στους μαθητές που έχουν κατηγοριοποιηθεί ως μαθητές με δυσαριθμησία και στους τυπικούς μαθητές, όπως αυτές προέκυψαν από τον στατιστικό έλεγχο. Βάσει του συγκεκριμένου πίνακα, υπάρχουν μεγάλες διαφορές στους μέσους κάθε μεταβλητής ανάλογα με την κατηγορία στην οποία εντάσσονται οι μαθητές.

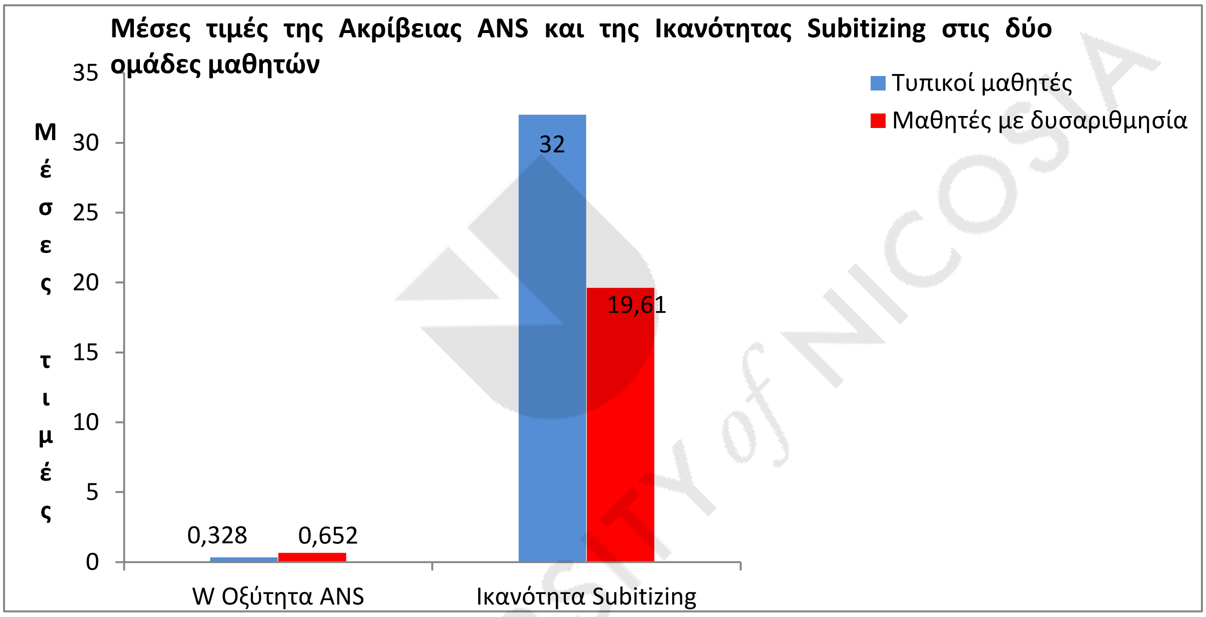
Πίνακας 4.1.4.

*Μέσες τιμές (M), τυπικές αποκλίσεις (SD), Mann-Whitney U και P-value των ικανοτήτων στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία | | Τυπικοί μαθητές | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N=60 | | N=60 | | | |
| | *M* | *SD* | *M* | *SD* | *Mann-Whitney U* | *P-value* |
| W Οξύτητα ANS | 0,6520 | 0,51852 | 0,328 | 0,08594 | 546,5 | 0,0001 |
| R.T W | 2934,20 | 635,35107 | 1.412,5167 | 189,3522 | 0,0001 | 0,0001 |
| Ικανότητα Subitizing | 19,6167 | 4,75890 | 32 | 0,00 | 0,0001 | 0,0001 |
| RT Subitizing | 114282 | 34273,39820 | 53.762,93 | 4560,65236 | 0,0001 | 0,0001 |

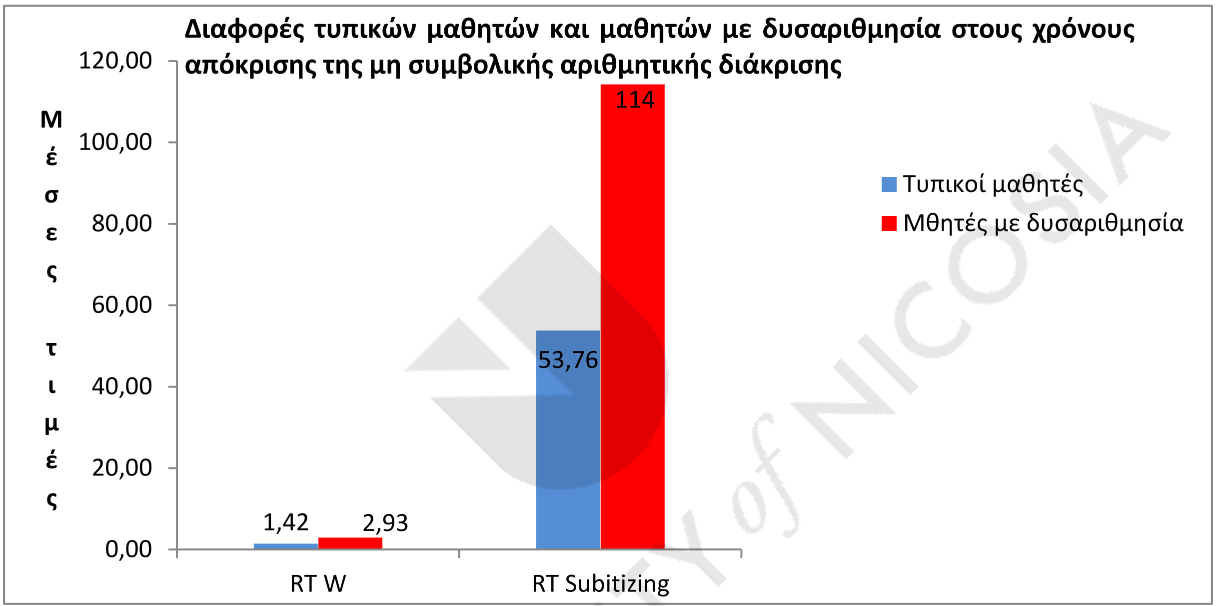
Στα Γραφήματα 4.1.1. και 4.1.2. απεικονίζονται οι διαφορές των μέσων τιμών των μεταβλητών W Οξύτητα ANS, R.T. W, Ικανότητα Subitizing, R.T. Subitizing στους δύο πληθυσμούς.

Ειδικότερα στο Γράφημα 4.1.1., παρουσιάζονται οι μέσες τιμές των μεταβλητών W και Ικανότητα Subitizing. Για τη μεταβλητή W Οξύτητα ANS, οι μέσοι είναι 0,328 για τους τυπικούς μαθητές και 0,652 γι’ αυτούς με δυσαριθμησία, με παρατηρούμενο ποσοστό διαφοράς των μέσων 49,69%. Βάσει του συγκεκριμένου ποσοστού, η ικανότητα της ακρίβειας του συστήματος των κατά προσέγγιση αριθμών, δηλαδή η ικανότητα των παιδιών να ανιχνεύουν διαφορές μεγέθους μεταξύ δύο ποσοτήτων χωρίς την εμπλοκή της απαρίθμησης, στους μαθητές με δυσαριθμησία ανέρχεται στο ήμισυ περίπου της ικανότητας των τυπικών μαθητών, εκφράζοντας ένα σημαντικό έλλειμμα σε αυτό το εγγενές αριθμητικό σύστημα. Για τη μεταβλητή Ικανότητα Subitizing, οι μέσοι είναι 32 για τους τυπικούς μαθητές και 19,6167 γι' αυτούς με δυσαριθμησία, με παρατηρούμενο ποσοστό διαφοράς 38,68%. Δηλαδή οι μαθητές με δυσαριθμησία έχουν σημαντικά μικρότερη ικανότητα ταχείας και ακριβούς εκτίμησης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων χωρίς προσφυγή στην καταμέτρηση.




*Γράφημα 4.1.1.*
Διαφορές μέσων τιμών στην ικανότητα του συστήματος των κατά προσέγγιση αριθμών (ANS) και στην ικανότητα Subitizing, μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

Στο Γράφημα 4.1.2. απεικονίζονται οι μέσες τιμές του χρόνου απόκρισης του W (R.T. W) και του χρόνου απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T. Subitizing). Η μεγαλύτερη διαφορά παρουσιάζεται στη μεταβλητή R.T Subitizing, όπου οι μέσοι είναι 53.762,93 ms. για τους τυπικούς μαθητές και 114.282 ms. με το ποσοστό διαφοράς μεταξύ των δύο πληθυσμών να ανέρχεται στο 52,9%, αναδεικνύοντας ότι οι χρόνοι που κάνουν οι μαθητές να εκτιμήσουν άμεσα μια μικρή ποσότητα, από 1 έως και 4 αντικείμενα, χωρίς προσφυγή στην καταμέτρηση, υπερβαίνουν το διπλάσιο των χρόνων που χρειάζονται τυπικοί μαθητές γι’ αυτήν την ικανότητα. Για τη μεταβλητή R.T. W, οι μέσοι είναι 1.412,5167 ms. για τους τυπικούς μαθητές και 2.934,2 ms. γι’ αυτούς με δυσαριθμησία με ποσοστιαία διαφορά 51,8%. Δηλαδή, οι μαθητές με δυσαριθμησία εμφανίζουν διπλάσιους χρόνους απόκρισης στο προσεγγιστικό σύστημα των αριθμών, στην προσπάθειά τους να ανιχνεύσουν διαφορές μεγέθους μεταξύ δύο ποσοτήτων, απ’ ότι οι τυπικά αναπτυσσόμενοι μαθητές.




*Γράφημα 4.1.2.*
Διαφορές μέσων τιμών στους χρόνους απόκρισης στην οξύτητα του ANS και στην ικανότητα Subitizing, μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

Συγκεφαλαιώνοντας τα ευρήματα αυτού του υποκεφαλαίου της μελέτης, διαπιστώνουμε ότι η μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία συσχετίζεται με την ακρίβεια του συστήματος των κατά προσέγγιση αριθμών (W) και ταυτοχρόνως μεσολαβείται σχεδόν εξολοκλήρου από την ανάπτυξη της ικανότητας Subitizing και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας. Οι μαθητές με δυσαριθμησία παρουσιάζουν στατιστικώς σημαντικές διαφορές στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, η οποία συναρθρώνεται από το εγγενές προσεγγιστικό σύστημα αριθμών (ANS) και το σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης μέσω της ικανότητας Subitizing, σε σχέση με τους τυπικούς μαθητές, με τα ποσοστά διαφοράς των μέσων τιμών να δηλώνουν ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία υπολείπονται κατά το ήμισυ περίπου αυτών των εγγενών ικανοτήτων. Στα πλαίσια αυτά, η ικανότητα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης συνιστά ένα σημαντικό δείκτη ελλειμμάτων στους μαθητές με δυσαριθμησία σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους.

### 4.2. Αποτελέσματα διερεύνησης των ικανοτήτων στην πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων των μαθητών με δυσαριθμησία

Ένα από τα ερωτήματα που απασχόλησαν την τρέχουσα μελέτη, ήταν οι σχέσεις της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία και της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, καθώς και οι διαφορές μεταξύ των παιδιών με τη διαταραχή και των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών στην πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων.

Κατά συνέπεια στο τρέχον υποκεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της σχέσης της μαθηματικής ικανότητας με τις απαριθμητικές ικανότητες, με την ικανότητα σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών, με την επίδραση της απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, με την επίδραση της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, με την ικανότητα στη σύγκριση διψήφιων αριθμών, με την επίδραση της απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση διψήφιων, με την επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων, με την επίδραση του μεγέθους των αριθμών και με την αντίστροφη καταμέτρηση, καθώς επίσης, και τα αποτελέσματα της διερεύνησης της ύπαρξης στατιστικά σημαντική διαφοράς μεταξύ των παιδιών με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας και των τυπικών μαθητών στις δοκιμασίες που αφορούν στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία.

Στον Πίνακα 4.2.1., παρουσιάζονται οι μέσες τιμές (Μ), οι τυπικές αποκλίσεις

(SD), οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), οι συντελεστές ασυμμετρίας και η κύρτωση των δέκα μεταβλητών της ικανότητας στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία των μαθητών με δυσαριθμησία.

Στον συγκεκριμένο πίνακα, αξίζει να αναφερθεί, ότι παρατηρείται μια διαφοροποίηση των μαθητών με δυσαριθμησία σχετικά με τους χρόνους απόκρισης στην επίδραση απόστασης των αριθμών. Συγκεκριμένα, η μέση τιμή στην επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ισούται με 41.092,4833 msec. ενώ η μέση τιμή στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων είναι μικρότερη και ισούται με 29.618,00 msec. Οι μεγαλύτεροι χρόνοι των μαθητών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων που απέχουν 1 αριθμό αντανακλούν μια μεγαλύτερη δυσκολία στη διάκριση αυτών των αριθμών. Ανάλογες διαφορές διαπιστώνουμε στις μέσες τιμές της επίδρασης απόστασης 1 ψηφίου (44.100,75 msec.) και της επίδρασης απόστασης 4-5 ψηφίων (35.813,4333 msec.) κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών.

Επιπρόσθετα, οι συντελεστές ασυμμετρίας της λοξότητας και της κύρτωσης των επτά μεταβλητών, παρέχουν τις πρώτες ενδείξεις για τη μη ύπαρξη κανονικής κατανομής με εξαίρεση, οριακά τουλάχιστον, να αποτελούν οι μεταβλητές Επίδραση απόστασης 1 αριθμού και Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων, συμπέρασμα το οποίο συμπίπτει με τους γραφικούς ελέγχους κανονικότητας μέσω των ιστογραμμάτων (Βλ. Παράρτημα 18, σελ. 446-448).

Πίνακας 4.2.1.

*Μέσες τιμές (M), τυπικές αποκλίσεις (SD), ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), συντελεστές ασυμμετρίας (Skewness) και Κύρτωση (Kurtosis) των ικανοτήτων στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία των μαθητών με δυσαριθμησία*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία (N=60) |
|---|---|

| | *M* | *SD* | *Min* | *Max* | *Skewness* | *Kurtosis* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ικανότητα Απαρίθμησης | 8,5833 | 1,5215 | 5 | 10 | -0,657 | -0,683 |
| RT Απαρίθμησης | 118146,81 | 12333,69 | 96.745 | 142.524 | -0,045 | -1,061 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | 25,6167 | 6,17565 | 4 | 32 | -1,244 | 1,336 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού | 41092,48 | 4134,04 | 32156 | 49876 | -0,028 | -0,359 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών | 29618,00 | 1877,23 | 24356 | 34268 | -0,287 | 0,579 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | 16,5667 | 5,44733 | 4 | 24 | -1,038 | -0,061 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | 44100,75 | 2693,08 | 40350 | 51234 | 1,091 | 0,767 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων | 35.813,43 | 3163,76 | 30984 | 41504 | 0,14 | -1,298 |
| Επίδραση Μεγέθους | 26.729,6 | 3077,73 | 20000 | 31245 | -0,490 | -0,965 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση | 7 | 4,62125 | 0 | 10 | -0,895 | -1,241 |

Εκτός των γραφικών ελέγχων, για τη συμβατότητα της κατανομής με την κανονική, διενεργήθηκε στατιστικός έλεγχος μέσω Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-wilk test σε κάθε μια από αυτές. Ο συγκεκριμένος έλεγχος απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση ύπαρξης της κανονικότητας, καθώς το p-value και των δύο test βρίσκεται σε επίπεδο σημαντικότητας < 0,05 (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακα 2. σελ. 452-457). Συνεπώς, λόγω των διαπιστώσεων της μη ύπαρξης της κανονικότητας των μεταβλητών, ο έλεγχος της ύπαρξης γραμμικής σχέσης μεταξύ αυτών, πραγματοποιήθηκε μέσω του μη παραμετρικού συντελεστή Spearman.

Βάσει του Πίνακα 4.2.2., η υπόθεση ύπαρξης συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας με τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας επιβεβαιώνεται για το σύνολο των μεταβλητών.

Ειδικότερα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,558, $p$ = 0,0001 < 0,05 με την ικανότητα απαρίθμησης, μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,498, $p$ = 0,0001 < 0,05 με την Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων $r_s$ = 0,787, $p$ = 0,0001 < 0,05 και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,546, $p$ = 0,0001 < 0,05 με τη μεταβλητή Αντίστροφη Καταμέτρηση, καταδεικνύοντας ότι η μαθηματική ικανότητα αναπτύσσεται, καθώς βελτιώνονται οι συγκεκριμένες ικανότητες.

Αντίθετα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,308, $p$ = 0,017 < 0,05, με τη μεταβλητή που αφορά τον χρόνο απόκρισης (R.T.) της απαρίθμησης, που σημαίνει ότι η μαθηματική ικανότητα αυξάνει όσο μικρότερος είναι ο χρόνος της απαρίθμησης των μαθητών.

Στον ίδιο πίνακα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,424, $p$ = 0,001 < 0,05, με την επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών και μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,290, $p$ = 0,025 < 0,05, με την επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων. Οι παραπάνω συσχετίσεις αντανακλούν αφενός την αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και του χρόνου απάντησης των μαθητών κατά τη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών που διαφέρουν κατά 1 αριθμητικό ψηφίο και κατά τη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών που διαφέρουν κατά 4-5 αριθμητικά ψηφία και αφετέρου την αύξηση της μαθηματικής ικανότητας καθώς μικραίνει η επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών.

Επίσης, διαπιστώνεται μέσα από τον στατιστικό έλεγχο, ότι η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_{s\,=}$ - 0,469 με τη μεταβλητή που αφορά την επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών με επίπεδο σημαντικότητας $p$ = 0,0001 < 0,05 και μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,349, $p$ = 0,001 < 0,05, με τη μεταβλητή Επίδραση Απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων. Εξετάζοντας προσεκτικά τις παραπάνω δύο αρνητικές συσχετίσεις που αφορούν στη μαθηματική ικανότητα με την επίδραση της απόστασης κατά 1 ψηφίο, με την επίδραση της απόστασης κατά 4-5 ψηφία κατά τη σύγκριση διψήφιων, και συγκρίνοντάς τες με τις ανάλογες συσχετίσεις που αφορούν στη μαθηματική ικανότητα και στην επίδραση των αποστάσεων των αριθμών στη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων, διαπιστώνουμε ότι οι αρνητικές συσχετίσεις της μαθηματικής ικανότητας είναι μεγαλύτερες κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, γεγονός που επίσης υποδηλώνει σε μεγαλύτερο βαθμό ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας συναρτάται με την μικρότερη επίδραση αυτού του φαινομένου στους μαθητές με δυσαριθμησία.

Ομοίως, στον ίδιο πίνακα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη μεταβλητή που αφορά την Επίδραση του Μεγέθους των αριθμών $r_s$ = - 0,493, $p$ = 0,001 < 0,05. Η επίδραση του μεγέθους του αριθμού, αναφέρεται στην παρατήρηση ότι είναι ευκολότερη η διάκριση μικρών ποσοτήτων έναντι μεγαλύτερων παρά την ίδια αριθμητική απόσταση μεταξύ τους. Η αρνητική συσχέτιση επομένως, καταδεικνύει ότι η μαθηματική ικανότητα αναπτύσσεται όσο μικρότερη είναι η επίδραση αυτού του φαινομένου στους μαθητές, δηλαδή όσο οι μαθητές καταφέρνουν να μειώσουν τον χρόνο απόκρισης κατά τη σύγκριση μεγάλων αριθμών που διαφέρουν ένα αριθμητικό ψηφίο (π.χ. 8 έναντι 9), σε σχέση με το μικρό χρόνο απόκρισης που έχουν όταν συγκρίνουν μικρούς αριθμούς που επίσης διαφέρουν κατά ένα αριθμητικό ψηφίο (π.χ. 3 έναντι 4).

Στη βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων της στατιστικής επεξεργασίας, επισημαίνεται μια εδραιωμένη συναφειακή σχέση μεταξύ της επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και της επίδοσής τους στα μαθηματικά, η οποία και αποτελεί μια ασφαλή ένδειξη ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας σχετίζεται σημαντικά με την ανάπτυξη όλων των συνιστωσών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Η χαμηλή μαθηματική επίδοση των συγκεκριμένων μαθητών βρίσκεται σε συνάφεια με τη χαμηλή ικανότητα απαρίθμησης, με την αδύναμη διαμόρφωση αναπαραστατικών σχέσεων κατά τη σύγκριση μονοψήφιων και ιδιαιτέρως κατά τη σύγκριση διψήφιων (λόγω του βαθμού συσχέτισης), με τις μεγαλύτερες επιδράσεις του φαινομένου απόστασης των αριθμών και του μεγέθους, καθώς και με την αδυναμία της αντίστροφης καταμέτρησης.

Πίνακας 4.2.2.

*Συσχετίσεις της μαθηματικής ικανότητας με τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας*

| | Μαθηματική Ικανότητα | |
|---|---|---|
| | Spearman's rho | P-value |
| Ικανότητα Απαρίθμησης | 0,558** | 0,0001 |
| RT Απαρίθμησης | -0,308* | 0,017 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | 0,498** | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού | -0,424** | 0,001 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών | -0,290* | 0,025 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | 0,787** | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | -0,469** | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων | -0,349** | 0,006 |
| Επίδραση Μεγέθους | -0,493** | 0,0001 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση | 0,546** | 0,0001 |

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).
* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Στα πλαίσια του συγκριτικού έλεγχου Mann-Whitney, καταδεικνύεται μια στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών και παιδιών με δυσαριθμησία, για όλες τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, καθώς το p-value είναι $p$ = 0,0001 < 0,05 = α (επίπεδο σημαντικότητας) (Βλ. Πίνακα 4.2.3.).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.3.

*Έλεγχος ύπαρξης σημαντικής διαφοράς μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των* *τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών στην ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας*

| Έλεγχος Mann-Whitney U μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία (N=60) και τυπικών μαθητών (N=60) στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας | | | |
|---|---|---|---|
| | Mann-Whitney U | Wilcoxon W | P-value |
| Ικανότητα Απαρίθμησης | 810 | 2640 | 0,0001 |
| RT Απαρίθμησης | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | 300 | 2130 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Επίδρασης απόστασης 4-5 ψηφίων | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Επίδραση Μεγέθους | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |

Στον πίνακα 4.2.4. παρουσιάζονται οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τη χρήση της περιγραφικής στατιστικής, ο έλεγχος Mann-Whitney U και το P-value των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας στους μαθητές με δυσαριθμησία και τους τυπικούς μαθητές. Όπως παρατηρούμε υπάρχουν μεγάλες διάφορες στους μέσους κάθε μεταβλητής ανάλογα με την κατηγορία στην οποία εντάσσονται οι μαθητές.

Πίνακας 4.2.4.

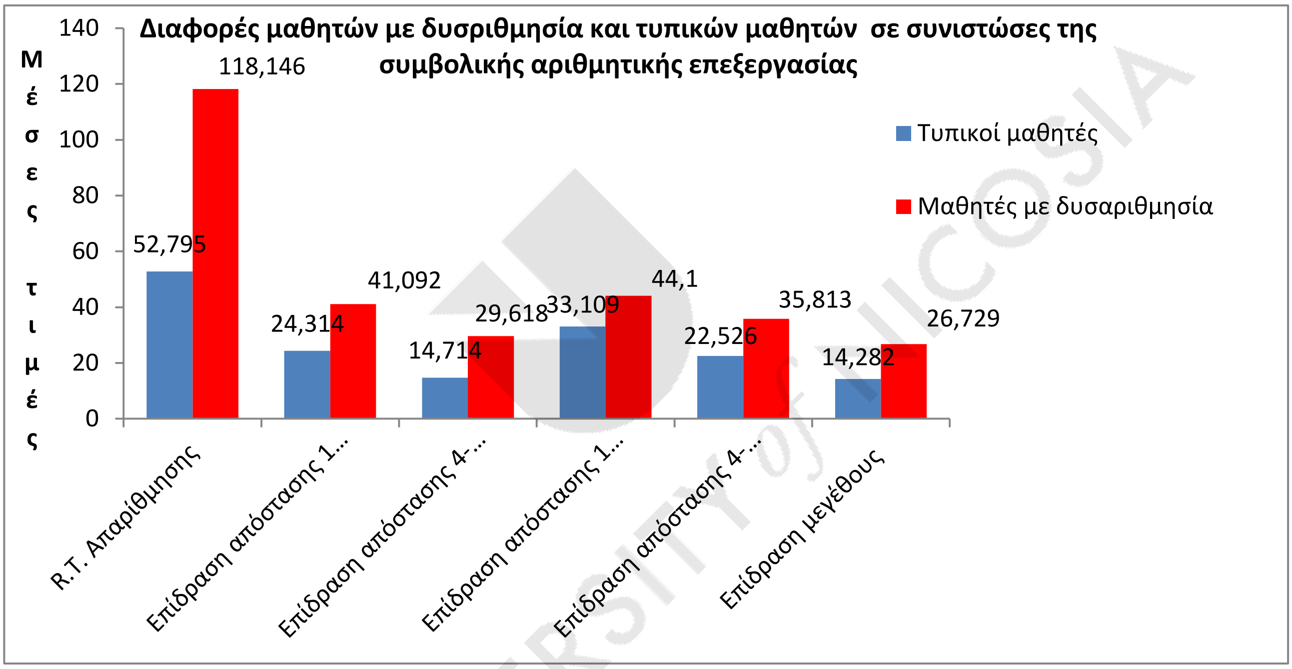
*Μέσες τιμές (M), Τυπικές αποκλίσεις (SD), Mann-Whitney U και P-value των ικανοτήτων στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία (N=60) | Τυπικοί μαθητές (N=60) |
|---|---|---|

| | *M* | *SD* | *M* | *SD* | *Mann-Whitney* | *P-value* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ικανότητα Απαρίθμησης | 8,5833 | 1,5215 | 10 | 0,000 | 810 | 0,0001 |
| RT Απαρίθμησης | 118.146,816 | 12.333,6973 | 52.795,95 | 3.045,97 | 0,0001 | 0,0001 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | 25,6167 | 6,17565 | 32 | 0,000 | 300 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού | 41.092,483 | 4.134,04 | 24.314,48 | 2.736,69 | 0,0001 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών | 29.618,00 | 1.877,2342 | 14.714,8 | 2.394,31 | 0,0001 | 0,0001 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | 16,5667 | 5,44733 | 32 | 0,000 | 0,0001 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | 44.100,75 | 2.693,0813 | 33.109,83 | 2.343,33 | 0,0001 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων | 35.813,4333 | 3.163,7631 | 22.526,03 | 1.753,74 | 0,0001 | 0,0001 |
| Επίδραση Μεγέθους | 26.729,6 | 3.077,7315 | 14.282,66 | 3.030,34 | 0,0001 | 0,0001 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση | 7 | 4,62125 | 20 | 0,000 | 0,0001 | 0,0001 |

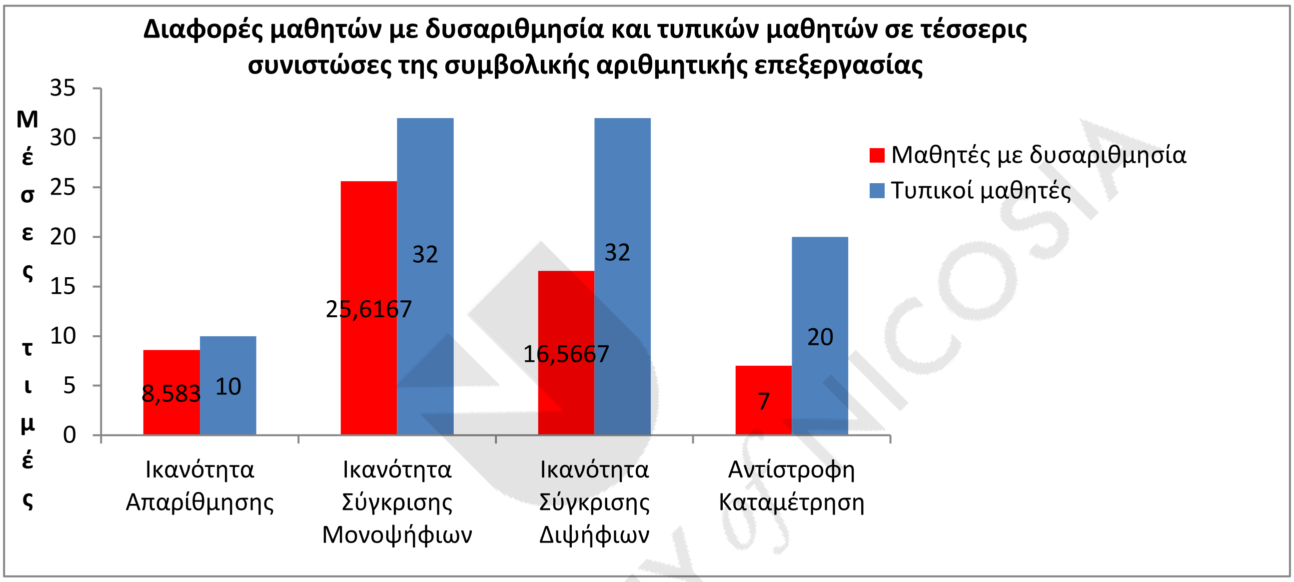
Στα Γραφήματα 4.2.1. και 4.2.2. απεικονίζονται οι μέσες τιμές των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας στους μαθητές με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας και στους τυπικούς μαθητές.

Ειδικότερα, στο Γράφημα 4.2.1. παρουσιάζονται οι μέσες τιμές των μεταβλητών: R.T. Απαρίθμησης, Επίδραση απόστασης 1 αριθμού, Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών, Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου, Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων και Επίδραση Μεγέθους στις δύο κατηγορίες μαθητών. Βασιζόμενοι στους μέσους όρους, η μεγαλύτερη διαφορά βλέπουμε να παρουσιάζεται στις μέσες τιμές της μεταβλητής R.T. Απαρίθμησης με ποσοστό διαφοράς 55,31%, υποδεικνύοντας, ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία υπερβαίνουν τους διπλάσιους χρόνους, στην προσπάθεια τους να καταμετρήσουν ποσότητες, σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους. Για τη μεταβλητή επίδραση απόστασης 1 αριθμού, το ποσοστό διαφοράς των μέσων τιμών είναι 40,8% και στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών το ποσοστό διαφοράς των μέσων τιμών ανέρχεται στο 50,31%, αναδεικνύοντας ότι στους μαθητές με δυσαριθμησία είναι διπλάσια σχεδόν η επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων. Ομοίως, στην επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών παρατηρείται ποσοστό διαφοράς 24,9% και στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών παρατηρείται ποσοστό διαφοράς 37,10%. Αντίστοιχα, στη μεταβλητή επίδραση του μεγέθους των αριθμών το ποσοστό διαφοράς είναι 46,56%, αντανακλώντας το γεγονός της μεγαλύτερης του φαινομένου επίδρασης του μεγέθους των αριθμών στους μαθητές με την εν λόγω διαταραχή απ' ότι στους τυπικούς.




*Γράφημα 4.2.1.*
Διαφορές μέσων τιμών στον χρόνο απόκρισης της απαρίθμησης, στην επίδραση απόστασης 1 αριθμού, στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, στην επίδραση απόστασης 1 ψηφίου, στην επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και στην επίδραση μεγέθους των αριθμών, μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

Στο Γράφημα 4.2.2. παρουσιάζονται οι διαφορές των μέσων τιμών των μεταβλητών, Ικανότητα Απαρίθμησης, Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων και Αντίστροφη Καταμέτρηση, στις δύο ομάδες πληθυσμού. Στη μεταβλητή Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων, οι μέσοι είναι 32 για τους τυπικούς μαθητές με άριστα το 32 και 16,5667 γι' αυτούς με δυσαριθμησία, με παρατηρούμενη ποσοστιαία διαφορά 48,12%. Στη μεταβλητή Ικανότητα Απαρίθμησης, οι μέσοι είναι 10 για τους τυπικούς μαθητές με άριστα το 10 και 8,583 γι' αυτούς με δυσαριθμησία, με ποσοστιαία διαφορά 14%. Στη μεταβλητή Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, οι μέσοι είναι 32 για τους τυπικούς μαθητές με άριστα το 32 και 25,6167 για τους μαθητές που ενδιαφέρει την έρευνα, με ποσοστιαία διαφορά 19,9%. Στην αντίστροφη καταμέτρηση το ποσοστό διαφοράς ανέρχεται στο 65%.




*Γράφημα 4.2.2.*
Διαφορές μέσων τιμών στην ικανότητα απαρίθμησης, στην ικανότητα σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών, στην ικανότητα σύγκρισης διψήφιων αριθμών και στην αντίστροφη καταμέτρηση, μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

Επισκοπώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό διαφοράς των παιδιών με δυσαριθμησία σε σχέση με τους τυπικούς μαθητές, εντοπίζεται στην ικανότητα της αντίστροφης καταμέτρησης, αντικατοπτρίζοντας τη δυσκολία των συγκεκριμένων μαθητών στην αναπαράσταση μιας νοητικής ακριβούς αριθμογραμμής και κατ' επέκταση αδυναμία αξιόπιστης μέτρησης σε αυτή προς τα πίσω τοποθετώντας τους αριθμούς – στόχους κατάλληλα, ξεκινώντας από ένα σημείο αναφοράς. Ακολουθεί το μεγάλο ποσοστό διαφοράς στην ικανότητα σύγκρισης διψήφιων αριθμών και έπεται το ποσοστό της διαφοράς στην ικανότητα σύγκρισης μονοψήφιων, αναδεικνύοντας την απουσία ευελιξίας των συγκεκριμένων μαθητών στο χειρισμό και κατ' επέκταση στη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών, και ιδιαίτερα, όταν το μέγεθος αυτών μεγαλώνει. Το μικρότερο ποσοστό διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων εμφανίζεται στην ικανότητα απαρίθμησης. Αυτό με τη σειρά του αναδεικνύει τα υπαρκτά λάθη των μαθητών με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας σε μια απαρίθμηση δέκα στοιχείων σε αντίθεση με τους τυπικούς μαθητές που δεν εμφάνισαν κανένα λάθος.

Συγκεφαλαιώνοντας, οι διαφορές των μαθητών με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας και τυπικών στις ικανότητες της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, οι οποίες εντοπίζονται στους υψηλούς χρόνους που χρειάστηκαν οι μαθητές στην απαρίθμηση, στη σύγκριση των μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών, στους μεγαλύτερες χρόνους στις επιδράσεις των φαινομένων της απόστασης και του μεγέθους των αριθμών, στα απαριθμητικά λάθη και με την αναγνώριση ότι η αντίστροφη καταμέτρηση εμφάνισε το υψηλότερο ποσοστό διαφοράς, συνιστούν σημαντικές πηγές μαθηματικών μηχανισμών που σχετίζονται με την κακή αριθμητική απόδοση κι επομένως συνιστούν σημαντικούς δείκτες διαφοροποίησης των δύο ομάδων μαθητών.

### 4.3. Αποτελέσματα διερεύνησης των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία

Στο τρέχον υποκεφάλαιο της μελέτης, παρουσιάζονται αφενός τα αποτελέσματα της διερεύνησης της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης μεταξύ των χαμηλών αριθμητικών επιτευγμάτων των παιδιών με δυσαριθμησία και της επίδοσής τους στις γνωστικές λειτουργίες και αφετέρου τα αποτελέσματα της διερεύνησης ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς των επιδόσεων των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών στην εργαζόμενη μνήμη και στις εκτελεστικές λειτουργίες.

Αρχικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας και της εργαζόμενης μνήμης, λεκτικής και οπτικοχωρικής, και τα αποτελέσματα της διερεύνησης της ύπαρξης σχέσης της μαθηματικής ικανότητας και των εκτελεστικών λειτουργιών της αναστολής, της προσοχής - ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής.

Στον Πίνακα 4.3.1. παρουσιάζονται οι μέσες τιμές (M), οι τυπικές αποκλίσεις (SD), οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max) και οι συντελεστές ασυμμετρίας των ικανοτήτων στις γνωστικές λειτουργίες των μαθητών με δυσαριθμησία.

Ενδεικτικά αναφέρουμε, τις μεγάλες μέσες τιμές στην προσοχή - ταχύτητα επεξεργασίας 178,8 sec. και στη γνωστική εναλλαγή 432,73 sec., που παρατηρούνται αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες μέσες τιμές ξεπερνούν τον αποδεκτό χρόνο ολοκλήρωσης, καθώς σύμφωνα με το σταθμισμένο εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση αυτών των ικανοτήτων, ο χρόνος πρέπει να είναι μικρότερος των 78 δευτερολέπτων για την προσοχή – ταχύτητα επεξεργασίας, και μικρότερος των 273 δευτερολέπτων για τη γνωστική εναλλαγή, καταδεικνύοντας ελλείμματα σε αυτά τα δομήματα των επιτελικών λειτουργιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.1.

*Μέσες τιμές (M), τυπικές αποκλίσεις (SD), ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωση των ικανοτήτων στις γνωστικές λειτουργίες των μαθητών με δυσαριθμησία.*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία (N=60) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | *SD* | *Min* | *Max* | *Skewness* | *Kurtosis* |
| Μνήμη Αριθμών | 1,2833 | 0,88474 | 0 | 2,5 | -0,218 | -1,302 |
| Μνήμη Λέξεων | 2,3167 | 0,83345 | 1 | 4 | 0,065 | -0,553 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Οπτικοχωρική Μνήμη | 1,975 | 0,5556 | 1 | 3 | 0,791 | -0,497 |
| Ικανότητα Αναστολής | 22,25 | 8,12951 | 4 | 32 | -0,034 | -1,441 |
| R.T Αναστολής | 122.348,13 | 41.752,14 | 75428 | 198.154 | 0,525 | -1,331 |
| Προσοχή Ταχύτητα Επεξεργασίας | 178,8 | 36,43373 | 108 | 263 | 0,139 | -0,593 |
| Γνωστική Εναλλαγή | 432,7333 | 57,36971 | 329 | 592 | 0,795 | -0,012 |

Στο Παράρτημα 18 (σελ. 446-448) παρουσιάζονται οι γραφικοί έλεγχοι μέσω των ιστογραμμάτων των 7 μεταβλητών αυτού του ερωτήματος, όπου από την οπτική εξέταση των διαπιστώνεται, ότι δε διατηρείται κάποια σχετική συμμετρία, με εξαίρεση τη μεταβλητή Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας, όπου παρατηρείται ύπαρξη συμμετρίας και συγκέντρωση στο κέντρο των υψηλών συχνοτήτων. Περαιτέρω, τα αποτελέσματα, όπως αυτά προκύπτουν από τη διενέργεια των τεστ Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακα 3, σελ.452-457), για τον έλεγχο της κανονικής κατανομής, απορρίπτουν τη μηδενική υπόθεση ύπαρξης κανονικότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 5% ($p$ = 0,001 < α = 0,05), με τη μεταβλητή Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας να αποτελεί εξαίρεση και να ακολουθεί κανονική κατανομή (το p-value του Kolmogorov-Smirnov είναι $p$ = 0,200 > 0,05 και το p-value του Shapiro-Wilk είναι $p$ = 0,658 > 0,05), διαπίστωση στην οποία είχαμε περιέλθει και με την παρατήρηση του αντίστοιχου ιστογράμματος. Κατά συνέπεια διενεργήθηκε μη παραμετρικός έλεγχος ύπαρξης γραμμικής σχέσης μεταξύ των ποσοτικών μεταβλητών.

Στον Πίνακα 4.3.2. απεικονίζεται ο έλεγχος συσχετίσεων του Spearman's rho, ο οποίος ανέδειξε μέτριες προς ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της πλειονότητας των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών.

Συγκεκριμένα βρέθηκε, ότι η μαθηματική ικανότητα σχετίζεται ισχυρά θετικά με τη Μνήμη Αριθμών $r_s$ = 0,916, $p$ = 0,0001 < 0,05, και μετρίως θετικά με τη Μνήμη Λέξεων $r_s$ = 0,317, $p$ = 0,014 < 0,05. Λόγω του βαθμού συσχέτισης με τη μνήμη αριθμών, συμπεραίνουμε ότι η μαθηματική ικανότητα στους μαθητές με δυσαριθμησία μεσολαβείται εξ' ολοκλήρου από τη Μνήμη Αριθμών. Ωστόσο, οι ανωτέρω συσχετίσεις αντανακλούν το γεγονός ότι η μαθηματική ικανότητα σχετίζεται και με τις δύο διαστάσεις της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης. Ο βαθμός από την άλλη της συσχέτισης, ιδιαίτερα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, εισηγείται ότι η λεκτική εργαζόμενη μνήμη, συνιστά ένα σημαντικό παράγοντα της γνωστικής βάσης της μαθηματικής ικανότητας των συμμετεχόντων μαθητών. Ολοκληρώνοντας τις διαπιστωθείσες σχέσεις της μαθηματικής ικανότητας με την εργαζόμενη μνήμη, παρατηρούμε ότι η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει θετική συσχέτιση με την οπτικοχωρική μνήμη ($r_s$ = 0,142, $p$ = 0,280 > 0,05), χωρίς ωστόσο αυτή να είναι στατιστικά σημαντική.

Αντίθετα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την ικανότητα αναστολής ($r_s$ = 0,452, $p$ = 0,0001 < 0,05). Δεν επαληθεύεται ωστόσο η ίδια υπόθεση με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητα αναστολής, καθώς η αρνητική συσχέτιση που προκύπτει δεν είναι στατιστικά σημαντική ($r_s$ = - 0,140, $p$ = 0,285 > 0,05).

Βάσει των αποτελεσμάτων του ίδιου πίνακα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την ικανότητα της προσοχής - ταχύτητα επεξεργασίας. Η αρνητική συσχέτιση αιτιολογείται στη βάση του χρόνου απόκρισης με την οποία αποτιμήθηκε η συγκεκριμένη ικανότητα στο Trail Making Test, όπου όσο πιο μικρός χρόνος επιτευχθεί στο τεστ τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα προσοχής και επεξεργασίας των πληροφοριών. Πιο συγκεκριμένα, η συσχέτιση αυτή ισούται με $r_s$ = - 0,518 και $p$ = 0,0001 < 0,05. Ταυτόχρονα, διαπιστώνεται μια ισχυρή αρνητική συσχέτιση με την ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής, $r_s$ = - 0,885 και $p$ = 0,0001 < 0,05. Η αρνητική συσχέτιση κατανοείται στη βάση του ό,τι η βαθμολόγηση αυτής της ικανότητας μετριέται με όρους χρόνου απόκρισης στη συγκεκριμένη συνθήκη Trail Making Test, δηλαδή, καθώς η ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής αυξάνεται, μειώνονται οι χρόνοι απόκρισης και μειωμένοι χρόνοι απόκρισης δείχνουν βελτιωμένη μαθηματική ικανότητα.

Τα παραπάνω ευρήματα επισημαίνουν τις μεγάλες συσχετίσεις των γνωστικών λειτουργιών με τη μαθηματική ικανότητα. Με άλλα λόγια, οι γνωστικές λειτουργίες της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης (μνήμη αριθμών, μνήμη λέξεων) και των επιτελικών λειτουργιών της αναστολής, της προσοχής - ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και η γνωστική εναλλαγή, μεσολαβούν σημαντικά την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας.

Πίνακας 4.3.2.

*Συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και των γνωστικών λειτουργιών*

| | Μαθηματική Ικανότητα | |
|---|---|---|
| | Spearman's rho | P-value |
| Μνήμη Αριθμών | 0,916** | 0,0001 |
| Μνήμη Λέξεων | 0,317* | 0,014 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη | 0,142 | 0,280 |
| Ικανότητα Αναστολής | 0,452** | 0,0001 |
| RT Αναστολής | -0,140 | 0,285 |
| Προσοχή Ταχύτητα Επεξεργασίας | -0,518** | 0,0001 |
| Γνωστική Εναλλαγή | -0,885** | 0,0001 |

**Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).
*Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Η διερεύνηση της διαφοράς μεταξύ των επιδόσεων των παιδιών με δυσαριθμησία και των τυπικών στις γνωστικές λειτουργίες, πραγματώθηκε μέσω του ελέγχου Mann-Whitney. Βάσει του Πίνακα 4.3.3., υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων στην εργαζόμενη μνήμη, τόσο στη λεκτική (μνήμη αριθμών, μνήμη λέξεων) όσο και στην οπτικοχωρική, και στις επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, του χρόνου απόκρισης της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής ($p$ = 0,0001 < 0,05)

Πίνακας 4.3.3.

*Έλεγχος Mann-Whitney μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών στις γνωστικές λειτουργίες*

| Έλεγχος Mann-Whitney μαθητών με δυσαριθμησία (N=60) και τυπικών μαθητών (N=60) στις μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών | | | |
|---|---|---|---|
| | Mann-Whitney U | Wilcoxon W | P-value |
| Μνήμη Αριθμών | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Μνήμη Λέξεων | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη | 324 | 2154 | 0,0001 |
| Ικανότητα Αναστολής | 480 | 2310 | 0,0001 |
| R.T Αναστολής | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |
| Γνωστική Εναλλαγή | 0,0001 | 1830 | 0,0001 |

Grouping Variable: Κατηγορία παιδιών

Κατόπιν του ελέγχου της ύπαρξης στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ παιδιών με δυσαριθμησία και τυπικών στις γνωστικές λειτουργίες, ακολουθεί ο Πίνακας 4.3.4., με τις μέσες τιμές (M) και τυπικές αποκλίσεις (SD) των δύο πληθυσμών στις γνωστικές λειτουργίες, βάσει του οποίου, διαπιστώνονται μεγάλες διάφορες στους μέσους κάθε μεταβλητής των γνωστικών λειτουργιών.

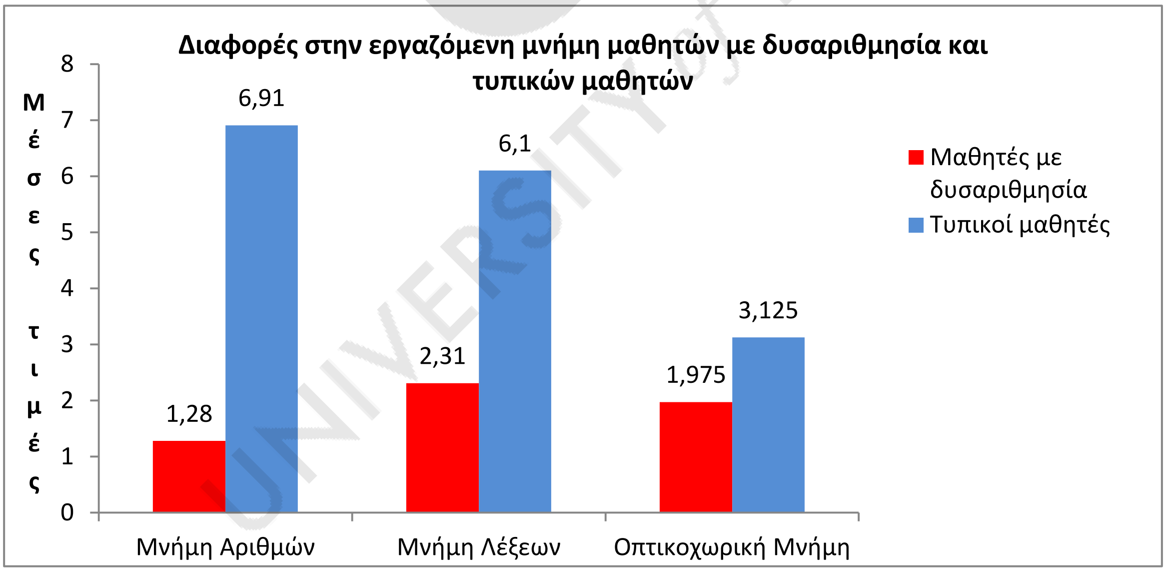
Πίνακας 4.3.4.

*Μέσες τιμές (M), Τυπικές αποκλίσεις (SD), Mann-Whitney U και P-value στις γνωστικές λειτουργίες μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία (N=60) | | Τυπικοί μαθητές (N=60) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | *SD* | *M* | *SD* | *Mann-Whitney* | *P-value* |
| Μνήμη Αριθμών | 1,2833 | 0,88474 | 6,9167 | 0,99646 | 0,0001 | 0,0001 |
| Μνήμη Λέξεων | 2,3167 | 0,83345 | 6,1 | 0,752 | 0,0001 | 0,0001 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη | 1,975 | 0,5556 | 3,125 | 0,557 | 324 | 0,0001 |
| Ικανότητα Αναστολής | 22,25 | 8,12951 | 32 | 0,000 | 480 | 0,0001 |
| RT Αναστολής | 122.348,1333 | 41.752,148 | 53.708,8 | 2.952,58 | 0,0001 | 0,0001 |
| Προσοχή – Ταχύτητα Επ/σίας | 178,8 | 36,43373 | 61,8 | 10,549 | 0,0001 | 0,0001 |
| Γνωστική Εναλλαγή | 432,7333 | 57,36971 | 170,01 | 39,634 | 0,0001 | 0,0001 |

Στα γραφήματα 4.3.1, 4.3.2., 4.3.3 και 4.3.4. απεικονίζονται οι διαφορές των μέσων τιμών των δύο ομάδων μαθητών στις γνωστικές λειτουργίες.

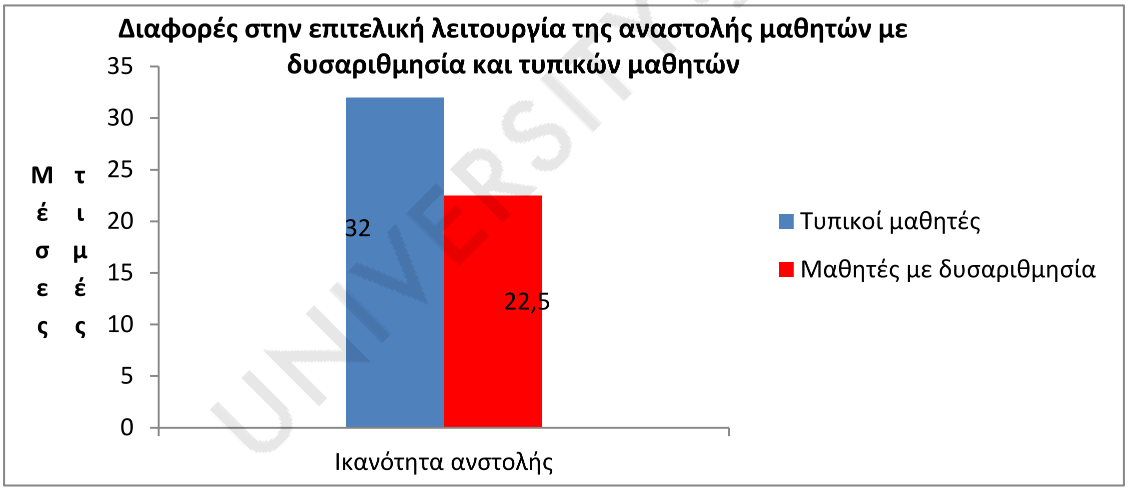
Ειδικότερα, το Γράφημα 4.3.1. παρουσιάζει τις διαφορές των μέσων τιμών των δύο ομάδων πληθυσμών στην εργαζόμενη μνήμη.




*Γράφημα 4.3.1.*
Διαφορές μέσων τιμών στην εργαζόμενη μνήμη λεκτική (μνήμη αριθμών, μνήμη λέξεων) και οπτικοχωρική, στους τυπικούς μαθητές και στους μαθητές με δυσαριθμησία

Η μεγαλύτερη διαφορά παρατηρείται στο εύρος της μνήμης αριθμών, όπου οι μέσοι είναι 6,9167 για τους τυπικούς μαθητές και 1,2833 γι’ αυτούς με δυσαριθμησία με ποσοστιαία διαφορά 81,1%. Αντίστοιχα, η μικρότερη διαφορά παρουσιάζεται στην Οπτικοχωρική Μνήμη, όπου οι μέσοι είναι 3,125 για τους τυπικούς μαθητές και 1,975 γι’ αυτούς με δυσαριθμησία, με ποσοστό διαφοράς των μέσων 37,09%. Για τη Μνήμη Λέξεων, οι μέσοι είναι 6,10 για τους τυπικούς μαθητές και 2,3167 γι’ αυτούς με δυσαριθμησία με ποσοστιαία διαφορά 60,6%. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα αναδεικνύουν το μικρό εύρος της μνήμης αριθμών, της μνήμης λέξεων και της οπτικοχωρικής μνήμης των μαθητών με τη διαταραχή και κατ’ επέκταση του μικρού εύρους συγκράτησης πληροφοριών.

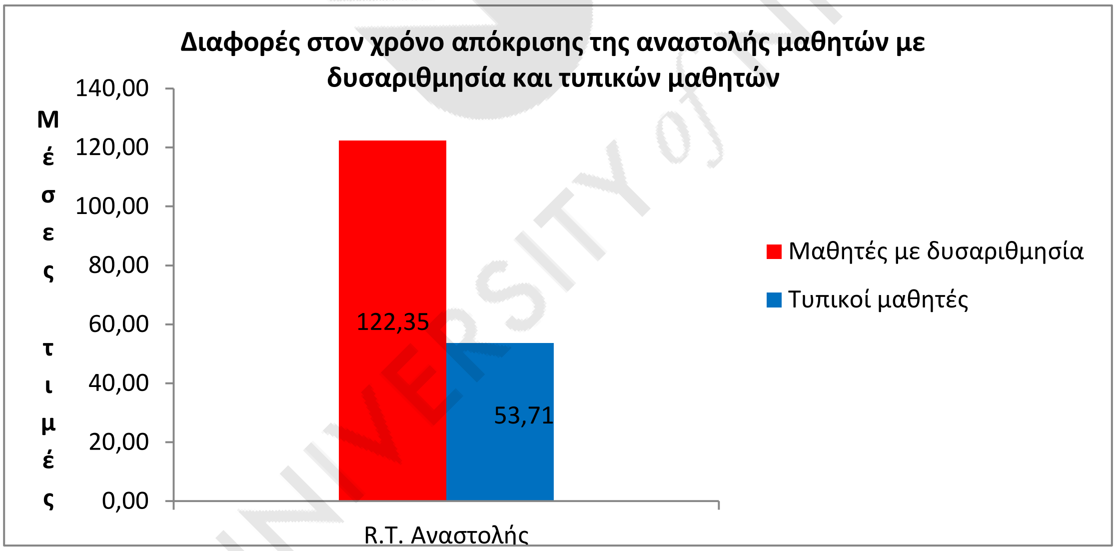
Οι διαφορές στην επιτελική λειτουργία της αναστολής απεικονίζονται στο Γράφημα 4.5.2, με την ποσοστιαία διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων παιδιών να ανέρχεται στο 30,46%, καθώς οι μέσοι είναι 32 για τους τυπικούς μαθητές και 22,5 για τους μαθητές με δυσαριθμησία.




*Γράφημα 4.3.2.*
Διαφορές μέσων τιμών στην επιτελική λειτουργία της αναστολής μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

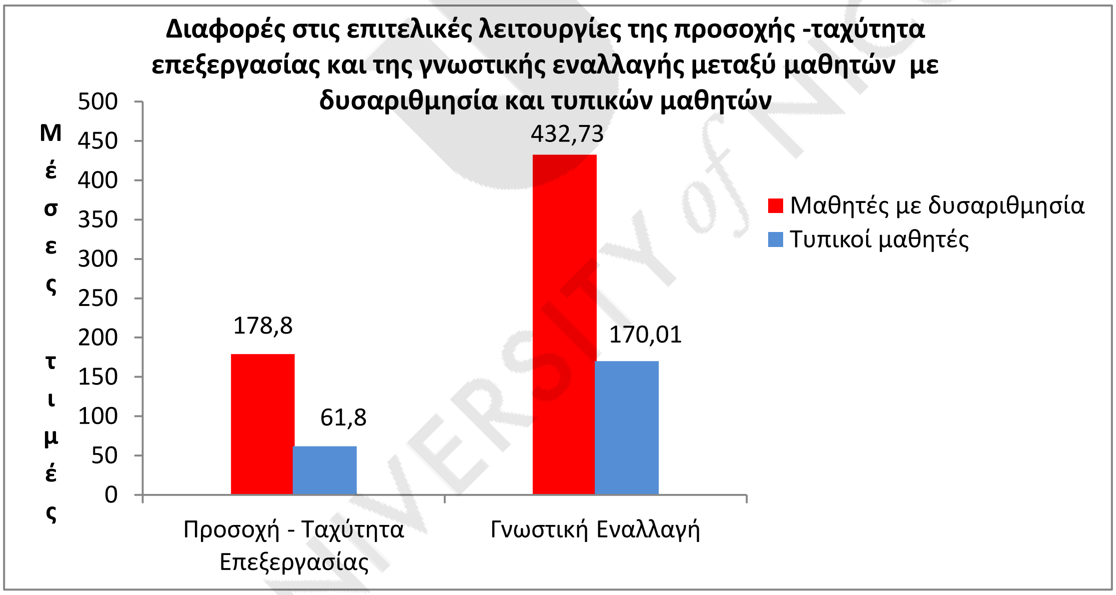
Οι μαθητές με τη διαταραχή, εμφάνισαν λάθη στο αριθμητικό έργο αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, όπου έπρεπε να διακρίνουν τον μεγαλύτερο ποσοτικά μεταξύ δύο αριθμών που διέφεραν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το 2), μέσω της σιωπηρής επεξεργασίας των αριθμητικών μεγεθών και της νοερής αναπαράστασής τους, σε αντίθεση με τους τυπικούς συνομήλικους που δεν εμφάνισαν λάθη.

Οι διαφορές στην επιτελική λειτουργία της αναστολής δεν αποτυπώνονται μόνο στην επίδοση που είχαν στο αριθμητικό έργο της αναστολής, αλλά και στον χρόνο απόκρισης αυτής. Στο Γράφημα 4.3.3. παρουσιάζονται οι διαφορές στον χρόνο απόκρισης της επιτελικής λειτουργίας της αναστολής, όπου για τη συγκεκριμένη μεταβλητή (R.T. Αναστολής), οι μέσοι είναι 53,798 sec. για τους τυπικούς μαθητές και 122,348 sec.γι' αυτούς με δυσαριθμησία, με ποσοστιαία διαφορά 60%. Οι μεγάλοι χρόνοι των μαθητών με δυσαριθμησία αντανακλούν τη χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας των ερεθισμάτων στο αριθμητικό έργο της αναστολής.




*Γράφημα 4.3.3.*
Διαφορές μέσων τιμών στον χρόνο απόκρισης της αναστολής μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

Το Γράφημα 4.3.4. που ακολουθεί, παρουσιάζει τις διαφορές των δύο ομάδων μαθητών στις επιτελικές λειτουργίες τη προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής. Στην επιτελική λειτουργία της Προσοχής – Ταχύτητα Επεξεργασίας, οι μέσοι είναι 61,8 sec για τους τυπικούς μαθητές και 178,8 sec γι' αυτούς με δυσαριθμησία με ποσοστό διαφοράς 65,43%. Αυτό το εύρημα τεκμηριώνει μια σημαντική έκπτωση τόσο στην προσοχή των συγκεκριμένων μαθητών όσο και στην ταχύτητα με την οποία επεξεργάζονται τα ερεθίσματα. Ομοίως, στην επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 60,66%, καθώς οι μέσοι είναι 170,0167 sec. για τους τυπικούς μαθητές και 432,7333 sec. γι' αυτούς με δυσαριθμησία. Οι ασύμβατοι χρόνοι στην επιτελική λειτουργία της αναστολής αντανακλούν τις δυσκολίες των μαθητών στην ικανότητα αποτελεσματικής μετάβασης μεταξύ διαφορετικών έργων και διαδικασιών, δηλαδή στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο όποτε αυτό είναι απαραίτητο, για τη λειτουργική εκτέλεση μιας πράξης.




*Γράφημα 4.3.4.*
Διαφορές μέσων τιμών στις επιτελικές λειτουργίες της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής μεταξύ μαθητών με δυσαριθμησία και τυπικών μαθητών

Συναρθρώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, διαπιστώνονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στις δύο ομάδες μαθητών με τα δομήματα των γνωστικών λειτουργιών, εργαζόμενη μνήμη και επιτελικές λειτουργίες, με την αναγνώριση ότι αυτά αποτελούν σημαντικά διαφοροποιητικά, αξιολογικά στοιχεία της διάκρισης των μαθητών με τη διαταραχή από τους τυπικούς συνομήλικους.

### 4.4. Συσχετίσεις της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων

Η ομάδα των δεδομένων, στο παρόν υποκεφάλαιο της μελέτης, αναλύθηκε για να διαπιστωθεί κατά πόσο υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων στα παιδιά με δυσαριθμησία.

Αναφορικά με το υπό μελέτη ερώτημα, (Βλ. Πίνακα 1, Παράρτημα 22, σελ. 459-461), διαπιστώνουμε ότι η πρώτη μεταβλητή της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, W Οξύτητα ANS, είναι συσχετισμένη με δύο από τις δέκα μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, και ειδικότερα, αρνητικά συσχετιζόμενη με τη μεταβλητή Ικανότητα Απαρίθμησης ($r_s$ = -0,315) και θετικά συσχετιζόμενη με τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ($r_s$ = 0,378). Η αρνητική συσχέτιση με την Ικανότητα απαρίθμησης κατανοείται βάσει του δεδομένου, ότι όσο πιο μικρό είναι το W τόσο μεγαλύτερη είναι η οξύτητα, κατά συνέπεια η αρνητική συσχέτιση υποδηλώνει ότι όσο μικρότερο είναι το W (μεγάλη οξύτητα) τόσο αυξάνει η ικανότητα απαρίθμησης. Η θετική συσχέτιση με τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων, υποδηλώνει ότι όσο μεγαλώνει το W (μικρή οξύτητα) τόσο μεγαλώνει η επίδραση του φαινομένου της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων.

Για τη μεταβλητή Ικανότητα Subitizing, η υπόθεση ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης επιβεβαιώνεται για το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα της άμεσης αντίληψης με μια ματιά (Subitizing) εμφανίζει μεγάλου βαθμού συσχέτιση με την Ικανότητα Απαρίθμησης ($r_s$ = 0,538), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης της απαρίθμησης (R.T. Απαρίθμησης) ($r_s$ = - 0,273), μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων ($r_s$ = 0,531), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ($r_s$ = - 0,329), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ($r_s$ = - 0,301), μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων ($r_s$ = 0,777), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων ($r_s$ = - 0,421), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση ($r_s$ = - 0,374) με την Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων, μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση του Μεγέθους των αριθμών ($r_s$ = - 0,584) και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Αντίστροφη Καταμέτρηση ($r_s$ = 0,565).

Ομοίως, για τη μεταβλητή R.T. Subitizing η υπόθεση ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης επιβεβαιώνεται για το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας με τις ισχυρότερες συσχετίσεις να είναι αρνητικές, αφού για τις μεταβλητές Ικανότητα Απαρίθμησης, Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων, Αντίστροφη Καταμέτρηση, οι συντελεστές συσχέτισης ισούνται με $r_s$ = - 0,540, $r_s$ = - 0,720 και $r_s$ = - 0,592, αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω ευρήματα, διαπιστώνουμε ότι το πρώτο εγγενές σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, το σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών (ANS), συσχετίζεται σημαντικά με δύο ικανότητες της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, αυτή της απαρίθμησης και της επίδρασης της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών. Το δεύτερο με τη σειρά μη συμβολικό εγγενές σύστημα, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), με μεταβλητές την ικανότητα της άμεσης αντίληψης της ποσότητας με μια ματιά και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας, βρέθηκε συσχετισμένο με το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Κατά συνέπεια, τα δύο εγγενή αριθμητικά συστήματα συσχετίζονται με την ικανότητα των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων στους μαθητές με δυσαριθμησία.

### 4.5. Συσχετίσεις της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της πρόσβασης συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων με τις γνωστικές λειτουργίες

Η τρέχουσα ενότητα παρουσιάζει τα αποτελέσματα διερεύνησης συσχέτισης των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης με τις γνωστικές λειτουργίες και τα αποτελέσματα διερεύνησης των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων με τις γνωστικές λειτουργίες, στους μαθητές που κατηγοριοποιήθηκαν ως μαθητές με δυσαριθμησία.

Οι αλληλοσυσχετίσεις της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και των γνωστικών λειτουργιών παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. (Βλ. Παράρτημα 22, σελ. 459-461).

Αναφορικά με τις μεταβλητές του προσεγγιστικού συστήματος των αριθμών (ANS), η μεταβλητή W Οξύτητα ANS, δηλαδή η ακρίβεια στη διάκριση ποσοτήτων, παρουσιάζει στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση με τη Μνήμη Αριθμών, $r_s$ = -0,279. Το παρόν εύρημα σημαίνει ότι όσο μικρότερη είναι η ικανότητα διάκρισης (μεγάλο W) τόσο μικρότερο είναι το εύρος της μνήμης αριθμών. Επίσης, στατιστικά σημαντική θετική συσχέτιση παρατηρείται με την Ικανότητα Αναστολής $r_s$ = 0,266 και αρνητική με το χρόνο απόκρισης της ικανότητας Αναστολής $r_s$ = - 0,379. Επομένως, οι σημαντικότεροι γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με την ικανότητα διάκρισης είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και η επιτελική λειτουργία της αναστολής συνυφασμένη με τον χρόνο απόκρισης αυτής.

Σχετικά με το δεύτερο σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), η μεταβλητή Ικανότητα Subitizing παρουσιάζει στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τις έξι από τις επτά μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών. Ειδικότερα, παρουσιάζει ισχυρή θετική συσχέτιση με τη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = 0,921), μετρίου βαθμού συσχέτιση με τη Μνήμη Λέξεων ($r_s$ = 0,337), μεγάλου βαθμού συσχέτιση με την Ικανότητα Αναστολής ($r_s$ = 0,492), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης της αναστολής (R.T. Αναστολής) ($r_s$ = - 0,257), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = - 0,532) και ισχυρή αρνητική συσχέτιση με την ικανότητα της Γνωστικής Εναλλαγής ($r_s$ = - 0,821). Αντίθετα, ο συντελεστής συσχέτισης της μεταβλητής Ικανότητα Subitizing με την Οπτικοχωρική Μνήμη ($r_s$ = 0,127) δεν είναι στατιστικά σημαντικός.

Αποκαλύφθηκαν επίσης και άλλες σημαντικές συσχετίσεις του χρόνου απόκρισης της ικανότητας της άμεσης αντίληψης ποσοτήτων με μια ματιά (R.T. Subitizing), με μεταβλητές κλειδιά των γνωστικών λειτουργιών όπως, τη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,699), την Οπτικοχωρική Μνήμη ($r_s$ = - 0,348), την Ικανότητα Αναστολής ($r_s$ = - 0,369), την Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = 0,462) και τη Γνωστική Εναλλαγή ($r_s$ = 0,612).

Συγκεφαλαιώνοντας τα αποτελέσματα για το σύστημα της παράλληλης εξατομίκευσης αριθμών, δηλαδή της ικανότητας Subitizing και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας, οι σημαντικότεροι γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με την ικανότητα της άμεσης αντίληψης με μια ματιά είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων και οι επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, του χρόνου απόκρισης της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής. Σε αυτό το πλαίσιο, υπάρχουν ενδείξεις ότι η χωρητικότητα της μνήμης αριθμών και η γνωστική εναλλαγή έχουν περισσότερο άμεση σχέση με την ικανότητα Subitizing, λόγω των μεγάλων βαθμών συσχετίσεων, απ' όσο με τις άλλες γνωστικές λειτουργίες που επίσης παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις.

Μεταξύ των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία, επίσης αποκαλύπτονται σημαντικές αλληλοσυσχετίσεις (Βλ. Πίνακα 3., Παράρτημα 22, σελ. 459-461).

Συγκεκριμένα, η ικανότητα της απαρίθμησης σχετίζεται με τη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών ($r_s$ = 0,504), γεγονός που δηλώνει πως όσο μεγαλύτερη είναι η χωρητικότητα αυτής τόσο αναπτύσσεται η ικανότητα απαρίθμησης. Συνάμα, σχετίζεται θετικά με την ικανότητα της αναστολής του φυσικού μεγέθους των αριθμών ($r_s$ = 0,261), που σημαίνει ότι η απαρίθμηση αυξάνει όσο μεγαλώνει η αυτοματοποίηση του μεγέθους των αριθμών και αρνητικά με τη γνωστική εναλλαγή ($r_s$ = - 0,554), σημαίνοντας ότι η ικανότητα της απαρίθμησης αυξάνει όσο μικρότεροι είναι οι χρόνοι επίτευξης των μαθητών στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο.

Σχετικά με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας απαρίθμησης (R.T. Απαρίθμησης), παρουσιάζει μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,258), και μετρίου βαθμού θετική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης της αναστολής (R.T. Αναστολής) ($r_s$ = 0,263).

Για τη μεταβλητή Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, διαπιστώνεται μεγάλου βαθμού συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = 0,453), μετρίου βαθμού συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Λέξεων ($r_s$ = 0,369), μετρίου βαθμού συσχέτιση με την Οπτικοχωρική Μνήμη ($r_s$ = 0,281), μεγάλου βαθμού συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Ικανότητας Αναστολής ($r_s$ = 0,689), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την R.T. Αναστολής ($r_s$ = - 0,591), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Προσοχής - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = - 0,366) και μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγή ($r_s$ = - 0,379). Επομένως η ικανότητα σύγκρισης διψήφιων αριθμών συσχετίζεται σημαντικά με το σύνολο των γνωστικών λειτουργιών.

Από τα αποτελέσματα των συσχετίσεων, διαπιστώνουμε ότι οι σημαντικοί γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με το φαινόμενο της επίδρασης απόστασης 1 αριθμού, είναι η λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών ($r_s$ = - 0,421), η επιτελική λειτουργία της αναστολής ($r_s$ = - 0,299), η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας ($r_s$ = 0,268) και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής ($r_s$ = 0,359).

Για τη μεταβλητή Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων η υπόθεση ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης, επιβεβαιώνεται για το σύνολο των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών με συσχετίσεις που κυμαίνονται από 0,254 έως – 0,730. Επομένως, οι σημαντικοί παράγοντες που σχετίζονται με αυτήν την ικανότητα είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων, η επιτελική λειτουργία της αναστολής και του χρόνου απόκρισης αυτής, η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής, με σημαντικότερους ωστόσο, τη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, της προσοχής – ταχύτητας επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής, λόγω του μεγάλου βαθμού συσχέτισης.

Επίσης, αποκαλύφθηκαν σημαντικές συσχετίσεις για τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, με τις μεταβλητές Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,336) και Γνωστική Εναλλαγή ($r_s$ = 0,304). Ομοίως, με τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων παρουσιάστηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,391) και τη Γνωστική Εναλλαγή ($r_s$ = 0,285).

Η μεταβλητή Επίδραση Μεγέθους παρουσιάζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,561), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Λέξεων ($r_s$ = - 0,345), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Ικανότητας Αναστολής ($r_s$ = - 0,270), μετρίου βαθμού συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Προσοχής - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = 0,373) και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής ($r_s$ = 0,429).

Τέλος, οι αλληλοσυσχετίσεις της μεταβλητής Αντίστροφη Καταμέτρηση με τις γνωστικές λειτουργίες, αποκαλύπτουν ότι, οι σημαντικοί παράγοντες που σχετίζονται με αυτήν την ικανότητα είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών ($r_s$ = 0,606) και της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων ($r_s$ = 0,292), η οπτικοχωρική μνήμη ($r_s$ = 0,271), η επιτελική λειτουργία της αναστολής ($r_s$ = 0,444), και του χρόνου απόκρισης αυτής ($r_s$ = - 0,305), η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας ($r_s$ = - 0,557) και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής ($r_s$ = - 0,603).

**4.6. Αποτελέσματα διερεύνησης προβλεπτών της δυσαριθμησίας**

Το παρόν υποκεφάλαιο διερευνά την κοινή και ανεξάρτητη συνεισφορά στην πρόβλεψη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία των ανεξάρτητων μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και των γνωστικών λειτουργιών. Προς αυτό τον σκοπό, διενεργήθηκαν τρία μοντέλα γραμμικής παλινδρόμησης και ένα τέταρτο τελικό μοντέλο πρόβλεψης με τις κατάλληλες μεταβλητές από τις τρεις κατηγορίες των αρχικών ανεξάρτητων μεταβλητών.

Για την αξιολόγηση της ισχύς των μοντέλων γραμμικής παλινδρόμησης, πραγματοποιήθηκαν ξεχωριστές αναλύσεις αρχικά για κάθε κατηγορία μεταβλητών και στη συνέχεια επιλέγηκαν οι κατάλληλες μεταβλητές, οι οποίες και χρησιμοποιήθηκαν στο τελικό μοντέλο πρόβλεψης αυτής.

Το πρώτο μοντέλο παλινδρόμησης διερευνά τη συνεισφορά στην πρόβλεψη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης. Οι 4 μεταβλητές που εξετάστηκαν στο μοντέλο μας είναι η μεταβλητή της ικανότητας της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (W Οξύτητα ANS), ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας κατά τη διάκριση ποσοτήτων (R.T W), η ικανότητα Subitizing και τέλος, ο χρόνος απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing).

Στο πρώτο σκέλος της ανάλυσης διερευνήθηκε το μοντέλο εισάγοντας όλες τις μεταβλητές με σκοπό την εξέταση του ποιες από αυτές συνεισφέρουν ικανοποιητικά στην πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής της μαθηματικής ικανότητας. Η ανάλυση παλινδρόμησης αποκάλυψε ότι το μοντέλο έχει μεγάλη προβλεπτική ικανότητα, καθώς συνολικά οι μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης μπορούν να προβλέψουν το 88,6% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας, $F(3,763) = 106,802$, $p = 0,0001 < 0,05$ (Βλ. Παράρτημα 21, Πίνακας 1., σελ. 458).

Από την επιμέρους ανάλυση που έγινε σε κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, η ικανότητα Subitizing ($p = 0,000 < 0,005$), ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T Subitizing) ($p = 0,030 < 0,005$) και ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών ANS (R.T W) ($p = 0,028 < 0,005$), αποτελούν τους συντελεστές που περιλαμβάνονται στο πρώτο τελικό μοντέλο παλινδρόμησης, καθώς το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας αυτών είναι μικρότερο του 5%. Δεδομένου ότι η μεταβλητή W οξύτητα ANS δεν περιλαμβάνεται στο τελικό μοντέλο λόγω του μη αποδεκτού επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας ($p = 0,116 >$

0,005), διενεργήθηκαν ξεχωριστές αναλύσεις πολλαπλής παλινδρόμησης (stepwise multiple regression analyses) με σκοπό την αξιολόγηση της συνεισφοράς κάθε εναπομένουσας μεταβλητής στο πρώτο τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας.

Τα αποτελέσματα της stepwise παλινδρόμησης (Βλ. Πίνακα 4.6.1.), δείχνουν ότι συνολικά το μοντέλο ερμηνεύει το 88,1% της μαθηματικής ικανότητας, με τη χρήση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών. Στο πρώτο βήμα της ανάλυσης, η μεταβλητή Ικανότητα Subitizing εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας. Στη συνέχεια ακολουθεί ο χρόνος απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing), ο οποίος συνεισφέρει επιπλέον κατά 1,5 % στην ερμηνεία της διακύμανσης της εξαρτημένης. Τέλος, ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (R.T W), που εισάγεται στο τρίτο βήμα του μοντέλου, ερμηνεύει 1,3% επιπλέον της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας, $F(3,589) = 137{,}736$, $p = 0{,}0001 < 0{,}05$.

Πίνακας 4.6.1.

*Πρώτο προβλεπτικό μοντέλο της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία stepwise παλινδρόμησης με τη συνεισφορά των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης*

| Μη συμβολική αριθμητική διάκριση | R | R Square | Adjusted R Square | Std. Error of the Estimate | R Square Change |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 Ικανότητα Subitizing | ,924 | ,853 | ,851 | ,7113 | ,853 |
| 2 R.T Subitizing | ,932 | ,868 | ,863 | ,6812 | ,015 |
| 3 R.T W | ,938 | ,881 | ,874 | ,6528 | ,013 |

Στον Πίνακα 4.6.2., παρουσιάζονται οι προαναφερόμενοι συντελεστές - μεταβλητές του πρώτου μοντέλου πρόβλεψης, όπως προέκυψαν από τη stepwise παλινδρόμηση, με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο του 5%.

Πίνακας 4.6.2.

*Συντελεστές πρώτου μοντέλου πρόβλεψης stepwise παλινδρόμησης*

| Μη συμβολική αριθμητική διάκριση | | Unstandardized Coefficients | | Standardized Coefficients | t | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | Std. Error | Beta | | |
| 1 | (Constant) | ,357 | ,393 | | ,910 | ,366 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,357 | ,019 | ,924 | 18,364 | ,000 |
| 2 | (Constant) | 1,899 | ,723 | | 2,626 | ,011 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,325 | ,023 | ,839 | 14,266 | ,000 |
| | 1.RT Subitizing | -,008 | ,003 | -,147 | -2,496 | ,015 |
| 3 | (Constant) | 2,839 | ,791 | | 3,589 | ,001 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,325 | ,022 | ,839 | 14,886 | ,000 |
| | 1.R.T Subitizing | -,008 | ,003 | -,142 | -2,520 | ,015 |
| | 1.R.T W | -,330 | ,134 | -,114 | -2,464 | ,017 |

Συνοψίζοντας, το πρώτο τελικό μοντέλο παλινδρόμησης προβλέπει τη μαθηματική ικανότητα μαθητών με δυσαριθμησία με τη συνεισφορά τριών μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης. Βάσει αυτού, ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης είναι η ικανότητα Subitizing που εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης ($\beta$ = 0,325, *p* = 0,0001). Ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T Subitizing) είναι ο δεύτερος ισχυρότερος προβλέπτης, $\Delta R^2$ = 0,014, $\beta$ = - 0,008, *p* = 0,015, και ακολουθεί ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (R.T W), $\Delta R^2$ = 0,013, $\beta$ = - 0,017, *p* = 0,017.

Το δεύτερο μοντέλο πρόβλεψης, διερευνά τη συνεισφορά στην πρόβλεψη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Οι μεταβλητές που εξετάστηκαν είναι, η Ικανότητα Απαρίθμησης, ο χρόνος απόκρισης της Απαρίθμησης (R.T Απαρίθμησης), η Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψηφίων, η Επίδραση απόστασης 1 αριθμού, η Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών, η Ικανότητα σύγκρισης διψήφιων, η Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου, η Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων, η Επίδραση μεγέθους και η Αντίστροφη καταμέτρηση.

Από την αρχική ανάλυση, διαπιστώθηκε ότι το μοντέλο της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας έχει ικανοποιητική προβλεπτική ικανότητα, και συγκεκριμένα μπορεί να προβλέψει το 69,1% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας, $F(2{,}736) = 10{,}981$, $p = 0{,}0001 < 0{,}05$, των μαθητών με δυσαριθμησία (Βλ. Παράρτημα 21, Πίνακας 2., σελ. 458).

Από την επιμέρους ανάλυση που έγινε σε κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές για τη διαπίστωση του ποιες από αυτές συνεισφέρουν ικανοποιητικά στην πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής, διαπιστώθηκε ότι η ικανότητα σύγκρισης διψήφιων ($p = 0{,}004 < 0{,}005$) και η επίδραση απόστασης 1 ψηφίου, οριακά ($p = 0{,}057$), αποτελούν τους συντελεστές που περιλαμβάνονται στο δεύτερο τελικό μοντέλο πρόβλεψης, καθώς το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας αυτών είναι μικρότερο του 5%. Κατόπιν αυτής της διαπίστωσης, διενεργήθηκε stepwise παλινδρόμηση με σκοπό την αξιολόγηση της συνεισφοράς κάθε μεταβλητής στο τελικό δεύτερο μοντέλο παλινδρόμησης.

Τα αποτελέσματα δείχνουν (Βλ. Πίνακα 4.6.3.), ότι το μοντέλο της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας ερμηνεύει το 63,2% της μαθηματικής ικανότητας, με τη χρήση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Στο πρώτο βήμα της ανάλυσης, η μεταβλητή Ικανότητα σύγκρισης διψήφιων εξηγεί το 57,2% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας και στη συνέχεια ακολουθεί η επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου, η οποία συνεισφέρει επιπλέον κατά 6 % στην ερμηνεία της διακύμανσης της εξαρτημένης, $F(4{,}127) = 48{,}992$, $p = 0{,}0001 < 0{,}05$).

Πίνακας 4.6.3.

*Δεύτερο προβλεπτικό μοντέλο της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία stepwise παλινδρόμησης με τη συνεισφορά των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας*

| Συμβολική αριθμητική επεξεργασία | R | R Square | Adjusted R Square | Std. Error of the Estimate | R Square Change |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.Ικανότητα σύγκρισης διψήφιων | ,756 | ,572 | ,565 | 1,2144 | ,572 |
| 2.Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | ,795 | ,632 | ,619 | 1,1358 | ,060 |

Στον Πίνακα 4.6.4., παρουσιάζονται οι προαναφερόμενοι συντελεστές - μεταβλητές του δεύτερου μοντέλου πρόβλεψης, όπως προέκυψαν από την stepwise παλινδρόμηση, με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο του 5%.

Πίνακας 4.6.4.

*Συντελεστές δεύτερου μοντέλου πρόβλεψης stepwise παλινδρόμησης*

| Συμβολική αριθμητική επεξεργασία | | Unstandardized Coefficients | | Standardized Coefficients | t | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | Std. Error | Beta | | |
| 1 | (Constant) | 3,132 | ,506 | | 6,193 | ,000 |
| | 2.Ικανότητα σύγκρισης διψήφιων | ,256 | ,029 | ,756 | 8,808 | ,000 |
| 2 | (Constant) | 11,531 | 2,794 | | 4,127 | ,000 |
| | 2.Ικανότητα σύγκρισης διψήφιων | ,225 | ,029 | ,665 | 7,751 | ,000 |
| | 2.Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | -,179 | ,059 | -,262 | -3,050 | ,003 |

Κατόπιν των προαναφερόμενων αναλύσεων, το δεύτερο τελικό μοντέλο παλινδρόμησης προβλέπει τη μαθηματική ικανότητα μαθητών με δυσαριθμησία με τη συνεισφορά των δύο μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, όπου ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης είναι η ικανότητα σύγκρισης διψήφιων αριθμών που εξηγεί το 57,2% της διακύμανσης (β = 0,199, $p$ = 0,0001), με την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου να αποτελεί τον δεύτερο ισχυρότερο προβλέπτη, $\Delta R^2 = 0{,}060$, β = - 0,180, $p = 0{,}002$.

Το τρίτο μοντέλο παλινδρόμησης της έρευνας, διερευνά τη συνεισφορά στην πρόβλεψη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών. Οι 7 μεταβλητές που εξετάστηκαν στο μοντέλο είναι η Μνήμη αριθμών, η Μνήμη λέξεων, η Οπτικοχωρική μνήμη, η Ικανότητα αναστολής, η R.T αναστολής, η Προσοχή - ταχύτητα επεξεργασίας και η Γνωστική Εναλλαγή.

Από την αρχική ανάλυση διαπιστώθηκε, ότι το μοντέλο των γνωστικών λειτουργιών έχει μεγάλη προβλεπτική ικανότητα, συγκεκριμένα μπορεί να προβλέψει το 83,1% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας, $F(3{,}815) = 36{,}542$, $p = 0{,}0001 < 0{,}05$ (Βλ. Παράρτημα 21, Πίνακας 3., σελ. 458)

Από την επιμέρους ανάλυση που έγινε σε κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, με σκοπό την εξέταση του ποιες από αυτές συνεισφέρουν ικανοποιητικά στην πρόβλεψη της μαθηματικής ικανότητας, η Μνήμη Αριθμών ($p = 0{,}000 < 0{,}005$) και η ικανότητα της Γνωστικής Εναλλαγής ($p = 0{,}010 < 0{,}005$), αποτελούν τους συντελεστές που περιλαμβάνονται στο τρίτο τελικό μοντέλο παλινδρόμησης, καθώς το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας αυτών είναι μικρότερο του 5%. Κατόπιν αυτού, διενεργήθηκε stepwise παλινδρόμηση με σκοπό την αξιολόγηση της συνεισφοράς κάθε μεταβλητής στο τρίτο τελικό μοντέλο πρόβλεψης.

Τα αποτελέσματα της stepwise παλινδρόμησης δείχνουν (Βλ. Πίνακα 4.6.5.), ότι συνολικά το μοντέλο των γνωστικών λειτουργιών ερμηνεύει το 82,7% της μαθηματικής ικανότητας, με τη χρήση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών. Η μεταβλητή μνήμη αριθμών εξηγεί το 79,7% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας και στη συνέχεια ακολουθεί η γνωστική εναλλαγή, η οποία συνεισφέρει επιπλέον κατά 3% στην ερμηνεία της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, $F(6,309) = 136.305$, $p = 0{,}0001 < 0{,}005$.

Πίνακας 4.6.5.

*Τρίτο προβλεπτικό μοντέλο της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία stepwise παλινδρόμησης με τη συνεισφορά των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών*

| Γνωστικές λειτουργίες | R | R Square | Adjusted R Square | Std. Error of the Estimate | R Square Change |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 Μνήμη αριθμών | ,893 | ,797 | ,793 | ,8372 | ,797 |
| 2 Γνωστική Εναλλαγή | ,909 | ,827 | ,821 | ,7788 | ,030 |

Στον Πίνακα 4.6.6., παρουσιάζονται οι προαναφερόμενοι συντελεστές - μεταβλητές του τρίτου μοντέλου πρόβλεψης, όπως προέκυψαν από την stepwise παλινδρόμηση, με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο του 5%.

Πίνακας 4.6.6.

*Συντελεστές τρίτου μοντέλου πρόβλεψης stepwise παλινδρόμησης*

| Γνωστικές λειτουργίες | | Unstandardized Coefficients | | Standardized Coefficients | t | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | Std. Error | Beta | | |
| 1 | (Constant) | 4,983 | ,192 | | 26,020 | ,000 |
| | 3.Μνήμη αριθμών | 1,857 | ,123 | ,893 | 15,074 | ,000 |
| 2 | (Constant) | 9,941 | 1,576 | | 6,309 | ,000 |
| | 3.Μνήμη αριθμών | 1,328 | ,203 | ,638 | 6,560 | ,000 |
| | 3.Γνωστική Εναλλαγή | -,010 | ,003 | -,308 | -3,167 | ,002 |

Κατόπιν των προαναφερόμενων αναλύσεων, το τρίτο τελικό μοντέλο παλινδρόμησης προβλέπει τη μαθηματική ικανότητα μαθητών με δυσαριθμησία με τη συνεισφορά των δύο μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών. Βάσει αυτού, ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης είναι η εργαζόμενη μνήμη αριθμών που εξηγεί το 79,7% της διακύμανσης (β = 1,328, $p$ = 0,0001), με την επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής να αποτελεί τον δεύτερο ισχυρότερο προβλέπτη, $\Delta R^2$ = 0,030, β = - 0,010, $p$ = 0,002.

Το τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας που εξετάζουμε στη συνέχεια, περιλαμβάνει την ταυτόχρονη συνεισφορά των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, στην πρόβλεψη αυτής. Έτσι στο γραμμικό αυτό μοντέλο επιλέγηκαν μόνο οι μεταβλητές που επέδρασαν σημαντικά στα προηγούμενα μοντέλα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές που εξετάστηκαν από τη μη συμβολική αριθμητική διάκριση είναι η Ικανότητα Subitizing, ο χρόνος απόκρισης του Subitizing (R.T Subitizing) και ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (R.T W). Από τη συμβολική αριθμητική επεξεργασία επιλέγηκαν οι μεταβλητές, Ικανότητα σύγκρισης διψήφιων και η Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου και τέλος, από τις γνωστικές λειτουργίες επιλέχτηκαν οι μεταβλητές Μνήμη αριθμών και Γνωστική Εναλλαγή.

Εισάγοντας όλες τις μεταβλητές, στο πρώτο σκέλος της ανάλυσης, φαίνεται ότι το μοντέλο μας έχει μεγάλη προβλεπτική ικανότητα, ειδικότερα μπορεί να προβλέψει το 92,4% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, $F(5,956) = 90,428$, $p = 0,0001 < 0,005$ (Βλ. Παράρτημα 21, Πίνακας 4., σελ. 458). Από την επιμέρους ανάλυση που έγινε σε κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, η ικανότητα Subitizing ($p = 0,000 < 0,005$), ο χρόνος απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing) ($p = 0,023 < 0,005$), ο χρόνος απόκρισης του W (R.T W) ($p = 0,046 < 0,005$), η Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου ($p = 0,002 < 0,005$) και η ικανότητα της Γνωστικής Εναλλαγής ($p = 0,000 < 0,005$), αποτελούν τους συντελεστές που περιλαμβάνονται στο τελικό μοντέλο παλινδρόμησης, καθώς συνεισφέρουν ικανοποιητικά στο μοντέλο πρόβλεψης (το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας αυτών είναι μικρότερο του 5%). Κατόπιν, προχωρήσαμε σε stepwise παλινδρόμηση με σκοπό να αξιολογήσουμε τη συνεισφορά κάθε μεταβλητής στο τελικό μοντέλο πρόβλεψης.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.6.7., δείχνουν ότι συνολικά το τελικό μοντέλο ερμηνεύει το 92,2% της μαθηματικής ικανότητας, με τη χρήση πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών, $F(6,206) = 127{,}109$, $p = 0{,}0001 < 0.05$. Στο πρώτο βήμα της ανάλυσης, η μεταβλητή Ικανότητα Subitizing εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας. Ακολουθεί η μεταβλητή της γνωστικής εναλλαγής, η οποία συνεισφέρει επιπλέον κατά 3,4 % στην ερμηνεία της διακύμανσης της εξαρτημένης. Η επίδραση απόστασης 1 ψηφίου, συνεισφέρει 1,9% επιπλέον στη διακύμανση, ακολουθεί ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T Subitizing), ο οποίος εξηγεί ένα επιπλέον 0,9% της διακύμανσης και τέλος, ο χρόνος απόκρισης του W (R.T W) προσθέτει 0,8% στην εξήγηση της διακύμανσης.

Πίνακας 4.6.7.

*Τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας stepwise παλινδρόμησης*

| Μεταβλητές μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, μεταβλητές συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και μεταβλητές γνωστικών λειτουργιών | R | R Square | Adjusted R Square | Std. Error of the Estimate | R Square Change |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 Ικανότητα Subitizing | ,924 | ,853 | ,851 | ,7113 | ,853 |
| 2 Γνωστική Εναλλαγή | ,942 | ,887 | ,883 | ,6302 | ,034 |
| 3 Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | ,952 | ,906 | ,900 | ,5807 | ,019 |
| 4 R.T Subitizing | ,956 | ,914 | ,908 | ,5589 | ,009 |
| 5 R.T W | ,960 | ,922 | ,914 | ,5385 | ,008 |

Στον Πίνακα 4.6.8., παρουσιάζονται οι προαναφερόμενοι συντελεστές - μεταβλητές του τελικού μοντέλου πρόβλεψης, όπως προέκυψαν από την stepwise παλινδρόμηση, με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο του 5%.

Πίνακας 4.6.8.

*Συντελεστές τελικού προβλεπτικού μοντέλου της δυσαριθμησίας stepwise παλινδρόμησης*

| Μεταβλητές μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, μεταβλητές συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και μεταβλητές γνωστικών λειτουργιών | | Unstandardized Coefficients | | Standardized Coefficients | t | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | Std. Error | Beta | | |
| 1 | (Constant) | ,357 | ,393 | | ,910 | ,366 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,357 | ,019 | ,924 | 18,364 | ,000 |
| 2 | (Constant) | 6,143 | 1,450 | | 4,235 | ,000 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,269 | ,028 | ,696 | 9,787 | ,000 |
| | 3.Γνωστική Εναλλαγή | -,009 | ,002 | -,292 | -4,109 | ,000 |
| 3 | (Constant) | 11,697 | 2,136 | | 5,477 | ,000 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,237 | ,027 | ,613 | 8,738 | ,000 |
| | 3.Γνωστική Εναλλαγή | -,010 | ,002 | -,317 | -4,803 | ,000 |
| | 2.Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | -,104 | ,031 | -,152 | -3,334 | ,002 |
| 4 | (Constant) | 12,276 | 2,070 | | 5,930 | ,000 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,218 | ,027 | ,563 | 7,944 | ,000 |
| | 3.Γνωστική Εναλλαγή | -,010 | ,002 | -,303 | -4,750 | ,000 |
| | 2.Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | -,097 | ,030 | -,142 | -3,217 | ,002 |
| | 1.R.T Subitizing | -,006 | ,003 | -,114 | -2,337 | ,023 |
| 5 | (Constant) | 12,382 | 1,995 | | 6,206 | ,000 |
| | 1.Ικανότητα Subitizing | ,223 | ,026 | ,575 | 8,406 | ,000 |
| | 3.Γνωστική Εναλλαγή | -,009 | ,002 | -,292 | -4,733 | ,000 |
| | 2.Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | -,088 | ,029 | -,129 | -3,017 | ,004 |
| | 1.R.T Subitizing | -,006 | ,003 | -,112 | -2,389 | ,020 |
| | 1.R.T W | -,256 | ,112 | -,088 | -2,292 | ,026 |

Βάσει του τελικού μοντέλου παλινδρόμησης, που προβλέπει τη μαθηματική ικανότητα μαθητών με δυσαριθμησία με την κοινή συνεισφορά των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, αναδύθηκε η ικανότητα Subitizing ως ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, καθώς εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας (β = 0,223, $p$ = 0,0001). Η ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής αποτελεί τον δεύτερο ισχυρότερο προβλέπτη αυτής, $\Delta R^2$ = 0,034, β = -0,009, $p$ = 0,002. Η επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών αναδύθηκε ως ο τρίτος κατά σειρά σημαντικότερος προβλέπτης, $\Delta R^2$ = 0,019, β = - 0,088, $p$ = 0,004, ακολουθεί ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing ως ο τέταρτος καλύτερος προβλέπτης, $\Delta R^2$ = 0,009, β = - 0,006, $p$ = 0,020 και τέλος, ο χρόνος απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W), αποτελεί τον πέμπτο κατά σειρά καλύτερο προβλέπτη, $\Delta R^2$ = 0,008, β = - 0,256, $p$ = 0,026.

Συγκεφαλαιώνοντας, τα αποτελέσματα των τεσσάρων προβλεπτικών μοντέλων της δυσαριθμησίας δείχνουν να συνεισφέρουν στη δυνατότητα της πρόβλεψης αυτής. Το πρώτο μοντέλο της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης ανέδειξε τρεις μεταβλητές ως κύρους παράγοντες πρόβλεψης: α) την ικανότητα Subitizing, β) τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας Subitizing και γ) τον χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση ποσοτήτων (R.T W). Σχετικά με την προβλεπτική αξία της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, οι αναλύσεις αποκάλυψαν ένα δεύτερο προβλεπτικό μοντέλο δύο μεταβλητών: α) τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και β) την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων. Εξίσου μεγάλη προβλεπτική ισχύ δείχνει να έχει το τρίτο μοντέλο, αυτό των γνωστικών λειτουργιών με σημαντικούς προβλέπτες: α) την εργαζόμενη μνήμη αριθμών και β) τη γνωστική εναλλαγή. Το τέταρτο και τελικό μοντέλο, ένα πλήρες μοντέλο που συνίστατο στην αμοιβαία διαπλοκή των τριών μοντέλων, αποκάλυψε ένα μοντέλο πέντε μεταβλητών στην πρόβλεψη της δυσαριθμησίας: α) την ικανότητα Subitizing β) την ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής, γ) την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, δ) τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας Subitizing και ε) τον χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W).

### 4.7. Αποτελέσματα διερεύνησης επιρροής της πειραματικής παρέμβασης στην αλγοριθμική επίλυση

Η ομάδα των δεδομένων αναλύθηκε για την εύρεση των σχέσεων της πειραματικής παρέμβασης, μέσω της αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης και διαμεσολαβητικού παράγοντα ενεργοποίησης των αριθμητικών διαδικασιών, στην εκμάθηση του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Ένα τυχαίο δείγμα δέκα μαθητών με δυσαριθμησία χωρίσθηκε σε δύο ισοπληθείς ομάδες των πέντε ατόμων. Την πρώτη ομάδα αποτελούσαν μαθητές με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση έναντι της δεύτερης ομάδας που συνιστούσε την ομάδα ελέγχου, στους μαθητές της οποίας, δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση.

Ανεξάρτητη μεταβλητή ήταν η πειραματική παρέμβαση και εξαρτημένες οι βαθμολογίες (δεδομένα) στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Για τον έλεγχο της συμβατότητας της κατανομής των μεταβλητών με την κανονική, διενεργήθηκε έλεγχος των στατιστικών test Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-wilk σε κάθε μια από αυτές. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4. (Βλ. Παράρτημα 20, σελ. 452-457) το επίπεδο σημαντικότητας είναι μεγαλύτερο από 5% τόσο στο Kolmogorov-Smirnov ($p = 0,200 > 0,05$) όσο και στο Shapiro-Wilk ($p = 0,928 > 0,05$) test και για τις δύο μεταβλητές, επομένως η υπό έλεγχο κατανομή δε διαφέρει από την κανονική.

Στον Πίνακα 4.7.1. παρουσιάζονται περιγραφικά στατιστικά όπως, οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), οι μέσες τιμές (M) και οι τυπικές αποκλίσεις (SD), στο Προτέστ και Μετατέστ Επίδοσης της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου. Συγκεκριμένα, για την πρώτη ομάδα την πειραματική, η επίδοση προτέστ, δηλαδή η επίδοσή τους στο αξιολογικό τεστ πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, κυμαίνεται από 2 έως 7 με μέση επίδοση 4,8 και τυπική απόκλιση 1,92. Έπειτα από την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, η επίδοσή τους στο μετατέστ κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα. Συγκεκριμένα, η βαθμολογία τους βρίσκεται μεταξύ 18 και 20 με μέση επίδοση 19,2, σαφώς βελτιωμένη σε σχέση με τη μέση επίδοση στο προτέστ και τυπική απόκλιση 0,84.

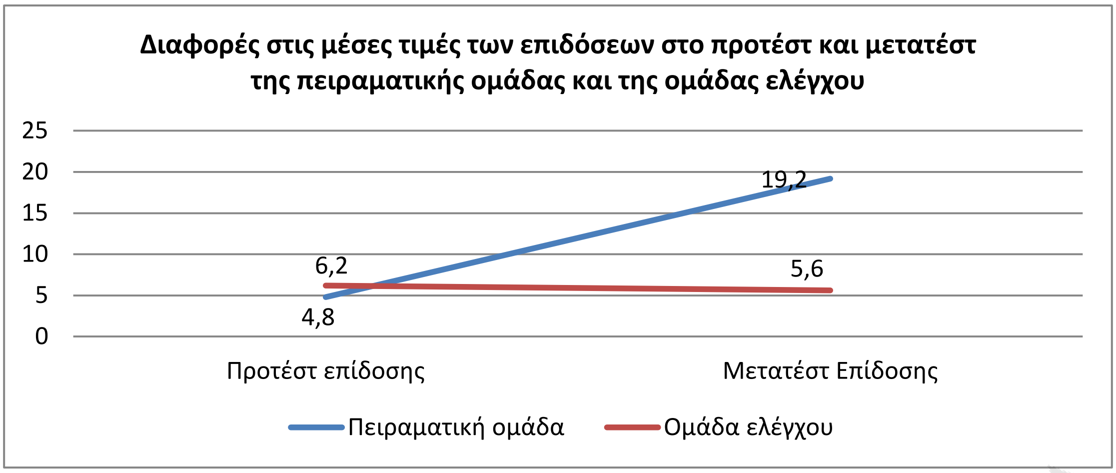
Σχετικά με τη δεύτερη ομάδα, την ομάδα ελέγχου, η επίδοσή τους στο αξιολογικό τεστ κυμαίνεται από 3 έως 8 με μέση επίδοση 6,2 και τυπική απόκλιση 2,04. Στο μετατέστ επίδοσης, που τους χορηγήθηκε μετά από τη συνήθη διδασκαλία στην τάξη, η βαθμολογία τους κυμαίνεται στα ίδια περίπου επίπεδα που είχαν στο προτέστ. Από τα αποτελέσματα διαπιστώνεται πως η επίδοση κυμαίνεται από 4 έως 8 με μέση επίδοση 5,6 και επίσης μεγάλη τυπική απόκλιση 2,19.

Πίνακας 4.7.1.

*Ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), μέσες τιμές (M) και τυπικές αποκλίσεις (SD), στο Προτέστ και Μετατέστ Επίδοσης της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου*

| | Πειραματική ομάδα (N=5) | | | | Ομάδα ελέγχου (N=5) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Min* | *Max* | *M* | *SD* | *Min* | *Max* | *M* | *SD* |
| Προτέστ Επίδοσης | 2,00 | 7,00 | 4,80 | 1,92 | 3,00 | 8,00 | 6,2 | 2,04 |
| Μετατέστ Επίδοσης | 18,00 | 20,00 | 19,20 | ,83 | 4,00 | 8,00 | 5,6 | 2,19 |

Βασιζόμενοι στους μέσους όρους προτέστ και μετατέστ αντίστοιχα της πειραματικής ομάδας παρατηρούμε ότι υπάρχει βελτίωση στη μέση επίδοση (τάξεως του 75%), η οποία απεικονίζεται στο γράφημα 4.7.1., σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου.




*Γράφημα 4.7.1.*
Διαφορές των μέσων τιμών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης

Θέλουμε να ελέγξουμε αν η προαναφερθείσα βελτίωση που παρατηρείται στην πειραματική ομάδα είναι στατιστικά σημαντική και κατ' επέκταση αν η πειραματική παρέμβαση βελτίωσε στατιστικά σημαντικά την επίδοση των μαθητών με δυσαριθμησία στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Λόγω της κανονικότητας των μεταβλητών εφαρμόστηκε ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου t ελέγχου (Paired Samples t – test) που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των μέσων τιμών δυο συζευγμένων ομάδων της ίδιας μεταβλητής.

Βάσει του τ-τεστ συσχετισμένου ελέγχου (Βλ. Πίνακα 4.7.2) ο έλεγχος του μετατέστ έδειξε βελτίωση στη μέση επίδοση των μαθητών κατά 14,4 που σημαίνει, όπως προδίδει και η τιμή του Sig. η οποία είναι μικρότερη του 5%, ότι η πειραματική παρέμβαση επέφερε στατιστικά σημαντική βελτίωση στην επίδοση των μαθητών στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Πίνακας 4.7.2.

*T-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στην πειραματική ομάδα*

| | Διαφορές στο Προτέστ και Μετατέστ Επίδοσης της πειραματικής ομάδας | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | | | | |
| | Mean | Std, Deviation | Std, Error Mean | Lower | Upper | t | df | Sig, (2-tailed) |
| Προτέστ Επίδοσης Μετατέστ Επίδοσης | -14,4000 | 2,07364 | ,92736 | -16,97477 | -11,82523 | -15,528 | 4 | ,000 |

Σχετικά με τη δεύτερη ομάδα μαθητών, 5 μαθητές με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση, και αποτελούσε την ομάδα ελέγχου, ο έλεγχος του μετατέστ έδειξε μείωση στη μέση επίδοσή τους κατά 0,9 % που σημαίνει, όπως προδίδει και η τιμή του Sig. η οποία είναι μεγαλύτερη του 5% του Πίνακα 4.7.3., ότι η μη εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης και η εφαρμογή της συνήθους διδασκαλίας, δεν επέφερε βελτίωση στην επίδοση των μαθητών με δυσαριθμησία στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, καθώς δε διαπιστώνεται στατιστικά σημαντική διαφορά στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης.

Πίνακας 4.7.3.

*T-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στην ομάδα ελέγχου*

| | Διαφορές στο Προτέστ και Μετατέστ Επίδοσης της ομάδας ελέγχου | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | | | | |
| | Mean | Std, Deviation | Std, Error Mean | Lower | Upper | t | df | Sig, (2-tailed) |
| Προτέστ Επίδοσης Μετατέστ Επίδοσης | 0,6000 | 1,34164 | 0,6000 | -1,06587 | 2,26587 | 1,000 | 4 | ,374 |

Προκειμένου να επαυξηθούν τα αποτελέσματα της επιρροής της πειραματικής παρέμβασης, διενεργήθηκε t-test ανεξάρτητων δειγμάτων μεταξύ των δύο ομάδων της έρευνας, έτσι ώστε να διαπιστωθεί αν η διαφορά τους είναι στατιστικά σημαντική.

Τα αποτελέσματα του ελέγχου απεικονίζονται στον Πίνακα 4.7.4., βάσει του κριτηρίου Levene's test για ισότητα διασπορών. Ειδικότερα, οι διασπορές των δύο ομάδων στη μεταβλητή προτέστ ήταν ίσες, καθώς $F = 0{,}000$ σε επίπεδο σημαντικότητας $p = 1{,}00 > 0{,}05$ ενώ στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης οι διασπορές δεν ήταν ίσες, επομένως λήφθηκε υπόψη η δεύτερη σειρά των αποτελεσμάτων του στατιστικού πίνακα, καθώς $F = 21{,}558$ σε επίπεδο σημαντικότητας $p = 0{,}002 < 0{,}05$.

Όπως διαπιστώνεται από τον Πίνακα 4.7.4., δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των δύο ομάδων στο προτέστ επίδοσης ($t\ (df) = -1{,}114\ (8)$, $p = 0{,}298 > 0{,}005$), καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μεγαλύτερο του 5%. Αυτό σημαίνει πως οι επιδόσεις των δύο ομάδων μαθητών με δυσαριθμησία δε διέφεραν στο προτέστ επίδοσης που αποτελούσε ένα αξιολογικό τεστ επίδοσης στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, η χορήγηση του οποίου έγινε πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης.

Αντιθέτως, οι δύο ομάδες διαφέρουν στατιστικά σημαντικά στο μετατέστ επίδοσης ($t\ (df) = 12{,}967\ (5{,}142)$, $p = 0{,}000 < 0{,}005$), καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μικρότερο του 5%. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η πειραματική ομάδα είχε στατιστικά σημαντική βελτίωση των μαθησιακών επιτευγμάτων στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με τη μέση τιμή να είναι κατά 13,6 βαθμούς επαυξημένη, μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου.

Πίνακας 4.7.4.

*Independent t-test σύγκρισης στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου*

| | Levene's Test for Equality of Variances | | Πειραματική ομάδα (N=5) / Ομάδα ελέγχου (N=5) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | F | Sig. | Mean Difference *(SD)* | *t (df)* | *P* |
| Προτέστ Επίδοσης | 0,000 | 1,000 | -1,400 (1,25698) | -1,114 (8) | 0,298 |
| Μετατέστ Επίδοσης | 21,558 | ,002 | 13,600 (1,04881) | 12,967 (5,142) | 0,000 |

Προκειμένου να εξαλειφθεί η πιθανότητα προκατειλημμένης γνώσης και μεροληψίας στα αποτελέσματα, διεξήχθη επιπρόσθετα δοκιμή ANCOVA. Η ανάλυση συνδιακύμανσης ANCOVA μεταξύ των δύο ομάδων, χρησιμοποιήθηκε για να διαπιστωθεί εάν οι μέσοι όροι (Βλ. Πίνακα 9, στο Παράρτημα 20, σελ. 452-457) στο μετατέστ επίδοσης (εξαρτημένη μεταβλητή) διέφεραν μεταξύ της πειραματικής ομάδας (η προσαρμοσμένη μέση τιμή της επίδοσης είναι 19,5) και της ομάδας ελέγχου (η προσαρμοσμένη μέση τιμή της επίδοσης είναι 5,2) (ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η σύγκριση των τιμών των δύο ομάδων), μετά τη διόρθωση για την επίδραση της βαθμολογίας πριν την παρέμβαση (συμμεταβλητή η βαθμολογία στο προτέστ επίδοσης). Οι προκαταρκτικοί έλεγχοι έδειξαν την επάρκεια των δεδομένων για την ανάλυση αυτής, καθώς σύμφωνα με το κριτήριο του Levene (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακα 10, σελ. 452-457), οι συγκρινόμενες ομάδες ήταν ομοιογενείς, $F$ = 0,537, $p$ = 0,484 > 0,05, και η υπόθεση της ομοιογένειας της παλινδρόμησης επαληθεύτηκε και στις δύο ομάδες (Βλ. Παράρτημα 20, Γράφημα 1, σελ. 452-457).

Τα αποτελέσματα ANCOVA επαλήθευσαν εκ νέου τα προηγούμενα ευρήματα του t-test ανεξάρτητων δειγμάτων. Βάσει του Πίνακα 4.7.5. και του Πίνακα 4.7.6., η επίδραση της συμμεταβλητής προτέστ επίδοσης στην εξαρτημένη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης δεν είναι στατιστικά σημαντική $F(1,75) = 3{,}095$, $p = 0{,}122 > 0{,}05$. Αντίθετα, η κύρια επίδραση της πειραματικής παρέμβασης στο μετατέστ επίδοσης, μετά τον έλεγχο για την επίδραση της συμμεταβλητής, είναι στατιστικώς σημαντική $F(14,198) = 201{,}592$ $p = 0{,}0001 < 0{,}05$. Δηλαδή, εάν ελέγξουμε τις αρχικές διαφορές στις βαθμολογίες στο προτέστ επίδοσης μεταξύ των δύο ομάδων πριν την παρέμβαση, εντοπίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους μετά την παρέμβαση, με προσαρμοσμένη μέση επίδοση βελτιωμένη κατά 14,247 βαθμούς στην πειραματική ομάδα.

Πίνακας 4.7.5.

*Αποτελέσματα ελέγχου ANCOVA*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Μετατέστ Επίδοσης

| Source | Type III Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Corrected Model | 469,146[a] | 2 | 234,573 | 107,641 | ,000 |
| Intercept | 91,931 | 1 | 91,931 | 42,186 | ,000 |
| Προτέστ Επίδοσης | 6,746 | 1 | 6,746 | 3,095 | ,122 |
| Κατηγορία παιδιών | 439,310 | 1 | 439,310 | 201,592 | ,000 |
| Error | 15,254 | 7 | 2,179 | | |
| Total | 2022,000 | 10 | | | |
| Corrected Total | 484,400 | 9 | | | |

a. R Squared = ,969 (Adjusted R Squared = ,960)

Πίνακας 4.7.6.

*Συντελεστές παλινδρόμησης της συμμεταβλητής πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή*

Parameter Estimates

Dependent Variable: Μετατέστ Επίδοσης

| Parameter | B | Std. Error | t | Sig. | 95% Confidence Interval | Partial Eta Squared |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | Lower Bound | Upper Bound | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 2,735 | 1,757 | 1,557 | ,163 | -1,419 | 6,890 | ,257 |
| Προτέστ Επίδοσης | ,462 | ,263 | 1,759 | ,122 | -,159 | 1,083 | ,307 |
| [Κατηγορία_παιδιών=1,00] | 14,247 | 1,003 | 14,198 | ,000 | 11,874 | 16,620 | ,966 |
| [Κατηγορία_παιδιών=2,00] | 0[a] | . | . | . | . | . | . |

a. This parameter is set to zero because it is redundant.

Για την ισχυροποίηση της αποτελεσματικότητας της παρέμβασης χρησιμοποιούνται επιπλέον μετρήσεις προερχόμενες από τα πρωτοκόλλα διαγνωστικής και αποδεικτικής αξιολόγησης. Οι δε μετρήσεις δείχνουν μια παρόμοια ισχυρή επίδραση της πειραματικής παρέμβασης.

Τα πρωτόκολλα διαγνωστικής και αποδεικτικής αξιολόγησης που καταρτίστηκαν στην τρέχουσα έρευνα, συνίστανται στη συνάρθρωση και κατηγοριοποίηση των λαθών των μαθητών στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης καθώς και στη διάκριση αυτών. Η συνάρθρωση και κατηγοριοποίηση αυτών ανέδειξε τέσσερις κατηγορίες λαθών, ήτοι:

Α. Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς (Α.Σ.)

Β. Αλγοριθμικά λάθη

Γ. Οπτικοχωρικά λάθη

Δ. Συνδυασμός λαθών των προηγούμενων κατηγοριών

**Α. Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς (Α.Σ.)**

Τα λάθη στους Α.Σ. αναφέρονται στην ελλιπή γνώση των αριθμητικών συνδυασμών, δηλαδή των αποτελεσμάτων των πράξεων με δύο μονοψήφιους αριθμούς (Αγαλιώτης, 2011, σελ. 298), και στη συγκεκριμένη έρευνα καταγράφηκαν τα λάθη των αριθμητικών συνδυασμών στα μερικά αθροίσματα και τα λάθη κατά τη διαφορά δύο αριθμητικών δεδομένων. Για παράδειγμα 7 + 4 = 10 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 1, σελ.368) ή 14 – 8 = 5 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 15, σελ.368)..

**B. Αλγοριθμικά λάθη**

Πρόκειται για λάθη κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, δηλαδή λάθη στις διαδικασίες με τις οποίες εκτελούνται γραπτά οι αριθμητικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Σαλβαράς, 2011, σελ. 123). Διακρίθηκαν οι εξής κατηγορίες λαθών:

i. Λάθη ελαττωματικού αλγόριθμου και παραβίασης της θεσιακής αξίας. Παραδείγματα τέτοιων λαθών είναι η πρόσθεση των ψηφίων σε ανεξάρτητες μεταξύ τους στήλες, π.χ. 264 ή 358

$$\begin{array}{r} 264 \\ +327 \\ \hline 5811 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 358 \\ +\ 271 \\ \hline 5129 \end{array}$$

(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 3, άσκηση 1 και άσκηση 4, σελ.370).

Στο συγκεκριμένο είδος λαθών παρατηρείται έλλειψη κατανόησης της δομής του αριθμητικού συστήματος, έλλειψη κατανόησης των θεμελιωδών αρχών και των συγκεκριμένων βημάτων του αλγόριθμου της κάθετης πρόσθεσης, καθώς και ελλιπή γνώση της θεσιακής αξίας των ψηφίων. Η διαφορετική αξία του κάθε ψηφίου ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό, δε λαμβάνεται υπόψη και δε δίνεται σημασία στη σχέση τελικού αθροίσματος και προσθετέων. Ταυτοχρόνως, αγνοείται η συνθήκη που θέτει το δεκαδικό σύστημα ως προς τη θεσιακή αξία των ψηφίων, δηλαδή ότι ο αριθμός των μονάδων για κάθε θέση θα πρέπει να μην υπερβαίνει τους 9, και η οποία συνθήκη στην πρόσθεση μας αναγκάζει να χρησιμοποιούμε τα κρατούμενα.

ii. Λάθη με τα κρατούμενα. Παραδείγματα τέτοιων λαθών είναι:

(α) η μεταφορά όλων των κρατουμένων στην ακραία αριστερή στήλη (στήλη εκατοντάδων) κατά την πρόσθεση τριψήφιων αριθμών, π.χ. 124 1 1

+ 388

602

(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 8, άσκηση 6, σελ.376). Ο μαθητής ενώ προβαίνει στη σωστή επίλυση των αριθμητικών συνδυασμών κάθε στήλης διαφορετικής τάξης μονάδων, παραλείπει να μεταφέρει το κρατούμενο στην στήλη των δεκάδων με συνέπεια την ύπαρξη λάθους στο τελικό άθροισμα στη συγκεκριμένη στήλη, συνεχίζει ωστόσο, σωστά να προσθέτει στη στήλη των δεκάδων τον αριθμητικό συνδυασμό 8+2=10 κρατώντας το κρατούμενο στη δεξιά πλευρά της πράξης και στη συνέχεια προσθέτει όλα τα κρατούμενα στη στήλη των εκατοντάδων. Παρατηρείται σε αυτό το είδος λαθών έλλειψη κατανόησης των θεμελιωδών αρχών και των συγκεκριμένων βημάτων του αλγόριθμου της κάθετης πρόσθεσης.

Ή η μεταφορά των κρατουμένων στην στήλη των εκατοντάδων κατά την αφαίρεση, π.χ. 967 1

-309

568

(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 2, άσκηση 13, σελ.369). Ο μαθητής προβαίνει σε σωστή εύρεση της διαφοράς 17-9=8, χωρίς ωστόσο να αφαιρεί το κρατούμενο από το 6 στη στήλη των δεκάδων ή να το προσθέτει στο 0 στην ίδια στήλη, παραταύτα προβαίνει σε αφαίρεση στη στήλη των δεκάδων 6-0=6 ως μια ανεξάρτητη στήλη, και στη συνέχεια αφαιρεί το κρατούμενο που είχε κρατήσει στη δεξιά πλευρά της πράξης από τη στήλη των εκατοντάδων.

(β) η επαναχρησιμοποίηση κρατουμένου στην αριστερή ακραία στήλη (στήλη εκατοντάδων) παρά τη σωστή εφαρμογή του σε προηγούμενη στήλη, π.χ. 245 1

- 127

(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 2, άσκηση 12, σελ. 369).

(γ) η παράλειψη του κρατουμένου τόσο στον αλγόριθμο της πρόσθεσης όσο και στον αλγόριθμο της αφαίρεσης, π.χ.

| | | |
|---|---|---|
| 253 | ή | 893 |
| +347 | | - 366 |
| 590 | | 537 |


(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 5, άσκηση 5, σελ. 372 και Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 3, άσκηση 14, σελ. 370). Ο πρώτος μαθητής ενώ προβαίνει στην εύρεση σωστών αθροισμάτων αριθμητικών συνδυασμών, παραταύτα αγνοεί τη χρήση του κρατουμένου τόσο στη διατήρησή του σε κάποια θέση στην πράξη όσο και στη σωστή χρήση του στα αλγοριθμικά βήματα. Ο δεύτερος μαθητής, παρά τη διατήρηση του κρατουμένου σε κάποια θέση της αλγοριθμικής πράξης, αγνοεί τη σωστή του χρήση, υποδηλώνοντας ελλιπή γνώση των συγκεκριμένων βημάτων του αλγόριθμου της κάθετης πρόσθεσης. Η διαφορετική αξία του κάθε ψηφίου ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό, δε λαμβάνεται υπόψη και δε δίνεται σημασία στη σχέση τελικού αθροίσματος και προσθετέων.

iii. Λάθη με το 0. Το λάθος αναφέρεται στο ό,τι η πρόσθεση μαζί του δίνει άθροισμα 0 ή η αφαίρεση αριθμού από το 0 έχει ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό, π.χ.

| |
|---|
| 360 |
| -158 |
| 218 |



(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 3, άσκηση 16, σελ. 370). Το μηδέν 0 λαμβάνεται ως συνώνυμο του «τίποτα» και κατά συνέπεια δεν παίρνεται υπόψη. Αφενός, αγνοείται ό,τι η ύπαρξη του μηδενός στην επάνω θέση της αφαίρεσης, δηλαδή στον μειωτέο, δείχνει απουσία μονάδων της συγκεκριμένης τάξης και ότι θα πρέπει να μετατρέψει το 0 σε 10, αφού πρώτα διαγράψει και μετατρέψει τον επάνω αριθμό που βρίσκεται αριστερά της στήλης που γίνεται η αφαίρεση. Αφετέρου, τα λάθη με το 0 δείχνουν τις δυσκολίες που δημιουργούνται στους συγκεκριμένους μαθητές από ένα αφηρημένο συμβολικό πλαίσιο της αριθμητικής, όπου η κατανόηση της θεσιακής αξίας που εμπερικλείει η αφαίρεση, είναι δυσχερής.

iv. Άγνοια αλγόριθμου. Αναφέρεται στην άγνοια του αλγόριθμου της πράξης της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης με συνέπεια τη μη επίλυση αυτού, π.χ. 345

$$\begin{array}{r} 345 \\ -136 \\ \hline \end{array}$$

(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 4, άσκηση 11 έως 16, σελ.371).

v. Άλλη πράξη στην εύρεση των μερικών διαφορών και ειδικότερα πρόσθεση αντί για αφαίρεση στον αλγόριθμο της αφαίρεσης, π.χ. 345

$$\begin{array}{r} 345 \\ -136 \\ \hline 468 \end{array}$$


(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 11, σελ. 368). Ο μαθητής ξεκίνησε με αφαίρεση στη στήλη των μονάδων και συνεχίζει με προσθέσεις στη στήλη των δεκάδων και εκατοντάδων.

vi. Λάθη διαφοράς Μικρότερο - από – Μεγαλύτερο. Οι μαθητές αφαιρούν το μικρότερο από το μεγαλύτερο ψηφίο σε μια στήλη ανεξάρτητα από το ποιο είναι το επάνω ψηφίο, π.χ. 794

$$\begin{array}{r} 794 \\ -278 \\ \hline 524 \end{array}$$

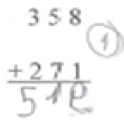
(Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 10, άσκηση 11, σελ. 377). Παρατηρούμε σε αυτό το είδος λαθών ότι παραβιάζεται η αρχή της αφαίρεσης, ό,τι δηλαδή, ολόκληρη η κάτω ποσότητα σε μια στήλη πρέπει να αφαιρεθεί από ολόκληρη την επάνω. Η παραβίαση αυτή αποκαλύπτει την αδυναμία του μαθητή να κάνει τη μεταφορά κρατουμένου από άλλη στήλη, δηλαδή να διαγραφεί και να γραφεί ο αριθμός στα αριστερά της στήλης που γίνεται η αφαίρεση και να μεταφέρει το κρατούμενο τις 10 μονάδες στο 4 για να εκτελεστεί η αφαίρεση.

vii. Λάθη τυχαίων μαντεμάτων. Τα λάθη αυτά αναφέρονται στο μάντεμα της διάκρισης των προσθέσεων με κρατούμενο στις δεκάδες και στη διάκριση των αφαιρέσεων που χρειάζονται μεταφορά κρατουμένου από τη στήλη των δεκάδων στη στήλη των μονάδων για να εκτελεστούν. Ο μαθητής δεν προβαίνει σε κάποια νοερή διαδικασία για να διαπιστώσει σε ποιες προσθέσεις το άθροισμα των αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9 και αντίστοιχα ποιες αφαιρέσεις χρειάζονται μεταφορά κρατουμένου για να εκτελεστούν με συνέπεια να προβαίνει σε μια τυχαία επιλογή της διάκρισης αυτών των αλγοριθμικών περιπτώσεων. Για παράδειγμα, σε άσκηση διάκρισης προσθέσεων με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9, ο μαθητής σημείωσε σωστά την άσκηση (10). Το λάθος διάκρισης που οφείλεται σε μάντεμα εντοπίζεται στην άσκηση (9) όπου ο μαθητής δεν έβαλε το κατάλληλο σύμβολο. Το τυχαίο μάντεμα μπορεί να είναι αποτέλεσμα: (α) αγνωσίας της θεσιακής αξίας των αριθμών στον αλγόριθμο, (β) αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση, ενδεχόμενος λαθεμένος νοερός αριθμητικός συνδυασμός.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☐ | +294 ☐ | +182 [v] |

**Γ. Οπτικοχωρικά λάθη**

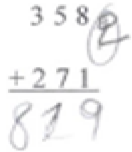
Τα λάθη αυτά αναφέρονται:

(α) σε αντιστροφή αριθμών, π.χ. 

όπου ο μαθητής αντιστρέφει τον αριθμό 9 (Βλ. Παράρτημα, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 3 σελ. 369).

(β) σε αντιστροφή των κρατουμένων. Η διαφορετική αξία του κάθε ψηφίου ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό, αντιστρέφεται και ο μαθητής τοποθετεί ως κρατούμενο τις μονάδες και γράφει στο αποτέλεσμα της πράξης το ψηφίο των δεκάδων. Για παράδειγμα στην άσκηση 358

$$\begin{array}{r} 358 \\ +\ 271 \\ \hline 819 \end{array} \quad 2$$




ο μαθητής στη στήλη των δεκάδων προσθέτει σωστά νοερά 7+5=12, αλλά κατά τη μεταφορά των 2 δεκάδων στο άθροισμα των δεκάδων και τη συγκράτηση του κρατουμένου 1 (μιας εκατοντάδας) στα δεξιά του αλγόριθμου για τη σταδιακή του μεταφορά στη στήλη των εκατοντάδων, ο μαθητής αντιστρέφει το 12 και γράφει το 1 στη στήλη των δεκάδων και κρατάει ως κρατούμενο τον αριθμό 2 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 2, άσκηση 4, σελ. 369).

**Δ. Συνδυασμός λαθών των προηγούμενων κατηγοριών.**

Στον συνδυασμό λαθών εμφανίζεται η ταυτόχρονη συνύπαρξη λαθών των προηγούμενων κατηγοριών. Αυτή η συνύπαρξη, αφενός οδηγεί σε περίπλοκους λαθεμένους αλγόριθμους και αφετέρου δείχνει τις ατυχείς γνωστικές υποκαταστάσεις που κάνουν οι μαθητές με δυσαριθμησία στην προσπάθεια της αλγοριθμικής επίλυσης.

Στον αλγόριθμο της πρόσθεσης επισημάνθηκαν πέντε κατηγορίες συνδυασμού λαθών:

1. Δ=A+Bii(γ) κατηγορία. Αυτή συμπεριλαμβάνει την ταυτόχρονη εμφάνιση λαθών σε Α. Σ. και παράλειψη κρατουμένου. Για παράδειγμα στην άσκηση 453

$$\begin{array}{r} 453 \\ +262 \\ \hline \end{array}$$

ο μαθητής στη στήλη των δεκάδων προσθέτει 6+5=10 (λάθος Α.Σ.) και παραλείπει τη μεταφορά κρατουμένου στη στήλη των εκατοντάδων (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 3, σελ. 368)

2. Δ=Α+Βii(α) κατηγορία. Αυτή συμπεριλαμβάνει την ταυτόχρονη εμφάνιση λαθών σε Α. Σ. και μεταφορά όλων των κρατουμένων στην ακραία αριστερή στήλη (στήλη των εκατοντάδων). Για παράδειγμα στην πρόσθεση

$$\begin{array}{r} 253 \quad 1 \\ +347 \\ \hline 890 \end{array}$$

ο μαθητής προσθέτει σωστά στη στήλη των μονάδων και σημειώνει και το κρατούμενο που προκύπτει από την πρόσθεση, στη συνέχεια προσθέτει στη στήλη των δεκάδων 4+5=9 χωρίς να μεταφέρει το κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων για να το προσθέσει, αλλά το μεταφέρει στη στήλη των εκατοντάδων κάνοντας ταυτόχρονα λάθος στον Α.Σ. 2+3=8 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 2, άσκηση 5, σελ. 369).

3. Δ=Α+Βii(γ)+Γ(α) κατηγορία. Αυτή συμπεριλαμβάνει την ταυτόχρονη ύπαρξη τριών κατηγοριών λαθών, όπως λάθη σε Α.Σ., λάθη παράλειψης κρατουμένου και ταυτόχρονα οπτικοχωρικά λάθη που σχετίζονται με την αντιστροφή αριθμού. Για παράδειγμα, 358 1

+271

51 

όπου ο μαθητής στην πρόσθεση των μονάδων 8+1=9 αντιστρέφει τον αριθμό,  ταυτόχρονα κάνει λάθος στον Α.Σ. 7+5=11 και ενώ κρατάει το κρατούμενο στα δεξιά της πράξης παραλείπει να το εφαρμόσει στη στήλη των εκατοντάδων (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 4, σελ. 368).

4. Δ=Α+Γ(β) κατηγορία, όπου ταυτόχρονα ενυπάρχουν λάθη σε Α.Σ. και οπτικοχωρικά λάθη που αναφέρονται στην αντιστροφή κρατουμένων. Για παράδειγμα 358 2

    +271

    819

    Ο μαθητής στη στήλη των δεκάδων προσθέτει 7+5=12 και κάνει αντιστροφή κρατουμένου, όπου τοποθετεί τις μονάδες ως κρατούμενο και τις δεκάδες τις τοποθετεί στη στήλη των δεκάδων. Στη συνέχεια προσθέτει στη στήλη των εκατοντάδων 3+2+2=8 κάνοντας λάθος σε Α.Σ. (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 2, άσκηση 4, σελ. 369).

5. Δ=Bi+Bii(γ) κατηγορία, που συμπεριλαμβάνει λάθη ελαττωματικού αλγόριθμου και ταυτόχρονα την παράλειψη κρατουμένου. Για παράδειγμα στην άσκηση 124 1

    +388

    4102

    ο μαθητής προσθέτει σωστά τους αριθμούς στη στήλη των μονάδων και κρατάει ως κρατούμενο το ένα. Παραλείπει να το μεταφέρει στη στήλη των δεκάδων και ταυτόχρονα δημιουργεί ελαττωματικό αλγόριθμο στη στήλη των δεκάδων γράφοντας 8+2=10 ως άθροισμα (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 3, άσκηση 6, σελ. 370).

Αντίστοιχα, στον αλγόριθμο της αφαίρεσης παρατηρήθηκαν οι κάτωθι πέντε κατηγορίες συνδυασμού λαθών:

1. Δ=Bv+A+ Bii(γ)+Biii κατηγορία. Συμπεριλαμβάνει την ταυτόχρονη ύπαρξη άλλης πράξης, και συγκεκριμένα πρόσθεσης αντί για αφαίρεσης στην εύρεση των μερικών διαφορών στη στήλη των εκατοντάδων ή και στη στήλη των δε-

κάδων, λάθος σε αριθμητικό συνδυασμό και ταυτόχρονη παράλειψη κρατουμένου και λάθος με το 0. Για παράδειγμα στην άσκηση

$$\begin{array}{r} 360 \\ -158 \\ \hline 408 \end{array}$$

ο μαθητής στη στήλη των μονάδων αφαιρεί 0-8=8 (λάθος με το 0), και ταυτόχρονα παραλείπει το κρατούμενο, εφόσον δεν χρησιμοποίησε δανεικό για να προβεί στην αφαίρεση, στη στήλη των δεκάδων αφαιρεί 6-5=0 κάνοντας λάθος στην εύρεση της μερικής διαφοράς και στη στήλη των εκατοντάδων κάνει πρόσθεση αντί για αφαίρεση 3+1=4 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 1, άσκηση 16, σελ. 368).

2. Δ=Biii +A+ Bii(γ) κατηγορία. Εμπεριέχει την ταυτόχρονη ύπαρξη λαθών με το 0, λάθη σε Α.Σ. και λάθη παράλειψης κρατουμένου. Για παράδειγμα στην άσκηση

$$\begin{array}{r} 967 \\ -309 \\ \hline 209 \end{array}$$

ο μαθητής έγραψε 7-9=9 όπου υπάρχει λάθος στην εύρεση της μερικής διαφοράς, δεν προέβη σε δανεισμό από τη στήλη των δεκάδων για να κάνει την αφαίρεση στη στήλη των μονάδων, επομένως παραβιάζεται στη συνέχεια η ύπαρξη και χρήση του κρατουμένου, ταυτόχρονα στη στήλη των δεκάδων σημειώνεται το λάθος με το 0, ο μαθητής κάνει 6-0=0, και στη στήλη των εκατοντάδων κάνει 9-3=2 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 5, άσκηση 13, σελ. 372).

3. Δ=Bv+Bii(γ), όπου ταυτόχρονα ενυπάρχουν η πρόσθεση αντί για αφαίρεση των μερικών διαφορών και παράλειψη κρατουμένου.

4. Δ=A+ Bii(γ) κατηγορία. Ταυτόχρονη ύπαρξη λάθους σε Α.Σ. και παράλειψη

κρατουμένου, π.χ. 967 1

-309

368

όπου ο μαθητής στη στήλη των μονάδων πραγματοποιεί σωστά την αφαίρεση 17-9=8, στη συνέχεια παραλείπει να χρησιμοποιήσει το κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και προβαίνει στην αφαίρεση των αριθμών 6-0=6, ενώ στη στήλη των εκατοντάδων προβαίνει σε λάθος εύρεσης διαφοράς, δηλαδή αριθμητικού συνδυασμού αφαίρεσης κάνοντας 9-3=3 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 3, άσκηση 13, σελ. 370).

5. Δ= Biii + Bii(γ) κατηγορία. Εμπεριέχει λάθη με το 0 και παράλειψη κρατουμένου. Για παράδειγμα στην άσκηση 360 1

-158

218

ο μαθητής στη στήλη των μονάδων αγνοεί τη λειτουργία του 0 και αφαιρεί 0-8=8, παραταύτα σημειώνει κρατούμενο στα δεξιά της πράξης, που ωστόσο παραλείπει να χρησιμοποιήσει στη στήλη των δεκάδων ή αφαιρώντας το από το 6 ή προσθέτοντάς το στο 5, και στη στήλη των δεκάδων αφαιρεί 6-5=1 (Βλ. Παράρτημα 12, κωδικός μαθητή: 3, άσκηση 16, σελ. 370).

Βάσει των κατηγοριών των λαθών που καταγράφηκαν στο προτέστ επίδοσης στους μαθητές με δυσαριθμησία στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, καταρτίστηκε το Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης (Βλ. Πίνακα 4.7.7.).

Πίνακας 4.7.7.

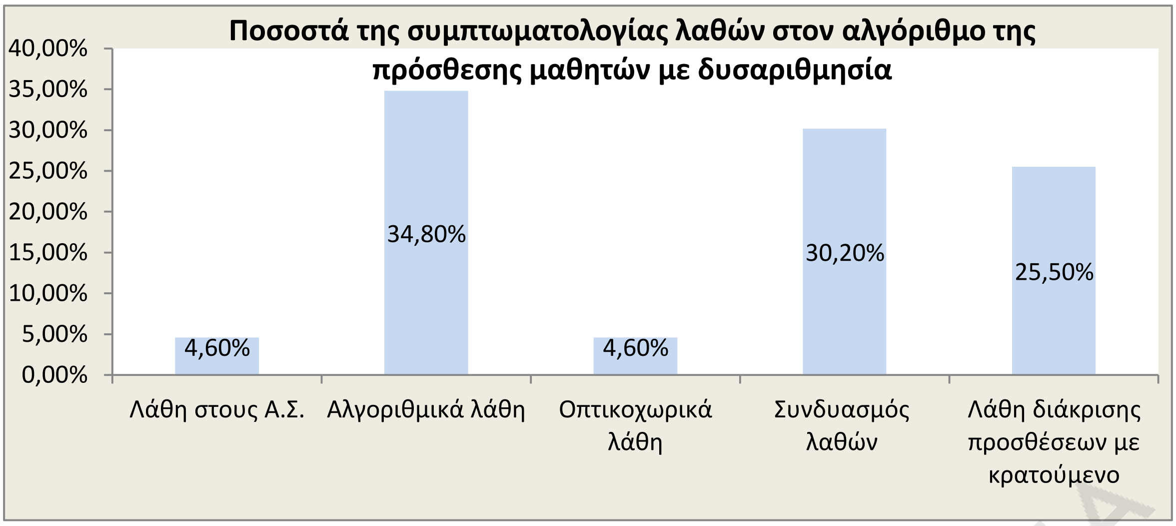
***Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης***

| Αλγόριθμος πρόσθεσης και αφαίρεσης | Συμπτωματολογία λαθών Μαθητών με Δυσαριθμησία | Συνολικός αριθμός λαθών |
|---|---|---|
| **Εκτέλεση προσθέσεων με κρατούμενο** | | |
| • Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς | 2Α | 2 |
| • Αλγοριθμικά λάθη | 4Bi, 2Bii(α) 1Bii(β) 8Bii(γ) | 15 |
| • Οπτικοχωρικά λάθη | 1Γ(α), 1Γ(β) | 2 |
| • Συνδυασμός λαθών | 4Δ=Α+ Bii(γ)<br>6Δ=Α+ Bii(α)<br>1Δ=Α+ Bii(γ)+Γ(α)<br>1Δ=Α+Γ(β)<br>1Δ=Bi+Bii(γ) | 13 |
| **Διάκριση προσθέσεων με κρατούμενο** | 11Bvii | 11 |
| Σύνολο λαθών στην πρόσθεση | | 43 |
| **Εκτέλεση αφαιρέσεων με και χωρίς δανεικό** | | |
| • Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς | 4Α | 4 |
| • Αλγοριθμικά λάθη | 2Bii(α), 2Bii(β), 4Bii(γ), 2Biii, 9Biv, 3Bv, 7Bvi | 29 |
| • Οπτικοχωρικά λάθη | 1Γ(α) | 1 |
| • Συνδυασμός λαθών | 2Δ=Bv+Α+ Bii(γ)+ Biii<br>3Δ=Biii +Α+ Bii(γ)<br>1Δ=Bv+Bii(γ)<br>5Δ=Α+ Bii(γ)<br>1Δ= Biii + Bii(γ) | 12 |
| **Διάκριση αφαιρέσεων με και χωρίς δανεικό** | 8Bvii | 8 |
| Σύνολο λαθών στην αφαίρεση | | 54 |

Σύμφωνα με το πρωτόκολλο διαγνωστικής αξιολόγησης, το σύνολο των λαθών που εμπερικλείει τη φύση της δυσλειτουργίας τους για την επιτυχή εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης των πέντε μαθητών με δυσαριθμησία, είναι 43 και το σύνολο λαθών στην αφαίρεση είναι 54. Ο υψηλότερος αριθμός εμφάνισης λαθών στην αφαίρεση καταδεικνύει τη μεγαλύτερη δυσκολία των μαθητών στην εφαρμογή του συγκεκριμένου αλγόριθμου.

Στα Γραφήματα 4.7.2. και 4.7.3. παρουσιάζονται τα ποσοστά της συμπτωματολογίας λαθών στην πρόσθεση και στην αφαίρεση, αντίστοιχα. Βάσει του Γραφήματος 4.9.2., η κατηγορία λαθών με το μεγαλύτερο ποσοστό σε συχνότητα στον αλγόριθμο της πρόσθεσης, εμφανίζεται αυτή των αλγοριθμικών λαθών με ποσοστό 34,8%.

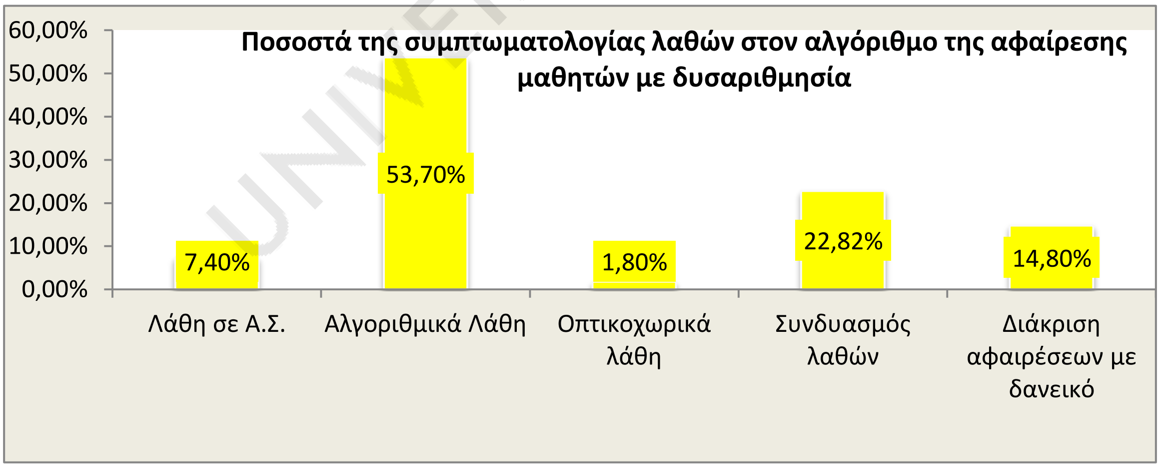
Ακολουθεί ο συνδυασμός λαθών με ποσοστό εμφάνισης 30,2% και έπονται τα λάθη διάκρισης προσθέσεων με κρατούμενο, με ποσοστό 25,5 %.




*Γράφημα 4.7.2.*
Ποσοστά της συμπτωματολογίας λαθών στον αλγόριθμο της πρόσθεσης μαθητών με δυσαριθμησία

Η κατηγορία που αφορά τη μεμονωμένη ύπαρξη λαθών στους Α.Σ., εμφανίζεται σε ποσοστό 4,6 % και η μεμονωμένη ύπαρξη οπτικοχωρικών λαθών σε ποσοστό 4,6 %.

Στον αλγόριθμο της αφαίρεσης η κατηγορία λαθών με το μεγαλύτερο ποσοστό σε συχνότητα εμφανίζεται αυτή των αλγοριθμικών λαθών με ποσοστό 53,7% (Βλ. Γράφημα 4.7.3.).




*Γράφημα 4.7.3.*
Ποσοστά της συμπτωματολογίας λαθών στον αλγόριθμο της αφαίρεσης μαθητών με δυσαριθμησία

Ακολουθεί ο συνδυασμός λαθών με ποσοστό εμφάνισης 22,2%. Στη συνέχεια, τα λάθη διάκρισης αφαιρέσεων με δανεικό εμφανίζονται με ποσοστό 14,8 %. Η κατηγορία λαθών που αφορά την ύπαρξη λαθών στους Α.Σ. χωρίς την ταυτόχρονη ύπαρξη κάποιου άλλου λάθους εμφανίζεται σε ποσοστό 7,4 % και η μεμονωμένη ύπαρξη οπτικοχωρικών λαθών επίσης, σε ποσοστό 1,8 %.

Μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης καταρτίστηκε Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης με τα λάθη των μαθητών στο μετατέστ επίδοσης (Βλ. Πίνακα 4.7.8.).

Πίνακας 4.7.8.

***Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης***

| **Αλγόριθμος πρόσθεσης και αφαίρεσης** | **Συμπτωματολογία λαθών Μαθητών με Δυσαριθμησία** | **Συνολικός αριθμός λαθών** |
|---|---|---|
| **Εκτέλεση προσθέσεων με κρατούμενο** | | |
| • Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς | 0A | 0 |
| • Αλγοριθμικά λάθη | 0Bi, 0Bii(α), 0Bii(β)<br>1Bii(γ) | 1 |
| • Οπτικοχωρικά λάθη | 0Γ(α), 0Γ(β) | 0 |
| • Συνδυασμός λαθών | 0Δ=A+Bii(γ)<br>0Δ=A+Bii(α)<br>0Δ=A+Bii(α)+Γ(α)<br>0Δ=A+Γ(β)<br>0Δ=Bi+Bii(γ) | 0 |
| **Διάκριση προσθέσεων με κρατούμενο** | 2Bvii | 2 |
| Σύνολο λαθών στην πρόσθεση | | 3 |
| **Εκτέλεση αφαιρέσεων με και χωρίς δανεικό** | | |
| • Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς | 1A | 1 |
| • Αλγοριθμικά λάθη | 0Bii(α) 0Bii(β) 0Bii(γ)<br>0Biii 0Biv 0Bv, 0Bvi, , | 0 |
| • Οπτικοχωρικά λάθη | 0Γ(α) | 0 |
| • Συνδυασμός λαθών | 0Δ=Bv+A+Bii(γ)<br>0Δ=Biii+A+Bii(γ)<br>0Δ=Bv+Bii(γ)<br>0Δ=A+ Bii(γ)<br>0Δ= Biii+Bii(γ) | 0 |
| **Διάκριση αφαιρέσεων με και χωρίς δανεικό** | 1Bvii | 1 |
| Σύνολο λαθών στην αφαίρεση | | 2 |

Από το Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης, παρατηρείται ότι τα συνολικά λάθη πρόσθεσης στους πέντε μαθητές, στους οποίους εφαρμόστηκε η παρέμβαση, ήταν μόλις τρία, με το ένα λάθος να ανήκει στην κατηγορία Bii(γ), δηλαδή αυτό της παράλειψης κρατουμένου, και τα δύο λάθη στην κατηγορία Bvii, αυτή της τυχαίας διάκρισης προσθέσεων με κρατούμενο. Τα συνολικά λάθη αφαίρεσης των μαθητών που καταγράφηκαν μετά την παρέμβαση ήταν μόλις δύο, εκ των οποίων το ένα αφορούσε λάθος σε αριθμητικό συνδυασμό εύρεσης διαφοράς, δηλαδή ανήκε στην κατηγορία A, και το άλλο λάθος της κατηγορίας Bvii δηλαδή, της τυχαίας διάκρισης αφαιρέσεων με δανεικό.

Κατόπιν της περιγραφικής στατιστικής των πρωτοκόλλων αξιολόγησης, διενεργήθηκε στατιστικός συγκριτικός έλεγχος για την επαύξηση της εγκυρότητας των δεδομένων. Για τον έλεγχο της συμβατότητας της κατανομής των μεταβλητών των πρωτοκόλλων αξιολόγησης με την κανονική, διενεργήθηκε έλεγχος των στατιστικών test Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-wilk (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακα 5, σελ. 452-457) σε κάθε μια από αυτές. Βάσει του επιπέδου σημαντικότητας Sig. > 5% τόσο στο Kolmogorov-Smirnov όσο και στο Shapiro-Wilk test για το σύνολο των μεταβλητών των πρωτοκόλλων αξιολόγησης, η υπό έλεγχο κατανομή δε διαφέρει από την κανονική.

Λόγω της κανονικότητας των μεταβλητών εφαρμόστηκε ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου ελέγχου (Paired Samples t – test). Βάσει του Πίνακα 4.7.9., το Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης, που εμπερικλείει το σύνολο της συμπτωματολογίας των λαθών των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των πέντε μαθητών με δυσαριθμησία πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης, που εμπερικλείει το σύνολο των λαθών των μαθητών, μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης με μέση βελτιωμένη επίδοση κατά 14 βαθμούς ($p$ = 0,000 < 0,05).

Η στατιστική σημαντικότητα της διαφοράς των πρωτοκόλλων αξιολόγησης, αντικατοπτρίζει τη σημαντικότητα στην ελαχιστοποίηση της συμπτωματολογίας λαθών της πειραματικής ομάδας, ως συνέπεια της σημαντικής επιρροής της πειραματικής παρέμβασης στην εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Πίνακας 4.7.9.

*Paired Samples t-Test των πρωτοκόλλων αξιολόγησης της πειραματικής ομάδας*

| Διαφορές στο Πρωτόκολλο Διαγνωστικής και Αποδεικτικής αξιολόγησης της πειραματικής ομάδας | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Paired Differences | | | | | | | |
| | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | | | | |
| | | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean | Lower | Upper | t | df | Sig. (2-tailed) |
| Pair 1 | Πρωτ. Διαγνωστικής Αξιολόγησης Πρωτ. Αποδεικτικής Αξιολόγησης | 14,0 | 2,23607 | 1,000 | 11,223 | 16,776 | 14,000 | 4 | ,000 |

Συνοψίζοντας, τα πειραματικά δεδομένα αυτής της ενότητας της μελέτης καταδεικνύουν την ισχυρή επίδραση της πειραματικής παρέμβασης, στους μαθητές με δυσαριθμησία εν αντιθέσει με την ομάδα ελέγχου που δέχτηκε τη συνήθη διδασκαλία. Η πειραματική επιβεβαίωση προήλθε από τη στατιστικά σημαντική διαφορά στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στις μεταβλητές προτέστ και μετατέστ επίδοσης της πειραματικής ομάδας, από τη μη στατιστικά σημαντική διαφορά στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης της ομάδας ελέγχου που παρακολούθησε τη συνήθη διδασκαλία, από τη στατιστικά σημαντική διαφορά που προέκυψε από το t-test ανεξάρτητων δειγμάτων κατά τη σύγκριση των δύο ομάδων, πειραματικής και ελέγχου στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης, από τον έλεγχο ANCOVA στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης μεταξύ των δύο ομάδων και της στατιστικά σημαντικής διαφοράς στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων των Πρωτοκόλλων Διαγνωστικής και Αποδεικτικής Αξιολόγησης, τα οποία εμπεριείχαν το σύνολο της συμπτωματολογίας των λαθών των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των πέντε μαθητών με δυσαριθμησία πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, και μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης.

### 4.8. Αποτελέσματα διερεύνησης επιρροής της πειραματικής παρέμβασης στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στην πρόσβαση συμβολικών αναπαραστάσεων και στις γνωστικές λειτουργίες

Η ομάδα των δεδομένων στην παρούσα ενότητα της μελέτης αναλύθηκε για την εύρεση στατιστικά σημαντικής βελτίωσης της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών από την αναπαράσταση των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους, με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Αρχικά, διερευνήθηκε η επίδραση της πειραματικής παρέμβασης στις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης. Για την κανονικότητα των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακα 6, σελ. 452-457), στηριζόμενοι στα Sig. των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk test, καταλήγουμε ότι όλες οι μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης μετά παρέμβασης (Μ.Π.) ακολουθούν την κανονική κατανομή (Sig. > 5%).

Στον Πίνακα 4.8.1. παρουσιάζονται τα βασικά περιγραφικά χαρακτηριστικά, όπως το εύρος *(Range)*, οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), οι μέσες τιμές (M) και οι τυπικές αποκλίσεις (SD), στις τέσσερις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης της πειραματικής ομάδας προ παρέμβασης (Π.Π) και μετά παρέμβασης (Μ.Π).

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή προ παρέμβασης (Π.Π) των μεταβλητών W Οξύτητα ANS, R.T W, μειώθηκε έπειτα από την παρέμβαση (Μ.Π), αποτέλεσμα επιθυμητό, καθώς όσο μικρότερο είναι το W και ο χρόνος απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T W), τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα διάκρισης ποσοτήτων ενώ για τη μεταβλητή Ικανότητα Subitizing αυξήθηκε (highlighted) και μειώθηκε ο χρόνος απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing). Τα παραπάνω μας προϊδεάζουν για το γεγονός ότι η παρέμβαση ωφέλησε το σύνολο των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τυπική απόκλιση μειώθηκε σε όλες τις μη συμβολικές μεταβλητές Μ.Π.

Πίνακας 4.8.1.

*Εύρος (Range), Ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), μέσες τιμές (M) και τυπικές αποκλίσεις (SD), στις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης της πειραματικής ομάδας Προ Παρέμβασης (Π.Π) και μετά παρέμβασης (Μ.Π)*

| | Πειραματική ομάδα (N=5) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Range* | *Min.* | *Max.* | *Mean* | *Std. Deviation* |
| W Οξύτητα ANS Π.Π | ,59 | ,28 | ,87 | ,4980 | ,23167 |
| R.T W Π.Π | 1084,00 | 2028,00 | 3112,00 | 2527,80 | 399,80270 |
| Ικανότητα Subitizing Π.Π | 13,00 | 11,00 | 24,00 | 17,4000 | 4,92950 |
| RT Subitizing Π.Π | 103289,00 | 94576,00 | 197865,00 | 122155,80 | 43664,83573 |
| W Οξύτητα ANS Μ.Π | ,24 | ,28 | ,52 | ,4180 | ,12194 |
| R.T W Μ.Π | 239,00 | 1920,00 | 2159,00 | 2026,60 | 88,29949 |
| Ικανότητα Subitizing Μ.Π | ,00 | 32,00 | 32,00 | 32,0000 | ,00000 |
| RT Subitizing Μ.Π | 7863,00 | 68124,00 | 75987,00 | 72689,20 | 3277,09058 |

Για τη διαπίστωση των στατιστικά σημαντικών διαφορών που επέφερε η πειραματική παρέμβαση στις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, εφαρμόστηκε ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου t ελέγχου (Paired Samples t – test) στην πειραματική ομάδα, λόγω της κανονικότητας των μεταβλητών.

Στον Πίνακα 4.8.2. παρουσιάζονται οι συγκρίσεις των διαφορών των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης για την πειραματική ομάδα, βάσει του συσχετισμένου t ελέγχου. Όπως προκύπτει από την επισκόπηση του πίνακα, η πειραματική παρέμβαση επέφερε στατιστικά σημαντική βελτίωση στην Ικανότητα Subitizing, καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μικρότερο του 5% ($p$ = 0,003) και οριακή στατιστικά σημαντική μείωση στον χρόνο απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing Μ.Π) ($p$ = 0,058). Βασιζόμενοι στους μέσους όρους η βελτίωση στην ικανότητα Subitizing ανέρχεται στο 45,625% και η βελτίωση στη μείωση του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας ανέρχεται στο 40,5%.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αντανακλούν τη σημαντική συμβολή της παρέμβασης στην ικανότητα του subitizing, δηλαδή στην ικανότητα της γρήγορης και ακριβούς εκτίμησης του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων, που αριθμητικά κυμαίνονται από ένα έως και τέσσερα αντικείμενα, σε χρόνους που δεν επιτρέπουν την προσφυγή στην καταμέτρηση, η οποία ικανότητα συνυφαίνεται με τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία, όπως διαπιστώθηκε από την ανάλυση των δεδομένων του πρώτου ερωτήματος της παρούσας μελέτης.

Αναφορικά με τις μεταβλητές του προσεγγιστικού συστήματος, η πειραματική παρέμβαση επέφερε ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 16,06% στη μέση τιμή της μεταβλητής W Οξύτητα ANS και ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 19,83% στη μέση τιμή της μεταβλητής R.T W.

Πίνακας 4.8.2.

*Paired Samples t-Test των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης στην* *πειραματική ομάδα*

| | | Mean | Std, Deviation | Std, Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference Lower | Upper | t | df | Sig, (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Διαφορές στις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης στην πειραματική ομάδα προ και μετά παρέμβασης | | | | | | | | |
| Pair 1 | W Οξύτητα ANS Π.Π<br>W Οξύτητα ANS Μ.Π | ,08000 | ,15748 | ,07043 | -,11554 | ,27554 | 1,136 | 4 | ,319 |
| Pair 2 | RT W Π.Π<br>RT W Μ.Π | 501,2000 | 462,8311 | 206,9844 | -73,4808 | 1075,8808 | 2,421 | 4 | ,073 |
| Pair 3 | Ικανότητα Subitizing Π.Π<br>Ικανότητα Subitizing Μ.Π | -14,6000 | 4,9295 | 2,20454 | -20,72079 | -8,47921 | -6,62 | 4 | ,003 |
| Pair 4 | RT Subitizing Π.Π<br>RT Subitizing Μ.Π | 49466,600 | 41942,52 | 18757,2683 | -2611,9257 | 101545,1257 | 2,63 | 4 | ,058 |

Μετά τον έλεγχο της επίδρασης της πειραματικής παρέμβασης στις μεταβλητές της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, διενεργήθηκε έλεγχος επίδρασης της πειραματικής παρέμβασης στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Στηριζόμενοι στα Sig. των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk test (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακας 7., σελ.452-457), καταλήγουμε ότι όλες οι μεταβλητές των συμβολικών ικανοτήτων μετά παρέμβασης (Μ.Π.) ακολουθούν την κανονική κατανομή (Sig. > 5%),

Στον Πίνακα 4.8.3., παρουσιάζονται περιγραφικά χαρακτηριστικά των δέκα μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, όπως το εύρος (Range), οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), οι μέσες τιμές (M) και οι τυπικές αποκλίσεις (SD), της πειραματικής ομάδας Προ Παρέμβασης (Π.Π) και μετά παρέμβασης (Μ.Π). Βάσει του Πίνακα, η μέση τιμή Π.Π των μεταβλητών Ικανότητα Απαρίθμησης, Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων και Αντίστροφη Καταμέτρηση, αυξήθηκε Μ.Π (highlighted) ενώ για τις υπόλοιπες μεταβλητές μειώθηκε. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τυπική απόκλιση μειώθηκε σε όλες τις συμβολικές μεταβλητές Μ.Π.

Πίνακας 4.8.3.

*Εύρος (Range), ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), μέσες τιμές (M) και τυπικές αποκλίσεις (SD), στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας της πειραματικής ομάδας Προ Παρέμβασης (Π.Π) και μετά παρέμβασης (Μ.Π)*

| | Πειραματική ομάδα (N=5) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Range* | *Min.* | *Max.* | *M* | *S.D.* |
| Ικανότητα Απαρίθμησης Π.Π | 4,00 | 6,00 | 10,00 | 7,8000 | 1,48324 |
| R.T Απαρίθμησης Π.Π | 35719,00 | 99289,00 | 135008,00 | 120974,60 | 13186,70 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων Π.Π | 14,00 | 16,00 | 30,00 | 21,8000 | 5,67450 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού Π.Π | 8900,00 | 33456,00 | 42356,00 | 38297,20 | 3180,959 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών Π.Π | 4465,00 | 26789,00 | 31254,00 | 29299,000 | 1936,885 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων Π.Π | 16,00 | 5,00 | 21,00 | 14,0000 | 7,03562 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου Π.Π | 6640,00 | 41256,00 | 47896,00 | 43819,00 | 2885,16 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων Π.Π | 7569,00 | 32432,00 | 40001,00 | 35854,80 | 3088,361 |
| Επίδραση μεγέθους Π.Π | 5346,00 | 25643,00 | 30989,00 | 28141,80 | 2244,338 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση Π.Π | 10,00 | ,00 | 10,00 | 6,0000 | 5,47723 |
| Ικανότητα Απαρίθμησης Μ.Π | ,00 | 10,00 | 10,00 | 10,0000 | ,00000 |
| R.T Απαρίθμησης Μ.Π | 10337,00 | 79897,00 | 90234,00 | 85530,60 | 4648,623 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων Μ.Π | ,00 | 32,00 | 32,00 | 32,0000 | ,00000 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού Μ.Π | 4997,00 | 21345,00 | 26342,00 | 24193,00 | 1997,632 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών Μ.Π | 3336,00 | 14569,00 | 17905,00 | 15922,20 | 1427,12 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων Μ.Π | 4,00 | 28,00 | 32,00 | 30,4000 | 1,51658 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου Μ.Π | 2107,00 | 33789,00 | 35896,00 | 35032,00 | 819,537 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων Μ.Π | 2892,00 | 23897,00 | 26789,00 | 25244,60 | 1141,481 |
| Επίδραση μεγέθους Μ.Π | 5307,00 | 24569,00 | 29876,00 | 26864,80 | 2029,731 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση Μ.Π | 10,00 | 10,00 | 20,00 | 16,0000 | 5,47723 |

Για τη διαπίστωση των στατιστικά σημαντικών διαφορών που επέφερε η πειραματική παρέμβαση στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, εφαρμόστηκε ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου t ελέγχου (Paired Samples t – test) στην πειραματική ομάδα, λόγω της κανονικότητας των μεταβλητών.

Στον Πίνακα 4.8.4. παρουσιάζονται οι συγκρίσεις των διαφορών των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας για την πειραματική ομάδα, βάσει του συσχετισμένου t ελέγχου. Όπως προκύπτει από την επισκόπηση του πίνακα, η πειραματική παρέμβαση είχε στατιστικά σημαντικό αντίκτυπο σε όλες τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μικρότερο του 5%, πλην της μεταβλητής της επίδρασης του μεγέθους των αριθμών ($p$ = 0,283 > 0,05).

Πίνακας 4.8.4.

*Paired Samples t-Test των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας στην πειραματική ομάδα*

| | | Διαφορές στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας στην πειραματική ομάδα προ και μετά παρέμβασης | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | | | | |
| | | Mean | Std, Deviation | Std, Error Mean | Lower | Upper | t | df | Sig, (2-tailed) |
| Pair 1 | Ικανότητα Απαρίθμησης Π.Π Ικανότητα Απαρίθμησης Μ.Π | -2,2000 | 1,48324 | ,66332 | -4,04169 | -,35831 | -3,31 | 4 | ,029 |
| Pair 2 | R.T Απαρίθμησης Π.Π R.T Απαρίθμησης Μ.Π | 35444,00 | 13608,34 | 6085,83 | 18547,003 | 52340,99 | 5,824 | 4 | ,004 |
| Pair 3 | Ικαν/τα Σύγκρισης Μονοψήφιων Π.Π Ικαν/τα Σύγκρισης Μονοψήφιων Μ.Π | -10,200 | 5,67450 | 2,53772 | -17,24583 | -3,15417 | -4,01 | 4 | ,016 |
| Pair 4 | Επίδραση απόστασης 1 αριθμού Π.Π Επίδραση απόστασης 1 αριθμού Μ.Π | 14104,20 | 1643,874 | 735,16 | 12063,060 | 16145,33 | 19,18 | 4 | ,000 |
| Pair 5 | Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών Π.Π Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών Μ.Π | 13376,80 | 1893,552 | 846,82 | 11025,643 | 15727,95 | 15,79 | 4 | ,000 |
| Pair 6 | Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων Π.Π Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων Μ.Π | -16,400 | 7,16240 | 3,20312 | -25,29330 | -7,50670 | -5,12 | 4 | ,007 |
| Pair 7 | Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου Π.Π Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου Μ.Π | 8787,00 | 2813,64 | 1258,30 | 5293,397 | 12280,60 | 6,983 | 4 | ,002 |
| Pair 8 | Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων Π.Π Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων Μ.Π | 10610,20 | 3970,75 | 1775,77 | 5679,857 | 15540,54 | 5,975 | 4 | ,004 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pair 9 | Επίδραση μεγέθους Π.Π<br>Επίδραση μεγέθους Μ.Π | 1277,00 | 2302,52 | 1029,72 | -1581,966 | 4135,966 | 1,240 | 4 | ,283 |
| Pair 10 | Αντίστροφη Καταμέτρηση Π.Π<br>Αντίστροφη Καταμέτρηση Μ.Π | -10,00 | 7,0710 | 3,16228 | -18,779 | -1,22011 | -3,16 | 4 | ,034 |

Βασιζόμενοι στις μέσες τιμές, η πειραματική παρέμβαση επέφερε, στατιστικά σημαντική αύξηση κατά 22% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Απαρίθμησης και σημαντική μείωση κατά 30% στη μέση τιμή του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Απαρίθμησης).

Από τα εν λόγω αποτελέσματα, προκύπτει ότι η αναπαράσταση των ποσοτήτων μέσω της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης, η κωδικοποίηση των συνόλων των αριθμητικών συμβόλων και των σχέσεων τους ως προσθετική δομή σε ξεχωριστές στήλες (ανάλυση σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) για την κατανόηση της θεσιακής αξίας της πληθικής σχέσης του κάθε αριθμητικού συμβόλου, κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, μείωσε σημαντικά τον χρόνο που χρειάζονταν οι μαθητές για να καταμετρήσουν ποσότητες και αύξησε την ικανότητα της σωστής απαρίθμησης.

Συνεχίζοντας τη σύγκριση μέσων τιμών, διαπιστώνουμε ότι η επιρροή της πειραματικής παρέμβασης της αναπαράστασης των ποσοτήτων επέφερε σημαντική αύξηση κατά 31,87% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων. Αυτό είναι ερμηνεύσιμο υπό το πρίσμα του ορισμού της ικανότητας της σύγκρισης, η οποία δεν είναι ηχητική αναπαράσταση αραβικών αριθμών, αλλά ταυτόχρονη νοητική αναπαράσταση και αποκωδικοποίηση των ποσοτήτων που αυτή εκφράζει.

Παρατηρείται επίσης, ότι η πειραματική παρέμβαση επέφερε στατιστικά σημαντική μείωση κατά 44,78% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 1 αριθμού, και σημαντική μείωση κατά 45,66% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών. Οι μαθητές μετά την πειραματική παρέμβαση απαντούσαν πιο γρήγορα κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών που διέφεραν κατά 1 αριθμό και επίσης πιο γρήγορα όταν σύγκριναν μονοψήφιους αριθμούς που είχαν απόσταση 4-5 αριθμών. Η σημαντικότητα αυτού του αποτελέσματος συνυφαίνεται με τη στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση που διαπιστώθηκε μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της επίδρασης της απόστασης των αριθμών στο δεύτερο υποκεφάλαιο του παρόντος κεφαλαίου, αφού κατά την πειραματική προσέγγιση υπάρχει στατιστικώς σημαντική μείωση της επίδρασης, άρα αύξηση της μαθηματικής ικανότητας.

Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι η πειραματική παρέμβαση επέφερε σημαντική αύξηση κατά 51,31% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων, το οποίο αποτέλεσμα εκ νέου είναι ερμηνεύσιμο υπό το πρίσμα του ορισμού της ικανότητας της σύγκρισης διψήφιων αριθμών, η οποία ικανότητα αντανακλά την ικανότητα της νοητικής αναπαράστασης των πληθάριθμων και της συνακόλουθης ποσότητας που εκφράζουν, των σχέσεων μεταξύ τους, καθώς και τη γνώση της θεσιακής αξίας των συγκεκριμένων αριθμών.

Επίσης, παρατηρείται σημαντική μείωση κατά 20,05% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου και σημαντική μείωση κατά 29,59% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων, σημαίνοντας ότι στους μαθητές της πειραματικής ομάδας μειώθηκε το φαινόμενο της επίδρασης των απόστασης των αριθμών το οποίο συσχετίζεται αρνητικά με τη μαθηματική ικανότητα.

Τέλος, διαπιστώνεται ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 4,54% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση μεγέθους, και στατιστικά σημαντική αύξηση κατά

62,5% στη μέση τιμή της μεταβλητής Αντίστροφη Καταμέτρηση. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι εξίσου σημαντικό, καθώς αντανακλά τη δύναμη της σχηματοποιημένης αναπαράστασης των ποσοτήτων στην ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή της εκτίμησης της χωρικής θέσης των αριθμητικών αναπαραστάσεων, δηλαδή την ανάπτυξη της γραμμικότητας της συμβολικής διανοητικής γραμμής.

Μετά τον έλεγχο της επίδρασης της πειραματικής παρέμβασης στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, διενεργήθηκε έλεγχος επίδρασης της πειραματικής παρέμβασης στις μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών. Για την κανονικότητα των μεταβλητών (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακας 8., σελ. 452-457), στηριζόμενοι στα Sig. των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk test, καταλήγουμε ότι όλες οι μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών μετά παρέμβασης (Μ.Π) ακολουθούν την κανονική κατανομή, καθώς το p-value των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk test, είναι μεγαλύτερο του 5%.

Στον Πίνακα 4.8.5., παρουσιάζονται περιγραφικά χαρακτηριστικά των επτά μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών, όπως το εύρος (Range), οι ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), οι μέσες τιμές (Μ) και οι τυπικές αποκλίσεις (SD), της πειραματικής ομάδας Προ Παρέμβασης (Π.Π) και μετά παρέμβασης (Μ.Π). Βάσει αυτού, διαπιστώνουμε ότι οι μέσες τιμές των μεταβλητών Μνήμη Αριθμών, Μνήμη Λέξεων, Οπτικοχωρική Μνήμη, Ικανότητα Αναστολής αυξήθηκαν μετά την παρέμβαση ενώ των υπολοίπων μεταβλητών όπως ο χρόνος απόκρισης της αναστολής, ο χρόνος της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και ο χρόνος της γνωστικής εναλλαγής μειώθηκαν.

Πίνακας 4.8.5.

*Εύρος (Range), ελάχιστες (Min) και μέγιστες τιμές (Max), μέσες τιμές (Μ) και τυπικές* *αποκλίσεις (SD), στις μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών της πειραματικής ομάδας Προ Παρέμβασης (Π.Π) και μετά παρέμβασης (Μ.Π)*

| | Πειραματική ομάδα (N=5) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Range | Min. | Max. | Mean | Std, Deviation |
| Μνήμη Αριθμών Π.Π | 2,50 | ,00 | 2,50 | ,8500 | ,88349 |
| Μνήμη Λέξεων Π.Π | 2,00 | 1,00 | 3,00 | 2,2000 | ,91894 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη Π.Π | 2,00 | 1,00 | 3,00 | 1,8000 | ,58689 |
| Ικανότητα Αναστολής Π.Π | 28,00 | 4,00 | 32,00 | 15,3000 | 7,18099 |
| R.T Αναστολής Π.Π | 115.865,0 | 76.280,00 | 192.145,0 | 140.486,10 | 44979,35 |
| Προσοχή-Ταχύτητα Επεξ/σίας Π.Π | 136,00 | 127,00 | 263,00 | 187,8000 | 46,24524 |
| Γνωστική Εναλλαγή Π.Π | 164,00 | 398,00 | 562,00 | 480,8000 | 60,05516 |
| Μνήμη Αριθμών Μ.Π | 2,50 | ,00 | 2,50 | 1,4500 | ,89598 |
| Μνήμη Λέξεων Μ.Π | 1,00 | 2,00 | 3,00 | 2,5000 | ,52705 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη Μ.Π | 2,0 | 1,0 | 3,0 | 2,050 | ,7246 |
| Ικανότητα Αναστολής Μ.Π | 28,00 | 4,00 | 32,00 | 19,8000 | 8,67692 |
| R.T Αναστολής Μ.Π | 107617,0 | 76280,00 | 183897,0 | 109952,90 | 41131,10 |
| Προσοχή-Ταχύτητα Επεξ/σίας Μ.Π | 192,00 | 71,00 | 263,00 | 136,0000 | 71,83159 |
| Γνωστική Εναλλαγή Μ.Π | 288,00 | 274,00 | 562,00 | 399,6000 | 110,059 |

Για τη διαπίστωση του κατά πόσο αυτές οι αυξήσεις/μειώσεις στις μέσες τιμές των γνωστικών μεταβλητών της πειραματικής ομάδας είναι στατιστικά σημαντικές, διενεργήθηκε ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου t ελέγχου (Paired Samples t – test). Βάσει του συσχετισμένου t ελέγχου (Πίνακας 4.8.6.), η παρέμβαση επηρέασε στατιστικά σημαντικά τις μεταβλητές Ικανότητα Αναστολής ($p$ = 0,017 < 0,05), Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($p$ = 0,022 < 0,05) και Γνωστική Εναλλαγή ($p$ = 0,017 < 0,05), ενώ οριακά φαίνεται να έχει επίδραση και στη μεταβλητή Μνήμη Αριθμών ($p$ = 0,051).

Πίνακας 4.8.6.

*Paired Samples t-Test των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών της πειραματικής ομάδας*

| | | Διαφορές στις μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών της πειραματικής ομάδας | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | | | | |
| | | Mean | Std, Deviation | Std, Error Mean | Lower | Upper | t | dg | Sig, (2-tailed) |
| Pair 1 | Μνήμη Αριθμών Π.Π<br>Μνήμη Αριθμών Μ.Π | -,600 | ,84327 | ,26667 | -1,20324 | ,00324 | -2,250 | 9 | ,051 |
| Pair 2 | Μνήμη Λέξεων Π.Π<br>Μνήμη Λέξεων Μ.Π | -,300 | ,48305 | ,15275 | -,64555 | ,04555 | -1,964 | 9 | ,081 |
| Pair 3 | Οπτικοχωρική Μνήμη Π.Π<br>Οπτικοχωρική Μνήμη Μ.Π | -,250 | ,42492 | ,13437 | -,55397 | ,05397 | -1,861 | 9 | ,096 |
| Pair 4 | Ικανότητα Αναστολής Π.Π<br>Ικανότητα Αναστολής Μ.Π | -4,50 | 4,85913 | 1,53659 | -7,97601 | -1,02399 | -2,929 | 9 | ,017 |
| Pair 5 | RT Αναστολής Π.Π<br>RT Αναστολής Μ.Π | 30533,2 | 47862,7 | 15135,529 | -3705,74 | 64772,14 | 2,017 | 9 | ,074 |
| Pair 6 | Προσοχή Ταχύτητα Επεξ/σίας Π.Π<br>Προσοχή Ταχύτητα Επεξ/σίας Μ.Π | 51,800 | 59,41343 | 18,78818 | 9,29819 | 94,30181 | 2,757 | 9 | ,022 |
| Pair 7 | Γνωστική Εναλλαγή Π.Π<br>Γνωστική Εναλλαγή Μ.Π | 81,200 | 87,444 | 27,65253 | 18,64564 | 143,754 | 2,936 | 9 | ,017 |

Βασιζόμενοι στις μέσες τιμές των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών και στον έλεγχο συσχετισμένου t ελέγχου προ και μετά παρέμβασης, προκύπτει ότι η πειραματική παρέμβαση επέφερε οριακά στατιστικά σημαντική αύξηση κατά 41,3% στη μέση τιμή της μεταβλητής Μνήμη Αριθμών, ασήμαντη στατιστικά αύξηση κατά 12% στη μέση τιμή της μεταβλητής Μνήμη Λέξεων, ασήμαντη στατιστικά αύξηση κατά 12,2% στη μέση τιμή της μεταβλητής Οπτικοχωρική Μνήμη, στατιστικά σημαντική αύξηση κατά 22,72% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Αναστολής, ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 21,73% στη μέση τιμή της μεταβλητής R.T Αναστολής, σημαντική στατιστικά μείωση κατά 27,58% στη μέση τιμή της μεταβλητής

Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας και στατιστικά σημαντική μείωση κατά 26,89% στη μέση τιμή της μεταβλητής Γνωστική Εναλλαγή.

Συνεκτιμώντας όλα τα παραπάνω, η πειραματική παρέμβαση δείχνει συνολικά ότι ενισχύει σημαντικά το εγγενές σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης μέσω της ικανότητας subitizing, η οποία ικανότητα συνυφαίνεται με τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία, εκτινάσσει την ικανότητα συμβολοποίησης και επεξεργασίας των αριθμών, και επιδρά σημαντικά στα δομήματα των γνωστικών λειτουργιών, όπως στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών και στις επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, της προσοχής- ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και στην ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής.

### 4.9. Αποτελέσματα διερεύνησης των σχέσεων των διαγνωστικών εργαλείων της έρευνας

Αρχικά, για τον έλεγχο της συμβατότητας της κατανομής των μεταβλητών των διαγνωστικών εργαλείων της έρευνας με την κανονική, διενεργήθηκε έλεγχος των στατιστικών test Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-wilk σε κάθε μια από αυτές.

Βάσει του επιπέδου σημαντικότητας, το οποίο είναι μικρότερο του 5% για το σύνολο των μεταβλητών των διαγνωστικών εργαλείων, τόσο στο Kolmogorov-Smirnov όσο και στο Shapiro-Wilk test, (Βλ. Παράρτημα 20, Πίνακα 11., σελ. 452-457), η υπό έλεγχο κατανομή διαφέρει από την κανονική.

Πριν τη διενέργεια του συσχετιστικού ελέγχου, παρουσιάζονται με τη χρήση της περιγραφικής στατιστικής οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις της ηλικίας των μαθητών, των διαγνωστικών εργαλείων στις δύο ομάδες της έρευνας (μαθητές με δυσαριθμησία, τυπικοί μαθητές) και ο μη παραμετρικός έλεγχος Mann-Whitney U και το P-value, όπως προέκυψε από την επαγωγική στατιστική.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 12. (Βλ. Παράρτημα 20, σελ. 452-457) οι μαθητές των δύο ομάδων δεν εμφανίζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην ηλικία ($p$ = 0,227), στη μη λεκτική νοημοσύνη η οποία μετρήθηκε σε εκατοστημόρια ($p$ = 0,071), στην αποκωδικοποίηση ($p$ = 0,075), και στην αναγνωστική ευχέρεια ($p$ = 0,092). Αντίθετα διαφέρουν στατιστικά σημαντικά, όπως άλλωστε αναμενόταν στον υπολογισμό προσθέσεων – αφαιρέσεων ($p$ = 0,0001), στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων ($p$ = 0,0001) και στην αριθμητική ευχέρεια ($p$ = 0,0001), δηλαδή στις υποδοκιμασίες που συγκροτούσαν το τεστ μαθηματικής επίδοσης, και η επίδοση σε αυτό αποτελούσε κριτήριο συμπερίληψης σε μία από τις δύο ομάδες συμμετεχόντων.

Ο συσχετιστικός έλεγχος που πραγματοποιήθηκε μέσω του μη παραμετρικού συντελεστή Spearman's rho, στο σύνολο των συμμετεχόντων έδειξε (Βλ. Πίνακα 4.9.1.), ότι οι τρεις υποδοκιμασίες του αυτοσχέδιου τεστ μαθηματικής επίδοσης συσχετίζονται στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους και στατιστικά σημαντικά τόσο με τη μη λεκτική νοημοσύνη όσο και με την αποκωδικοποίηση και την αναγνωστική ευχέρεια.

Ειδικότερα, η υποδοκιμασία υπολογισμοί προσθέσεων – αφαιρέσεων εμφανίζει μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την υποδοκιμασία επίλυση αριθμητικών προβλημάτων ($r_s$ = 0,721) και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την υποδοκιμασία της αριθμητικής ευχέρειας ($r_s$ = 0,803). Ταυτόχρονα, εμφανίζει στατιστικά σημαντική θετική συσχέτιση με τη μη λεκτική νοημοσύνη ($r_s$ = 0,268), με την αποκωδικοποίηση λέξεων ($r_s$ = 0,265) και με την αναγνωστική ευχέρεια ($r_s$ = 0,230). Η υποδοκιμασία της επίλυσης των αριθμητικών προβλημάτων εμφανίζεται στατιστικά θετικά συσχετισμένη με τη μη λεκτική νοημοσύνη ($r_s$ = 0,270), με την αποκωδικοποίηση λέξεων ($r_s$ = 0,238) και την αναγνωστική ευχέρεια ($r_s$ = 0,228). Η υποδοκιμασία της αριθμητικής ευχέρειας εμφανίζεται στατιστικά θετικά συσχετισμένη με τη μη λεκτική νοημοσύνη ($r_s$ = 0,268), με την αποκωδικοποίηση λέξεων ($r_s$ = 0,292) και με την αναγνωστική ευχέρεια ($r_s$ = 0,203). Η υποδοκιμασία της αποκωδικοποίησης λέξεων εμφανίζεται στατιστικά θετικά συσχετισμένη με την υποδοκιμασία της αναγνωστικής ευχέρειας ($r_s$ = 0,722) και με τη μη λεκτική νοημοσύνη ($r_s$ = 0,243). Τέλος, η μόνη μη στατιστικά σημαντική συσχέτιση εμφανίζεται μεταξύ της μη λεκτικής νοημοσύνης και της αναγνωστικής ευχέρειας ($p$ > 0,05).

Πίνακας 4.9.1.

*Συντελεστές Συσχέτισης Spearman's rho μεταξύ των διαγνωστικών εργαλείων της έρευνας*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Μη λεκτική νοημοσύνη | _ | | | | | |
| 2. Υπολογισμοί προσθέσεων αφαιρέσεων | ,268** | _ | | | | |
| 3. Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων | ,270** | ,721** | _ | | | |
| 4. Αριθμητική ευχέρεια | ,268** | ,803** | ,635** | _ | | |
| 5. Αποκωδικοποίηση λέξεων | ,243** | ,265** | ,238** | ,292** | _ | |
| 6. Αναγνωστική ευχέρεια | ,132 | ,230* | ,228* | ,203* | ,722** | - |

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).
*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των διαγνωστικών εργαλείων της έρευνας πιστοποιούν τη συγχρονική εγκυρότητα των συγκεκριμένων εργαλείων και κατά συνέπεια του αυτοσχέδιου τεστ μαθηματικής ικανότητας με τις τρεις υποδοκιμασίες αυτού, καθότι όλοι οι συντελεστές συσχέτισης ήταν μεγαλύτεροι του 0,20 και στατιστικά σημαντικά διαφορετικοί από το μηδέν ($p$ < 0,05). Η συγκέντρωση στοιχείων εγκυρότητας από αυτές τις συσχετίσεις, με εργαλεία που είναι σταθμισμένα στον ελληνικό χώρο, παρέχουν υποστήριξη για την επικύρωση των τιμών του διαγνωστικού αυτοσχέδιου τεστ μαθηματικής ικανότητας για την ηλικία των 8-9 ετών.

# Κεφάλαιο 5$^{Ο}$ ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

*Το παρόν κεφάλαιο ολοκληρώνει την τρέχουσα μελέτη με τη σύνοψη των σημαντικών ευρημάτων, με τη διατύπωση ερμηνειών για τα αποτελέσματα, με την ανάδειξη των συμπερασμάτων αυτής και τις συστάσεις για μελλοντικές έρευνες.*

## 5.1. Σύντομη παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας

Γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των κυριότερων αποτελεσμάτων της έρευνας βάσει της τεκμηρίωσης των ερευνητικών ερωτημάτων μέσω της στατιστικής ανάλυσης που προηγήθηκε. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων.

### 5.1.1. Αποτελέσματα διερεύνησης της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης στους μαθητές με δυσαριθμησία

Ο συσχετιστικός έλεγχος για τη μέτρηση του βαθμού συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία με το εγγενές προσεγγιστικό σύστημα αριθμών (ANS), το οποίο προσμετράται με την ακρίβεια – οξύτητα (W) κατά τη διάκριση ποσοτήτων και με τον χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση (R.T W), και ο έλεγχος της συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας με το εγγενές αριθμητικό σύστημα της παράλληλης εξατομίκευσης, το οποίο προσμετράται με την ικανότητα της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (subitize) και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing), αποκαλύπτει, ότι η μαθηματική ικανότητα συσχετίζεται με τις τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές του μη συμβολικού αριθμητικού συστήματος.

Ειδικότερα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει με τη μεταβλητή W Οξύτητα ANS μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,334, η οποία κατανοείται στη βάση ό,τι όσο μικρότερο είναι το W τόσο αυξάνει η μαθηματική ικανότητα, καθώς μικρό W δείχνει μεγαλύτερη ακρίβεια κατά τη διάκριση ποσοτήτων. Αντίστοιχα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει ισχυρή συσχέτιση με τις μεταβλητές που αφορούν την ικανότητα της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων (subitize). Πιο συγκεκριμένα, με τη μεταβλητή Ικανότητα Subitizing υπάρχει ισχυρή θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,916, ενώ με τη μεταβλητή R.T. Subitizing υπάρχει ισχυρή αρνητική συσχέτιση, $r_s$ = - 0,707. Αυτά τα δύο αποτελέσματα καταδεικνύουν, ότι η μαθηματική ικανότητα έχει ανάλογη σχέση με την αύξηση της ικανότητας της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων και αντιστρόφως ανάλογη με τον χρόνο που μεσολαβεί για την εκτίμηση αυτής της μικρής ποσότητας.

Ο συγκριτικός έλεγχος από την άλλη, μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικών, παρουσιάζει μια στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο πληθυσμών, συνολικά για το πρώτο εγγενές μη συμβολικό γνωστικό αριθμητικό σύστημα (ANS), $p$ = 0,0001, με ποσοστιαία διαφορά μέσων τιμών 49,69%, η οποία αναδεικνύει με τη σειρά της ότι η ικανότητα των παιδιών να ανιχνεύουν διαφορές μεγέθους μεταξύ δύο ποσοτήτων χωρίς την εμπλοκή της απαρίθμησης, ανέρχεται στο ήμισυ περίπου της ικανότητας των τυπικών μαθητών, εκφράζοντας ένα σημαντικό έλλειμμα σε αυτό το εγγενές αριθμητικό σύστημα. Στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση διαπιστώνεται και ως προς το δεύτερο εγγενές μη συμβολικό σύστημα αριθμών, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), $p$ = 0,0001, καθώς οι μαθητές με δυσαριθμησία, εμφανίζουν σημαντικά μικρότερη ικανότητα ταχείας και ακριβούς εκτίμησης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων χωρίς προσφυγή στην καταμέτρηση (Ικανότητα Subitizing), με ποσοστιαία διαφορά 38,68% και σημαντικά μεγαλύτερους χρόνους απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T. Subitizing).

### 5.1.2. Αποτελέσματα διερεύνησης των ικανοτήτων στην πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων των μαθητών με δυσαριθμησία

Στη βάση των αποτελεσμάτων της στατιστικής επεξεργασίας, επισημαίνεται μια εδραιωμένη συναφειακή σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία και του συνόλου των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, και καταδεικνύεται μια στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο πληθυσμών στην ικανότητα της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας

Ειδικότερα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,558 με την ικανότητα απαρίθμησης, μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,498 με την Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων $r_s$ = 0,787 και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση $r_s$ = 0,546, με την Αντίστροφη Καταμέτρηση, καταδεικνύοντας ότι η μαθηματική ικανότητα αναπτύσσεται, καθώς βελτιώνονται οι συγκεκριμένες ικανότητες.

Από την άλλη, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,308, με τον χρόνο απόκρισης (R.T.) της απαρίθμησης, που σημαίνει, ότι η μαθηματική ικανότητα αυξάνει όσο μικρότερος είναι ο χρόνος της απαρίθμησης των μαθητών.

Αρνητικές συσχετίσεις επίσης, εμφανίζονται, αφενός με την επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, και μάλιστα μεγάλου βαθμού $r_s$ = - 0,424 και αφετέρου με την επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων, μετρίου βαθμού $r_s$ = - 0,290. Οι παραπάνω συσχετίσεις αντανακλούν αφενός την αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και του χρόνου απάντησης των μαθητών κατά τη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών που διαφέρουν κατά 1 αριθμητικό ψηφίο και κατά τη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών που διαφέρουν κατά 4-5 αριθμητικά ψηφία και αφετέρου την αύξηση της μαθηματικής ικανότητας, καθώς μικραίνει η επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών. Αξιοσημείωτες επίσης εμφανίζονται, η μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_{s} =$ - 0,469 με τη μεταβλητή που αφορά την επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και η μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,349 με τη μεταβλητή Επίδραση Απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων.

Ομοίως, η μαθηματική ικανότητα εμφανίζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση του Μεγέθους των αριθμών $r_s$ = - 0,493. Η αρνητική συσχέτιση, καταδεικνύει ότι η μαθηματική ικανότητα αναπτύσσεται όσο μικρότερη είναι η επίδραση αυτού του φαινομένου στους μαθητές, δηλαδή όσο οι μαθητές καταφέρνουν να μειώσουν τον χρόνο απόκρισης κατά τη σύγκριση μεγάλων αριθμών που διαφέρουν ένα αριθμητικό ψηφίο (π.χ. 8 έναντι 9), σε σχέση με το μικρό χρόνο απόκρισης που έχουν όταν συγκρίνουν μικρούς αριθμούς που επίσης διαφέρουν κατά ένα αριθμητικό ψηφίο (π.χ. 3 έναντι 4).

Ο συγκριτικός έλεγχος Mann-Whitney, μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία, καταδεικνύει ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά για όλες τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι $p$ = 0,0001 < 0,05. Αυτό σημαίνει ότι αναφορικά με τις υπό εξέταση μεταβλητές, ήτοι: ικανότητα απαρίθμησης, χρόνος απόκρισης αυτής της ικανότητας, ικανότητα σύγκρισης μονοψήφιων, επίδραση απόστασης 1 αριθμού στους μονοψήφιους, επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών στους μονοψήφιους, ικανότητα σύγκρισης διψήφιων, επίδραση απόστασης 1 ψηφίου στους διψήφιους, επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων στους διψήφιους, επίδραση μεγέθους των αριθμών και αντίστροφη καταμέτρηση, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο πληθυσμών, σύμφωνα με το Mann-Whitney test.

Από την επισκόπηση των αποτελεσμάτων, το μεγαλύτερο ποσοστό διαφοράς, το οποίο ανέρχεται στο 65%, των παιδιών με δυσαριθμησία σε σχέση με τους τυπικούς μαθητές, εντοπίζεται στην ικανότητα της αντίστροφης καταμέτρησης, αντικατοπτρίζοντας τη δυσκολία των συγκεκριμένων μαθητών στην αναπαράσταση μιας νοητικής ακριβούς αριθμογραμμής και κατ' επέκταση αδυναμία αξιόπιστης μέτρησης σε αυτή προς τα πίσω τοποθετώντας τους αριθμούς – στόχους κατάλληλα, ξεκινώντας από ένα σημείο αναφοράς. Ακολουθεί, η μεγάλη διαφορά στις μέσες τιμές της μεταβλητής R.T. Απαρίθμησης με ποσοστό διαφοράς 55,31%, υποδεικνύοντας, ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία υπερβαίνουν τους διπλάσιους χρόνους, στην προσπάθεια τους να καταμετρήσουν ποσότητες, σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους. Το μικρότερο ποσοστό διαφοράς 14%, μεταξύ των δύο ομάδων, εμφανίζεται στην ικανότητα απαρίθμησης, αναδεικνύοντας με τη σειρά του, τα υπαρκτά λάθη των μαθητών με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας σε μια απαρίθμηση δέκα στοιχείων σε αντίθεση με τους τυπικούς μαθητές που δεν εμφανίζουν κανένα λάθος. Για τη μεταβλητή επίδραση απόστασης 1 αριθμού, το ποσοστό διαφοράς είναι 40,8%, επιτρέποντας να διαπιστώσουμε, ότι στους μαθητές με δυσαριθμησία είναι διπλάσια σχεδόν η επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών που διαφέρουν κατά έναν αριθμό κατά τη σύγκριση μονοψήφιων. Ομοίως, στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών παρατηρείται μια σημαντική διαφορά στις μέσες τιμές με το ποσοστό να ανέρχεται στο 50,31%. Στην επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών παρατηρείται ποσοστό διαφοράς 24,9% και στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών παρατηρείται ποσοστό διαφοράς 37,10%. Αντίστοιχα, στη μεταβλητή επίδραση του μεγέθους των αριθμών το ποσοστό διαφοράς είναι 46,56%, αντανακλώντας το γεγονός της μεγαλύτερης του φαινομένου επίδρασης του μεγέθους των αριθμών στους μαθητές με την εν λόγω διαταραχή απ' ότι στους τυπικούς. Κατά τις συγκρίσεις μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών τα ποσοστά διαφοράς είναι 19,9% και 48,12%, αντίστοιχα, αναδεικνύοντας την απουσία ευελιξίας των συγκεκριμένων μαθητών στο χειρισμό και κατ’ επέκταση στη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών, και ιδιαίτερα, όταν το μέγεθος αυτών μεγαλώνει.

### 5.1.3. Αποτελέσματα διερεύνησης των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία

Ο συσχετιστικός έλεγχος του Spearman’s rho, αναδεικνύει μέτριες προς ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της πλειονότητας των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών.

Συγκεκριμένα, η μαθηματική ικανότητα σχετίζεται ισχυρά θετικά με τη Μνήμη Αριθμών $r_s$ = 0,916, και μετρίως θετικά με τη Μνήμη Λέξεων $r_s$ = 0,317. Λόγω του βαθμού συσχέτισης με τη μνήμη αριθμών, η μαθηματική ικανότητα στους μαθητές με δυσαριθμησία μεσολαβείται εξ’ ολοκλήρου από τη Μνήμη Αριθμών. Ωστόσο, οι ανωτέρω συσχετίσεις αντανακλούν το γεγονός ότι η μαθηματική ικανότητα σχετίζεται και με τις δύο διαστάσεις της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης. Ο βαθμός από την άλλη της συσχέτισης, ιδιαίτερα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, εισηγείται ότι η λεκτική εργαζόμενη μνήμη, συνιστά ένα σημαντικό παράγοντα της γνωστικής βάσης της μαθηματικής ικανότητας των συμμετεχόντων μαθητών.

Αξιοσημείωτο είναι, ότι η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει θετική συσχέτιση με την οπτικοχωρική μνήμη $r_s$ = 0,142, χωρίς ωστόσο αυτή να είναι στατιστικά σημαντική.

Αντίθετα, η μαθηματική ικανότητα παρουσιάζει μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την ικανότητα αναστολής του φυσικού μεγέθους των αριθμών $r_s$ = 0,452. Αξιοσημείωτη είναι η μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση $r_s$ = - 0,518, που παρουσιάζεται με τη μεταβλητή που αφορά την Ικανότητα της προσοχής - ταχύτητα επεξεργασίας. Η αρνητική συσχέτιση αιτιολογείται στη βάση του χρόνου απόκρισης με την οποία αποτιμάται η συγκεκριμένη ικανότητα στο Trail Making Test, όπου όσο πιο μικρός χρόνος επιτευχθεί στο τεστ τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα προσοχής και επεξεργασίας των πληροφοριών.

Αξιοσημείωτη αρνητική συσχέτιση μεγάλου βαθμού, παρουσιάζεται μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της ικανότητας της γνωστικής εναλλαγής, ($r_s$ = -0,885). Η αρνητική συσχέτιση κατανοείται στη βάση του ό,τι η βαθμολόγηση αυτής της ικανότητας μετριέται με όρους χρόνου απόκρισης στη συγκεκριμένη συνθήκη Trail Making Test, δηλαδή, καθώς η ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής αυξάνεται, μειώνονται οι χρόνοι απόκρισης και μειωμένοι χρόνοι απόκρισης δείχνουν βελτιωμένη μαθηματική ικανότητα.

Ο συγκριτικός έλεγχος Mann-Whitney, μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία, καταδεικνύει ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά σε συναφείς λειτουργίες της εργαζόμενης μνήμης και των επιτελικών λειτουργιών.

Η μεγαλύτερη διαφορά στην εργαζόμενη μνήμη παρατηρείται στο εύρος της μνήμης αριθμών, όπου η ποσοστιαία διαφορά των μέσων τιμών ανέρχεται στο 81,1%. Αντίστοιχα η μικρότερη διαφορά βλέπουμε να παρουσιάζεται στην Οπτικοχωρική Μνήμη, με ποσοστό διαφοράς των μέσων τιμών 37,09%. Για τη Μνήμη Λέξεων, το ποσοστό διαφοράς των μέσων τιμών ανέρχεται στο 60,6%. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα αναδεικνύουν το μικρό εύρος της μνήμης αριθμών, της μνήμης λέξεων και της οπτικοχωρικής μνήμης στους μαθητές με τη διαταραχή και κατ' επέκταση του μικρού εύρους συγκράτησης πληροφοριών.

Οι διαφορές στην επιτελική λειτουργία της αναστολής, ανέρχονται στο 30,46%, οι οποίες ωστόσο, δεν αποτυπώνονται μόνο στην επίδοση που έχουν οι μαθητές στο αριθμητικό έργο της αναστολής, αλλά και στον χρόνο απόκρισης αυτής, με ποσοστιαία διαφορά μέσων τιμών 60%. Οι μεγάλοι χρόνοι των μαθητών με δυσαριθμησία αντανακλούν τη χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας των ερεθισμάτων στο αριθμητικό έργο της αναστολής.

Στην επιτελική λειτουργία της Προσοχής – Ταχύτητα Επεξεργασίας, παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 65,43%. Αυτό το εύρημα τεκμηριώνει μια σημαντική έκπτωση τόσο στην προσοχή των συγκεκριμένων μαθητών όσο και στην ταχύτητα με την οποία επεξεργάζονται τα ερεθίσματα.

Ομοίως, στην επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 60,66%. Οι ασύμβατοι χρόνοι στην επιτελική λειτουργία της αναστολής αντανακλούν τις δυσκολίες των μαθητών στην ικανότητα αποτελεσματικής μετάβασης μεταξύ διαφορετικών έργων και διαδικασιών, δηλαδή στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο όποτε αυτό είναι απαραίτητο, για τη λειτουργική εκτέλεση μιας πράξης.

### 5.1.4. Συσχετίσεις της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων

Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι το πρώτο εγγενές σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, το σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών (ANS), συμμεταβάλλεται σημαντικά με δύο ικανότητες της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, αυτή της απαρίθμησης και της επίδρασης της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών. Ειδικότερα, το W Οξύτητα ANS, εμφανίζεται αρνητικά συσχετισμένο με τη μεταβλητή Ικανότητα Απαρίθμησης ($r_s$ = - 0,315) και θετικά συσχετισμένο με τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ($r_s$ = 0,378). Η αρνητική συσχέτιση με την Ικανότητα απαρίθμησης κατανοείται βάσει του δεδομένου, ότι όσο πιο μικρό είναι το W τόσο μεγαλύτερη είναι η οξύτητα, κατά συνέπεια η αρνητική συσχέτιση υποδηλώνει ότι όσο μικρότερο είναι το W (μεγάλη οξύτητα) τόσο αυξάνει η ικανότητα απαρίθμησης. Η θετική συσχέτιση με τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων, υποδηλώνει ότι όσο μεγαλώνει το W (μικρή οξύτητα) τόσο μεγαλώνει η επίδραση του φαινομένου της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων.

Το δεύτερο με τη σειρά μη συμβολικό εγγενές σύστημα, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), με μεταβλητές την ικανότητα της άμεσης αντίληψης της ποσότητας με μια ματιά και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας, είναι συσχετισμένο με το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα της άμεσης αντίληψης με μια ματιά (Subitizing) εμφανίζει μεγάλου βαθμού συσχέτιση με την Ικανότητα Απαρίθμησης ($r_s$ = 0,538), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης της απαρίθμησης (R.T. Απαρίθμησης) ($r_s$ = - 0,273), μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων ($r_s$ = 0,531), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ($r_s$ = - 0,329), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ($r_s$ = - 0,301), μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων ($r_s$ = 0,777), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων ($r_s$ = - 0,421), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση ($r_s$ = - 0,374) με την Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων, μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση του Μεγέθους των αριθμών ($r_s$ = - 0,584) και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την Αντίστροφη Καταμέτρηση ($r_s$ = 0,565).

Αναφορικά με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T. Subitizing), η υπόθεση ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης επιβεβαιώνεται για το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας με τις ισχυρότερες συσχετίσεις να είναι αρνητικές, αφού για τις μεταβλητές Ικανότητα Απαρίθμησης, Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων, Αντίστροφη Καταμέτρηση, οι συντελεστές συσχέτισης ισούνται με $r_s$ = - 0,540, $r_s$ = - 0,720 και $r_s$ = - 0,592, αντίστοιχα.

### 5.1.5. Συσχετίσεις της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της πρόσβασης συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων με τις γνωστικές λειτουργίες

Τα αποτελέσματα της διερεύνησης της ύπαρξης συσχέτισης της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία, αποκαλύπτουν σημαντικές ευρεθείσες σχέσεις.

Συγκεκριμένα, η μεταβλητή W του προσεγγιστικού συστήματος των αριθμών (ANS), δηλαδή η ακρίβεια στη διάκριση ποσοτήτων, παρουσιάζει στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση με τη Μνήμη Αριθμών, $r_s$ = - 0,279, υποδεικνύοντας, ότι όσο μικρότερη είναι η ικανότητα διάκρισης (μεγάλο W) τόσο μικρότερο είναι το εύρος της μνήμης αριθμών. Η ίδια μεταβλητή, παρουσιάζεται θετικά συσχετισμένη με την Ικανότητα Αναστολής $r_s$ = 0,266, και αρνητικά με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας Αναστολής $r_s$ = - 0,379. Επομένως, οι σημαντικότεροι παράγοντες που σχετίζονται με την ικανότητα διάκρισης ποσοτήτων είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και η επιτελική λειτουργία της αναστολής συνυφασμένη με τον χρόνο απόκρισης αυτής. Από την άλλη, ο χρόνος απόκρισης του W (R.T. W), δεν παρουσιάζει καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τις μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών.

Σχετικά με το δεύτερο σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), η μεταβλητή Ικανότητα Subitizing παρουσιάζει στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τις έξι από τις επτά μεταβλητές των γνωστικών λειτουργιών. Ειδικότερα, παρουσιάζει ισχυρή θετική συσχέτιση με τη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = 0,921), μετρίου βαθμού συσχέτιση με τη Μνήμη Λέξεων ($r_s$ = 0,337), μεγάλου βαθμού συσχέτιση με την Ικανότητα Αναστολής ($r_s$ = 0,492), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης της αναστολής (R.T. Αναστολής) ($r_s$ = - 0,257), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = - 0,532) και ισχυρή αρνητική συσχέτιση με την ικανότητα της Γνωστικής Εναλλαγής ($r_s$ = - 0,821). Αντίθετα, ο συντελεστής συσχέτισης της μεταβλητής Ικανότητα Subitizing με την Οπτικοχωρική Μνήμη ($r_s$ = 0,127) δεν είναι στατιστικά σημαντικός.

Επίσης, αποκαλύπτονται και άλλες σημαντικές συσχετίσεις του χρόνου απόκρισης της ικανότητας της άμεσης αντίληψης ποσοτήτων με μια ματιά (R.T. Subitizing), με μεταβλητές κλειδιά των γνωστικών λειτουργιών όπως, τη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,699), την Οπτικοχωρική Μνήμη ($r_s$ = - 0,348), την Ικανότητα Αναστολής ($r_s$ = - 0,369), την Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = 0,462) και τη Γνωστική Εναλλαγή ($r_s$ = 0,612).

Μεταξύ των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία, επίσης αποκαλύπτονται σημαντικές αλληλοσυσχετίσεις.

Συγκεκριμένα, η ικανότητα της απαρίθμησης σχετίζεται με τη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών ($r_s$ = 0,504), γεγονός που δηλώνει πως όσο μεγαλύτερη είναι η χωρητικότητα αυτής τόσο αναπτύσσεται η ικανότητα απαρίθμησης. Συνάμα, σχετίζεται θετικά με την ικανότητα της αναστολής του φυσικού μεγέθους των αριθμών ($r_s$ = 0,261), που σημαίνει ότι η απαρίθμηση αυξάνει όσο μεγαλώνει η αυτοματοποίηση του μεγέθους των αριθμών και αρνητικά με τη γνωστική εναλλαγή ($r_s$ = - 0,554), σημαίνοντας ότι η ικανότητα της απαρίθμησης αυξάνει όσο μικρότεροι είναι οι χρόνοι επίτευξης των μαθητών στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο.

Σχετικά με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας απαρίθμησης (R.T. Απαρίθμησης), παρουσιάζει μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,258), και μετρίου βαθμού θετική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης της αναστολής (R.T. Αναστολής) ($r_s$ = 0,263).

Για τη μεταβλητή Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων, διαπιστώνεται μεγάλου βαθμού συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = 0,453), μετρίου βαθμού συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Λέξεων ($r_s$ = 0,369), μετρίου βαθμού συσχέτιση με την Οπτικοχωρική Μνήμη ($r_s$ = 0,281), μεγάλου βαθμού συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Ικανότητας Αναστολής ($r_s$ = 0,689), μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την R.T. Αναστολής ($r_s$ = - 0,591), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Προσοχής - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = - 0,366) και μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγή ($r_s$ = - 0,379). Επομένως η ικανότητα σύγκρισης διψήφιων αριθμών συσχετίζεται σημαντικά με το σύνολο των γνωστικών λειτουργιών.

Από τα αποτελέσματα των συσχετίσεων, διαπιστώνουμε ότι οι σημαντικοί γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με το φαινόμενο της επίδρασης απόστασης 1 αριθμού, είναι η λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών ($r_s$ = - 0,421), η επιτελική λειτουργία της αναστολής ($r_s$ = - 0,299), η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας ($r_s$ = 0,268) και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής ($r_s$ = 0,359).

Για τη μεταβλητή Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων η υπόθεση ύπαρξης στατιστικά σημαντικής συσχέτισης, επιβεβαιώνεται για το σύνολο των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών με συσχετίσεις που κυμαίνονται από 0,254 έως – 0,730. Επομένως, οι σημαντικοί παράγοντες που σχετίζονται με αυτήν την ικανότητα είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων, η επιτελική λειτουργία της αναστολής και του χρόνου απόκρισης αυτής, η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής, με σημαντικότερους ωστόσο, τη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, της προσοχής – ταχύτητας επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής, λόγω του μεγάλου βαθμού συσχέτισης.

Επίσης, αποκαλύπτονται σημαντικές συσχετίσεις για τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, με τις μεταβλητές Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,336) και Γνωστική Εναλλαγή ($r_s$ = 0,304). Ομοίως, με τη μεταβλητή Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων παρουσιάστηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,391) και τη Γνωστική Εναλλαγή ($r_s$ = 0,285).

Η μεταβλητή Επίδραση Μεγέθους παρουσιάζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Αριθμών ($r_s$ = - 0,561), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με τη λεκτική εργαζόμενη Μνήμη Λέξεων ($r_s$ = - 0,345), μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Ικανότητας Αναστολής ($r_s$ = - 0,270), μετρίου βαθμού συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Προσοχής - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($r_s$ = 0,373) και μεγάλου βαθμού θετική συσχέτιση με την επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής ($r_s$ = 0,429).

Τέλος, οι αλληλοσυσχετίσεις της μεταβλητής Αντίστροφη Καταμέτρηση με τις γνωστικές λειτουργίες, αποκαλύπτουν ότι, οι σημαντικοί παράγοντες που σχετίζονται με αυτήν την ικανότητα είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών ($r_s$ = 0,606) και της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων ($r_s$ = 0,292), η οπτικοχωρική μνήμη ($r_s$ = 0,271), η επιτελική λειτουργία της αναστολής ($r_s$ = 0,444), και του χρόνου απόκρισης αυτής ($r_s$ = - 0,305), η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας ($r_s$ = - 0,557) και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής ($r_s$ = - 0,603).

**5.1.6. Διερεύνηση προβλεπτών της δυσαριθμησίας**

Σε ένα μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας η ισχύς της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, δηλαδή η ικανότητα του εγγενούς μη συμβολικού συστήματος αριθμών, είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς συνολικά το μοντέλο μπορεί να προβλέψει το 88,1% της μαθηματικής ικανότητας, με τη χρήση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών. Βάσει του μοντέλου του μη συμβολικού συστήματος αριθμών, ο ισχυρότερος προβλέπτης είναι η ικανότητα Subitizing που εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης (β = 0,325, $p$ = 0,0001). Ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T Subitizing) είναι ο δεύτερος ισχυρότερος προβλέπτης, $\Delta R^2$ = 0,014, β = - 0,008, $p$ = 0,015, και ακολουθεί ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (R.T W), $\Delta R^2$ = 0,013, β = - 0,017, $p$ = 0,017.

Η ισχύς της ικανότητας της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, σε ένα δεύτερο μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας είναι εξίσου ικανοποιητική, καθώς το μοντέλο μπορεί να προβλέψει το 63,2% της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, με τη χρήση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών $F$(4,127) = 48,992, $p$ = 0,0001 < 0,05. Βάσει αυτού, ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης είναι η ικανότητα σύγκρισης διψήφιων αριθμών που εξηγεί το 57,2% της διακύμανσης (β = 0,199, $p$ = 0,0001), με την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου να αποτελεί τον δεύτερο ισχυρότερο προβλέπτη, $\Delta R^2$ = 0,060, β = - 0,180, $p$ = 0,002.

Σε ένα τρίτο μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας με τη συνεισφορά των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών, η ισχύς του είναι πολύ σημαντική, καθώς συνολικά το μοντέλο των γνωστικών λειτουργιών ερμηνεύει το 82,7% της μαθηματικής ικανότητας, με τη χρήση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών $F$(6,309) = 136.305, $p$ = 0,0001 < 0,005. Βάσει του τρίτου μοντέλου, ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης είναι η εργαζόμενη μνήμη αριθμών που εξηγεί το 79,7% της διακύμανσης (β = 1,328, *p* = 0,0001), με την επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής να αποτελεί τον δεύτερο ισχυρότερο προβλέπτη, $\Delta R^2 = 0{,}030$, β = - 0,010, *p* = 0,002.

Σε ένα τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, η αμοιβαία συνεισφορά της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, προβλέπει σημαντικά τη διαταραχή, καθώς το μοντέλο επεξηγεί το 92,4% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία, $F(5{,}956) = 90{,}428$, $p = 0{,}0001 < 0{,}005$. Η ικανότητα Subitizing είναι ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης, καθώς εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας (β = 0,223, p = 0,0001). Ακολουθεί η ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής ως ο δεύτερος ισχυρότερο προβλέπτη αυτής, $\Delta R^2 = 0{,}034$, β = - 0,009, p = 0,002. Η επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών αποτελεί τον τρίτο κατά σειρά σημαντικότερο προβλέπτη, $\Delta R^2 = 0{,}019$, β = - 0,088, p = 0,004, ακολουθεί ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing ως ο τέταρτος καλύτερος προβλέπτης, $\Delta R^2 = 0{,}009$, β = - 0,006, p = 0,020 και τέλος, ο χρόνος απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W), αποτελεί τον πέμπτο καλύτερο προβλέπτη, $\Delta R^2 = 0{,}008$, β = - 0,256, p = 0,026.

### 5.1.7. Αποτελέσματα διερεύνησης επιρροής της πειραματικής παρέμβασης στην αλγοριθμική επίλυση

Τα πειραματικά δεδομένα της μελέτης καταδεικνύουν την ισχυρή επίδραση της πειραματικής παρέμβασης, μέσω της αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης και διαμεσολαβητικού παράγοντα ενεργοποίησης των αριθμητικών διαδικασιών, στην εκμάθηση του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, στους μαθητές με δυσαριθμησία εν αντιθέσει με την ομάδα ελέγχου που δέχτηκε τη συνήθη διδασκαλία.

Η πειραματική επιβεβαίωση προέρχεται από τη στατιστικά σημαντική διαφορά στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στις μεταβλητές προτέστ και μετατέστ επίδοσης της πειραματικής ομάδας, από τη μη στατιστικά σημαντική διαφορά στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης της ομάδας ελέγχου που παρακολούθησε τη συνήθη διδασκαλία, από τη στατιστικά σημαντική διαφορά που προκύπτει από το t-test ανεξάρτητων δειγμάτων κατά τη σύγκριση των δύο ομάδων, πειραματικής και ελέγχου στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης, από τον έλεγχο ANCOVA στη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης μεταξύ των δύο ομάδων και της στατιστικά σημαντικής διαφοράς στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων των Πρωτοκόλλων Διαγνωστικής και Αποδεικτικής Αξιολόγησης, τα οποία εμπεριέχουν το σύνολο της συμπτωματολογίας των λαθών των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των πέντε μαθητών με δυσαριθμησία πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, και μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης.

Βάσει των μέσων όρων προτέστ και μετατέστ αντίστοιχα της πειραματικής ομάδας υπάρχει βελτίωση στη μέση επίδοση (τάξεως του 75%), σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου. Στο t-test συσχετισμένων δειγμάτων (Paired Samples t-Test) στις μεταβλητές προτέστ και μετατέστ επίδοσης της πειραματικής ομάδας, η τιμή Sig. είναι μικρότερη του 5%, με βελτιωμένη μέση επίδοση 13,6 βαθμούς. Αντίθετα, στην ομάδα ελέγχου, τους 5 μαθητές με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση, ο έλεγχος του μετατέστ έδειξε μείωση στη μέση επίδοσή τους κατά 0,9 % που σημαίνει, όπως προδίδει και η τιμή του Sig. η οποία είναι μεγαλύτερη του 5%, ότι η συνήθης διδασκαλία δεν επέφερε στατιστικά σημαντική βελτίωση στους μαθητές με δυσαριθμησία. ότι η μη εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης και η εφαρμογή της συνήθους διδασκαλίας, δεν επέφερε βελτίωση στην επίδοση των μαθητών με δυσαριθμησία στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, καθώς δε διαπιστώνεται στατιστικά σημαντική διαφορά στο προτέστ και μετατέστ επίδοσης.

Από τον έλεγχο t-test ανεξάρτητων δειγμάτων, διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των δύο ομάδων στο προτέστ επίδοσης (*t (df)* = -1,114 (8), *p* = 0,298 > 0,005), καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μεγαλύτερο του 5%. Αυτό σημαίνει πως οι επιδόσεις των δύο ομάδων μαθητών με δυσαριθμησία δε διαφέρουν στο προτέστ επίδοσης που αποτελεί ένα αξιολογικό τεστ επίδοσης στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, η χορήγηση του οποίου έγινε πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης. Αντιθέτως, οι δύο ομάδες διαφέρουν στατιστικά σημαντικά στο μετατέστ επίδοσης (*t (df)* = 12,967 (5,142), *p* = 0,000 < 0,005), καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μικρότερο του 5%. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η πειραματική ομάδα είχε στατιστικά σημαντική βελτίωση των μαθησιακών επιτευγμάτων στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με τη μέση τιμή να είναι κατά 13,6 βαθμούς επαυξημένη, μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης μέσω της αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης και διαμεσολαβητικού παράγοντα ενεργοποίησης των αριθμητικών διαδικασιών, στην εκμάθηση του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου.

Τα αποτελέσματα ANCOVA της πειραματικής μελέτης επαληθεύουν εκ νέου τα προηγούμενα ευρήματα, καθώς η επίδραση της συμμεταβλητής προτέστ επίδοσης στην εξαρτημένη μεταβλητή μετατέστ επίδοσης δεν είναι στατιστικά σημαντική

$F(1{,}75) = 3{,}095$, $p = 0{,}122 > 0{,}05$. Αντίθετα, η κύρια επίδραση της πειραματικής παρέμβασης στο μετατέστ επίδοσης, μετά τον έλεγχο για την επίδραση της συμμεταβλητής, είναι στατιστικώς σημαντική, $F(14{,}198) = 201{,}592$ $p = 0{,}0001 < 0{,}05$. Δηλαδή, ελέγχοντας τις αρχικές διαφορές στις βαθμολογίες στο προτέστ επίδοσης μεταξύ των δύο ομάδων πριν την παρέμβαση, εντοπίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους μετά την παρέμβαση, με προσαρμοσμένη μέση επίδοση βελτιωμένη κατά 14,247 βαθμούς στην πειραματική ομάδα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχυροποιούνται από το τ-τεστ συσχετισμένου ελέγχου των δύο πρωτόκολλων αξιολόγησης. Η τιμή Sig.= 0,000 είναι μικρότερη του 5% κι επομένως, το Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης, που εμπερικλείει το σύνολο της συμπτωματολογίας των λαθών των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των πέντε μαθητών με δυσαριθμησία πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης, που εμπερικλείει το σύνολο των λαθών των μαθητών, μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης με μέση βελτιωμένη επίδοση κατά 14 βαθμούς.

Καταληκτικά, τα αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων αποκαλύπτουν την αιτιακή σχέση μεταξύ της πειραματικής παρέμβασης στην εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στους μαθητές με δυσαριθμησία.

### 5.1.8. Αποτελέσματα διερεύνησης επιρροής της πειραματικής παρέμβασης στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στην πρόσβαση συμβολικών αναπαραστάσεων και στις γνωστικές λειτουργίες

Οι συγκρίσεις των διαφορών των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης για την πειραματική ομάδα, βάσει του συσχετισμένου t ελέγχου, αποκαλύπτει ότι η πειραματική παρέμβαση επιφέρει στατιστικά σημαντική βελτίωση στην Ικανότητα Subitizing, καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μικρότερο του 5% ($p$ =

0,003) και οριακή στατιστικά σημαντική μείωση στον χρόνο απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing Μ.Π) ($p$ = 0,058). Βάσει των μέσων όρων, η βελτίωση στην ικανότητα Subitizing ανέρχεται στο 45,625% και η βελτίωση στη μείωση του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας ανέρχεται στο 40,5%.

Τα εν λόγω αποτελέσματα, αντανακλούν τη σημαντική συμβολή της παρέμβασης στην ικανότητα του subitizing, δηλαδή στην ικανότητα της γρήγορης και ακριβούς εκτίμησης του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων, που αριθμητικά κυμαίνονται από ένα έως και τέσσερα αντικείμενα, σε χρόνους που δεν επιτρέπουν την προσφυγή στην καταμέτρηση, η οποία ικανότητα συνυφαίνεται με τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία, όπως διαπιστώνεται στην παρούσα μελέτη.

Αναφορικά με τις μεταβλητές του προσεγγιστικού συστήματος, η πειραματική παρέμβαση επέφερε ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 16,06% στη μέση τιμή της μεταβλητής W Οξύτητα ANS, και ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 19,83%, στο χρόνο κατά τη διάκριση ποσοτήτων (R.T W).

Ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου t ελέγχου (Paired Samples t – test) στην πειραματική ομάδα, για τη διαπίστωση των στατιστικά σημαντικών διαφορών που επιφέρει η πειραματική παρέμβαση στις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, καταδεικνύει ότι, η πειραματική παρέμβαση έχει στατιστικά σημαντικό αντίκτυπο σε όλες τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, καθώς το επίπεδο σημαντικότητας είναι μικρότερο του 5%, πλην της μεταβλητής της επίδρασης του μεγέθους των αριθμών ($p = 0,283 > 0,05$).

Βάσει των μέσων, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει, στατιστικά σημαντική αύξηση κατά 22% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Απαρίθμησης και σημαντική μείωση κατά 30% στη μέση τιμή του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Απαρίθμησης).

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει ότι η αναπαράσταση των ποσοτήτων μέσω της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης, η κωδικοποίηση των συνόλων των αριθμητικών συμβόλων και των σχέσεων τους ως προσθετική δομή σε ξεχωριστές στήλες (ανάλυση σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) για την κατανόηση της θεσιακής αξίας της πληθικής σχέσης του κάθε αριθμητικού συμβόλου, κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, μειώνει αιτιακά σημαντικά τον χρόνο που χρειάζονται οι μαθητές για να καταμετρήσουν ποσότητες και αυξάνει την ικανότητα της σωστής απαρίθμησης.

Περαιτέρω, η σύγκριση μέσων τιμών, καταδεικνύει ότι η επιρροή της πειραματικής παρέμβασης της αναπαράστασης των ποσοτήτων επιφέρει σημαντική αύξηση κατά 31,87% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων και σημαντική αύξηση κατά 51,31% στη μέση τιμή της μεταβλητής Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων.

Ομοίως, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει στατιστικά σημαντική μείωση κατά 44,78% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 1 αριθμού, και σημαντική μείωση κατά 45,66% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών. Οι μαθητές μετά την πειραματική παρέμβαση απαντούσαν πιο γρήγορα κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών που διέφεραν κατά 1 αριθμό και επίσης πιο γρήγορα όταν σύγκριναν μονοψήφιους αριθμούς που είχαν απόσταση 4-5 αριθμών. Η σημαντικότητα αυτού του αποτελέσματος συνυφαίνεται με τη στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση που διαπιστώθηκε μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της επίδρασης της απόστασης των αριθμών στην παρούσα μελέτη, αφού κατά την πειραματική προσέγγιση υπάρχει στατιστικώς σημαντική μείωση της επίδρασης, άρα αύξηση της μαθηματικής ικανότητας.

Επίσης, παρατηρείται σημαντική μείωση κατά 20,05% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου και σημαντική μείωση κατά 29,59% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων, σημαίνοντας ότι στους μαθητές της πειραματικής ομάδας μειώθηκε το φαινόμενο της επίδρασης των απόστασης των αριθμών, το οποίο συσχετίζεται αρνητικά με τη μαθηματική ικανότητα.

Τέλος, διαπιστώνεται ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 4,54% στη μέση τιμή της μεταβλητής Επίδραση μεγέθους, και στατιστικά σημαντική αύξηση κατά 62,5% στη μέση τιμή της μεταβλητής Αντίστροφη Καταμέτρηση. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι εξίσου σημαντικό, καθώς αντανακλά τη δύναμη της σχηματοποιημένης αναπαράστασης των ποσοτήτων στην ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή της εκτίμησης της χωρικής θέσης των αριθμητικών αναπαραστάσεων, δηλαδή την ανάπτυξη της γραμμικότητας της συμβολικής διανοητικής γραμμής.

Σχετικά με τη διαπίστωση των αυξήσεων / μειώσεων στις μέσες τιμές των γνωστικών μεταβλητών της πειραματικής ομάδας, ο παραμετρικός έλεγχος συσχετισμένου t ελέγχου (Paired Samples t – test), καταδεικνύει ότι η παρέμβαση επηρέασε στατιστικά σημαντικά τις μεταβλητές Ικανότητα Αναστολής ($p = 0{,}017 < 0{,}05$), Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας ($p = 0{,}022 < 0{,}05$) και Γνωστική Εναλλαγή ($p = 0{,}017 < 0{,}05$), ενώ οριακά φαίνεται να έχει επίδραση και στη μεταβλητή Μνήμη Αριθμών ($p = 0{,}051$).

**5.2. Συζήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας**

Η παρούσα έρευνα ανήκει στις ερευνητικές προσπάθειες για τον προσδιορισμό αφενός αξιολογικών δεικτών και προβλεπτών της διαταραχής της δυσαριθμησίας, στην ηλικία των 8-9 ετών, μέσα από τη διερεύνηση των υποκείμενων ικανοτήτων στη μη συμβολική και στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία, αλλά και των γνωστικών μηχανισμών που υπονομεύουν την απόκτηση της μαθηματικής ικανότητας παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, υπό το πρίσμα της σύγκλισης τριών υφιστάμενων θεωριών, ήτοι, της θεωρίας του *ελλείμματος αναπαράστασης μεγεθών* (magnitude representation deficit) ή του *ελλείμματος αίσθησης αριθμού* (number sense deficit) (Butterworth, 2010), της θεωρίας του *ελλείμματος πρόσβασης* (access deficit hypothesis) (Noël, & Rousselle, 2011) και της θεωρίας *του μοντέλου των γνωστικών ελλειμμάτων* (Geary, 2004, 2011· Meyer, Salimpoor, Wu, Geary, & Menon, 2010) - η οποία σύγκλιση επιχειρείται λόγω της μεταβλητότητας και της ετερογένειας του φαινότυπου που παρουσιάζουν τα μαθησιακά προβλήματα στα μαθηματικά - και αφετέρου της συμβολής των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεων τους για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Πρόκειται για μια πρώτη προσέγγιση στον ελληνικό χώρο σκιαγράφησης των δεικτών της διαταραχής, αλλά και της συμβολής της πειραματικής παρέμβασης στην εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και της επάλληλης κινητοποίησης των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, τα αποτελέσματα της οποίας συμφωνούν με ευρήματα ερευνών που έχουν διεξαχθεί στον υπόλοιπο κόσμο και με τη διεθνή βιβλιογραφία.

Η συζήτηση των αποτελεσμάτων αυτής γίνεται με βάση το θεωρητικό υπόδειγμα της έρευνας και του προτεινόμενου ερευνητικού μοντέλου, την τεκμηρίωση των ερευνητικών ερωτημάτων μέσω της στατιστικής επεξεργασίας και τη συναφή βιβλιογραφία.

### 5.2.1. Ελλείμματα στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα (ANS και P.I) που εξηγούν τη δυσαριθμησία

Τα ευρήματα της παρούσας πραγμάτευσης φανερώνουν τον πολύπλοκο ιδιοσυστασιακό χαρακτήρα της διαταραχής της δυσαριθμησίας, καθώς δείχνουν, ότι τα δύο διακριτά εγγενή προλεκτικά συστήματα, το *σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών* (Approximate Number System, ANS) και το *σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης* (Parallel Individuation, PI), παίζουν ένα εξέχοντα ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με τη διαταραχή, με την αναγνώριση ότι το σύστημα της παράλληλης εξατομίκευσης μεσολαβεί εξολοκλήρου την ανάπτυξη αυτής, λόγω της παρατηρούμενης ισχυρής συναφειακής σχέσης. Επομένως, η απόσταση μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικά αναπτυσσόμενων συνομηλίκων μοιραία μεγαλώνει σε μια σειρά από μετρήσεις σ’ αυτά τα εγγενή αριθμητικά συστήματα.

Συγκεκριμένα, ο συσχετιστικός έλεγχος αποκαλύπτει ότι η μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία συνδέεται με μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με το εγγενές προσεγγιστικό σύστημα αριθμών (ANS), το οποίο μετριέται με το W που αναπαριστά την ακρίβεια των αναπαραστάσεων (Halberta, Mazzocco, & Feigenson, 2008), κατά τη διάκριση ποσοτήτων και με τον χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση. Ό,τι η μαθηματική ικανότητα συσχετίζεται αρνητικά με την οντογενετικά διεργασία της διάκρισης ποσοτήτων, σημαίνει ότι όσο μικρότερο είναι το W τόσο αυξάνει η μαθηματική ικανότητα, καθώς όσο μικρότερη είναι η τιμή του W τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα διάκρισης του ατόμου, ενώ αντίθετα μεγάλες τιμές στο W δείχνουν μειωμένη οξύτητα (Libertus, Feigenson, & Halberda, 2011). Στη μελέτη των Bonny και Lourenco’s (2013), επίσης η συσχέτιση της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (ANS) και της μαθηματικής ικανότητας, ήταν μεγαλύτερη για τα παιδιά με χαμηλές μαθηματικές επιδόσεις.

Ο έλεγχος συσχετίσεων της μαθηματικής ικανότητας με το εγγενές αριθμητικό σύστημα της παράλληλης εξατομίκευσης (P.I), το οποίο προσμετράται με την ικανότητα της γνώσης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων με μια ματιά (subitize) και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing), αποκαλύπτει ότι η μαθηματική ικανότητα συνδέεται ισχυρά θετικά με την ικανότητα Subitizing, και ισχυρά αρνητικά με τον χρόνο απόκρισης αυτής, καταδεικνύοντας ότι η μαθηματική ικανότητα έχει ανάλογη σχέση με την αύξηση της ικανότητας της άμεσης αντίληψης μιας μικρής ποσότητας αντικειμένων και αντιστρόφως ανάλογη με τον χρόνο που μεσολαβεί για την εκτίμηση αυτής της μικρής ποσότητας. Αυτό το εύρημα βρίσκεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Ashkenazi και Henik (2012) και των Ashkenazi, Mark-Zigdon και Henik (2013), στις οποίες η μαθηματική ικανότητα των παιδιών με δυσαριθμησία συσχετίζεται με το μικρό εύρος subitize που επιδεικνύουν τα συγκεκριμένα παιδιά. Η δε υψηλή συσχέτιση στην τρέχουσα μελέτη δείχνει ότι η μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία, μεσολαβείται σχεδόν εξολοκλήρου από την ανάπτυξη της ικανότητας Subitizing και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας.

Ο συγκριτικός έλεγχος από την άλλη, μεταξύ των μαθητών με δυσαριθμησία και των τυπικά αναπτυσσόμενων, παρουσιάζει μια στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο πληθυσμών, συνολικά για το πρώτο εγγενές μη συμβολικό γνωστικό αριθμητικό σύστημα (ANS), ($p$ = 0,0001). Οι μαθητές με δυσαριθμησία εμφανίζουν υψηλό W, το οποίο δείχνει τη μικρή ικανότητα διάκρισης μεγεθών και μεγάλους χρόνους κατά τη διάκριση (R.T. W), με τις ποσοστιαίες διαφορές μέσων τιμών, να αναδεικνύουν ότι η ικανότητα των παιδιών να ανιχνεύουν διαφορές μεγέθους μεταξύ δύο ποσοτήτων χωρίς την εμπλοκή της απαρίθμησης, ανέρχεται στο ήμισυ περίπου της ικανότητας των τυπικών μαθητών ενώ οι χρόνοι απόκρισης κατά τη διάκριση είναι διπλάσιοι από τους χρόνους των τυπικά αναπτυσσόμενων μαθητών, εκφράζοντας ένα σημαντικό έλλειμμα σε αυτό το εγγενές αριθμητικό σύστημα. Σε συμφωνία με τα ευρήματα του ελλειμματικού ANS στην παρούσα έρευνα, έρευνα των Piazza και των συνεργατών (2010) στην Ιταλία, έδειξε ότι τα δεκάχρονα παιδιά με δυσαριθμησία έχουν χαμηλή οξύτητα διάκρισης μεγεθών (τα παιδιά εμφάνιζαν υψηλό W) και αυτή η οξύτητα αντιστοιχεί σε πεντάχρονα παιδιά χωρίς δυσαριθμησία. Οι Mazzocco και συν. (2011) βρήκαν παρόμοια αποτελέσματα σε μαθητές μέσου όρου ηλικίας 14,8 έτη, και ταυτόχρονα ότι μόνο οι μαθητές των οποίων η μαθηματική επίδοση βρίσκεται κάτω από το 10ο εκατοστημόριο, έχουν μειωμένη οξύτητα του ANS, ενώ οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων, που οι επιδόσεις τους κυμαίνονται από το $11^{o}$ – $25^{o}$ εκατοστημόριο, έχουν άθικτη αίσθηση του αριθμού. Περαιτέρω ενίσχυση των ευρημάτων της παρούσας μελέτης προέρχεται από προηγούμενη έρευνα των Bugden και Ansari (2016) σε δεκάχρονα παιδιά με δυσαριθμησία, όπου κατέδειξε επίσης την πολύ χαμηλή οξύτητα εκτίμησης ποσοτήτων (υψηλό W) των εν λόγω μαθητών. Σύμφωνα με τους Rousselle και Noël (2011), τα παιδιά με δυσαριθμησία κάτω των δέκα ετών δεν παρουσιάζουν διαφορές στο προσεγγιστικό σύστημα των αριθμών. Σε αντίθεση με την υπόθεση της έλλειψης πρόσβασης, τα παρόντα δεδομένα αποκαλύπτουν ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία ηλικίας 8-9 ετών έχουν σημαντικά υψηλό W σε σχέση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους.

Οι μαθητές με δυσαριθμησία διαφοροποιούνται σημαντικά και ως προς το δεύτερο εγγενές μη συμβολικό σύστημα αριθμών, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), ($p$ = 0,0001), καθώς εμφανίζουν σημαντικά μικρότερη ικανότητα ταχείας και ακριβούς εκτίμησης μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων, χωρίς προσφυγή στην καταμέτρηση (Ικανότητα Subitizing), με ποσοστιαία διαφορά 38,68%, υποδηλώνοντας το μικρό εύρος Subitize των μαθητών και σημαντικά μεγαλύτερους χρόνους απόκρισης κατά την εκτίμηση (R.T. Subitizing). Για τη μεταβλητή R.T Subitizing, το ποσοστό διαφοράς μεταξύ των δύο πληθυσμών ανέρχεται στο 52,9%, αναδεικνύοντας ότι οι χρόνοι που κάνουν οι μαθητές να εκτιμήσουν άμεσα μια μικρή ποσότητα, 1 έως 4 κουκκίδων, χωρίς προσφυγή στην καταμέτρηση, υπερβαίνουν το διπλάσιο των χρόνων που χρειάζονται τυπικοί μαθητές γι' αυτήν την ικανότητα. Αυτό το εύρημα συγκλίνει με την υπόθεση που τέθηκε στην αρχή της έρευνας και συμφωνεί με ανάλογα αποτελέσματα ερευνητικών προσπαθειών στο χώρο του εξωτερικού, όπου τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν μικρότερο εύρος subitize σε σχέση με τα τυπικά παιδιά, και αυτό το εύρος περιορίζεται μόνο σε δύο αντικείμενα (Ashkenazi, & Henik, 2012· Ashkenazi, Mark-Zigdon, & Henik, 2013· Fischer, Gebhardt, & Hartnegg, 2008), και έρχεται σε διαφωνία με άλλα όπου, τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν υψηλούς χρόνους απάντησης, αλλά όχι διαφορές στη γνώση της ποσότητας με μια ματιά (Iuculano et al. 2008· Landerl, 2013· Olsson et al., 2016· Schleifer & Landerl, 2011). Δεδομένου ότι στην παρούσα έρευνα τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν σημαντικά μικρότερη ικανότητα ταχείας και ακριβούς διάκρισης 1-4 κουκκίδων και μεγαλύτερες αυξήσεις στο χρόνο απόκρισης των 1-4 κουκίδων, η πιθανότερη εξήγηση είναι μια ανώριμη ανάπτυξη της ικανότητας Subitizing, όπως προβλέπει η θεωρία του ελλείμματος αναπαράστασης (Mazza, & Caramazza, 2015).

Υπό το φως των παραπάνω ευρημάτων της τρέχουσας μελέτης, οι μαθητές με δυσαριθμησία παρουσιάζουν μια αναπαραστατική εξασθένιση αριθμητικών μη συμβολικών μεγεθών, η οποία συνιστά μια διακριτή διαφορά των προτύπων ενεργοποίησης των δύο εγγενών αριθμητικών συστημάτων σε σχέση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους.

**5.2.2. Ελλείμματα στην πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων**

Στη βάση των ευρημάτων του εμπειρικού ελέγχου των υποθέσεων του εστιασμένου αυτού θεωρητικού πλαισίου, επισημαίνεται αφενός μια εδραιωμένη συναφειακή σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία και του συνόλου των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και αφετέρου τα ελλείμματα των μαθητών στην πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων συνιστούν σημαντικές πηγές μαθηματικών μηχανισμών που σχετίζονται με την κακή αριθμητική απόδοση.

Αρχικά, οι σημαντικές θετικές συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και των ικανοτήτων στην απαρίθμηση, στη σύγκριση μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών και στην αντίστροφη καταμέτρηση, καταδεικνύουν τη σημαντική επιρροή της πρόσβασης στις συγκεκριμένες συμβολικές επεξεργασίες στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας, ενώ η αρνητική συσχέτιση με τον χρόνο απόκρισης (R.T.) της απαρίθμησης, υποδηλώνει ότι η μαθηματική ικανότητα αυξάνει όσο μικρότερος είναι ο χρόνος της απαρίθμησης των μαθητών.

Αξιοσημείωτη, στην παρούσα έρευνα, είναι η διαφοροποίηση των μαθητών με δυσαριθμησία σχετικά με τους χρόνους απόκρισης στην επίδραση απόστασης των αριθμών, δηλαδή στο γνωστό αποκαλούμενο «*φαινόμενο απόστασης*», το οποίο χαρακτηρίζεται από βραδύτερη αντίδραση και μεγαλύτερα σφάλματα σε δοκιμές όπου η αριθμητική απόσταση των αριθμών είναι κοντά (π.χ. 2 έναντι 3) σε σύγκριση με δοκιμές όπου η αριθμητική απόσταση είναι μεγάλη (π.χ. 2 έναντι 9) (Krajcsi et al., 2016· Lengyel, & Kojouharova, 2016· Moyer & Landauer, 1967). Συγκεκριμένα, η μέση τιμή στην επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων ισούται με 41.092,4833 ms. ενώ η μέση τιμή στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων είναι μικρότερη και ισούται με 29.618,00 ms. Οι μεγαλύτεροι χρόνοι των μαθητών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων που απέχουν 1 αριθμό αντανακλούν μια μεγαλύτερη δυσκολία στη διάκριση αυτών των αριθμών. Ανάλογες διαφορές διαπιστώνουμε στις μέσες τιμές της επίδρασης απόστασης 1 ψηφίου (44.100,75 msec.) και της επίδρασης απόστασης 4-5 ψηφίων (35.813,4333 msec.) κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών. Αυτό το εύρημα αναδεικνύει, ότι και στους μαθητές με δυσαριθμησία εμφανίζεται το φαινόμενο γνωστό ως *αποτέλεσμα αριθμητικής απόστασης* (Moyer & Landauer, 1967), καθώς ο ατομικός χρόνος αντίδρασης (RT) επηρεάζεται συστηματικά από τη γραμμική απόσταση των αριθμητικών μεγεθών που συγκρίνονται και συνάδει με ευρήματα ερευνών που έγιναν σε ενήλικες και σε παιδιά (βλ. Holloway, & Ansari, 2009· De Smedt, Noël, Gilmore, & Ansari, 2013· Castro, Reigosa-Crespo, & Gonzalez, 2012).

Μεγάλο ενδιαφέρον επομένως, στην παρούσα μελέτη, παρουσιάζουν οι αρνητικές συσχετίσεις της μαθηματικής ικανότητας με τις επιδράσεις της απόστασης των αριθμών, καθώς μέσω αυτών εξυφαίνεται, ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας συναρτάται με τη μικρότερη επίδραση αυτού του φαινομένου στη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών. Συγκεκριμένα, εμφανίζονται αρνητικές συσχετίσεις με την επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, και μάλιστα μεγάλου βαθμού, και με την επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών, μετρίου βαθμού, οι οποίες αντανακλούν την αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και του χρόνου απάντησης των μαθητών κατά τη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών που διαφέρουν κατά 1 αριθμητικό ψηφίο και κατά τη διάρκεια σύγκρισης μονοψήφιων αριθμών που διαφέρουν κατά 4-5 αριθμητικά ψηφία, δηλαδή, την αύξηση της μαθηματικής ικανότητας, καθώς μικραίνει η επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών. Ομοίως, εμφανίζονται, μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και μετρίου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων. Συγκλίνοντα αποτελέσματα της συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας σε μαθητές με δυσαριθμησία και της επίδρασης της απόστασης των αριθμών προέρχονται από προηγούμενη έρευνα των Olsson και συν. (2016) σε δεκάχρονους μαθητές με δυσαριθμησία, όπου διαπιστώθηκαν συσχετίσεις της μαθηματικής ικανότητας με την επίδραση απόστασης 1 αριθμού και 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων, όχι όμως και κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών.

Περαιτέρω, η μαθηματική ικανότητα εμφανίζει μεγάλου βαθμού αρνητική συσχέτιση με την Επίδραση του Μεγέθους των αριθμών, η οποία αναφέρεται στην παρατήρηση ότι είναι ευκολότερη η διάκριση μικρών ποσοτήτων έναντι μεγαλύτερων παρά την ίδια αριθμητική απόσταση μεταξύ τους (Krajcsi et al., 2016· Lengyel, & Kojouharova, 2016· Moyer, & Landauer, 1967· Sekuler, & Mierkiewicz, 1977). Η αρνητική συσχέτιση, καταδεικνύει ότι η μαθηματική ικανότητα αναπτύσσεται όσο μικρότερη είναι η επίδραση αυτού του φαινομένου στους μαθητές, δηλαδή όσο οι μαθητές καταφέρνουν να μειώσουν τον χρόνο απόκρισης κατά τη σύγκριση μεγάλων αριθμών που διαφέρουν ένα αριθμητικό ψηφίο (π.χ. 8 έναντι 9), σε σχέση με τον μικρό χρόνο απόκρισης που έχουν όταν συγκρίνουν μικρούς αριθμούς που επίσης διαφέρουν κατά ένα αριθμητικό ψηφίο (π.χ. 3 έναντι 4).

Καταληκτικά, από την επισκόπηση των αποτελεσμάτων των συσχετίσεων αποκαλύπτεται, ότι η χαμηλή μαθηματική επίδοση των μαθητών με δυσαριθμησία, βρίσκεται σε συνάφεια με τη χαμηλή ικανότητα απαρίθμησης, με την αδύναμη διαμόρφωση αναπαραστατικών σχέσεων κατά τη σύγκριση μονοψήφιων και ιδιαιτέρως κατά τη σύγκριση διψήφιων (λόγω του βαθμού συσχέτισης), με τις μεγαλύτερες επιδράσεις του φαινομένου απόστασης των αριθμών και του μεγέθους, καθώς και με την αδυναμία της αντίστροφης καταμέτρησης.

Επίσης, ενδιαφέρον σ’ αυτή τη μελέτη παρουσιάζει το γεγονός, ότι οι συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας εμφανίζονται ισχυρότερες απ' ό,τι μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και του εγγενούς μη συμβολικού προσεγγιστικού συστήματος αριθμών, όπως παρόμοια έδειξε μια μετα-ανάλυση από τους Schneider και συν. (2016). Δεν ισχύει όμως το ίδιο για το εγγενές μη συμβολικό σύστημα της παράλληλης εξατομίκευσης μέσω της ικανότητας Subitizing και του χρόνου απόκρισης, καθώς ο βαθμός συσχέτισης με τη μαθηματική ικανότητα είναι τόσο μεγάλος που επιτρέπει να σκεφτούμε και αιτιότητα. Παραταύτα, εκείνο που έχει σημασία είναι ότι αποκαλύπτεται μια σημαντική συναφειακή σχέση μεταξύ των ικανοτήτων στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία και στη μαθηματική ικανότητα στην ηλικία των 8-9 ετών. Τα παιδιά που αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στα μαθηματικά έχουν ξεκινήσει τη μαθησιακή τους πορεία με φτωχές συμβολικές αριθμητικές αναπαραστάσεις, ενώ τα προβλήματα αυτά φαίνεται να παραμένουν έντονα και στην ηλικία που εξετάζουμε, ιδιαίτερα σε σχέση με την ταχύτητα πρόσβασης κατά την επεξεργασία συμβολικών αριθμητικών μεγεθών.

Από την άλλη, η διερεύνηση των διαφορών μέσω του Mann-Whitney μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία, καταδεικνύει ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά για όλες τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας ($p$ = 0,0001). Αυτό το εύρημα έρχεται σε συμφωνία με την υπόθεση που τέθηκε στην αρχή της έρευνας καθώς και με άλλους ερευνητές στον διεθνή χώρο (Noël, & Rousselle, 2011· Olsson, Östergren, & Träff, 2016). Από την επισκόπηση των αποτελεσμάτων, το μεγαλύτερο ποσοστό διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων, το οποίο ανέρχεται στο 65%, εντοπίζεται στην ικανότητα της αντίστροφης καταμέτρησης, αντικατοπτρίζοντας τη δυσκολία των μαθητών με τη διαταραχή, στην αναπαράσταση μιας νοητικής ακριβούς αριθμογραμμής και κατ' επέκταση αδυναμία αξιόπιστης μέτρησης σε αυτή προς τα πίσω τοποθετώντας τους αριθμούς – στόχους κατάλληλα, ξεκινώντας από ένα σημείο αναφοράς. Ακολουθεί, η μεγάλη διαφορά στις μέσες τιμές της μεταβλητής R.T. Απαρίθμησης με ποσοστό διαφοράς 55,31%, υποδεικνύοντας ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία υπερβαίνουν τους διπλάσιους χρόνους στην προσπάθεια τους να καταμετρήσουν ποσότητες, σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους. Το μικρότερο ποσοστό διαφοράς 14%, μεταξύ των δύο ομάδων, εμφανίζεται στην ικανότητα απαρίθμησης, αναδεικνύοντας με τη σειρά του, τα υπαρκτά λάθη των μαθητών με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας σε μια απαρίθμηση δέκα στοιχείων σε αντίθεση με τους τυπικούς μαθητές που δεν εμφανίζουν κανένα λάθος. Κατά τις συγκρίσεις μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών τα ποσοστά διαφοράς είναι 19,9% και 48,12%, αντίστοιχα, αναδεικνύοντας την απουσία ευελιξίας των συγκεκριμένων μαθητών στο χειρισμό και κατ' επέκταση στη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών, και ιδιαίτερα, όταν το μέγεθος αυτών μεγαλώνει.

Σχετικά με τις μετρήσεις στο έργο που σχετίζεται με το γνωστό αποκαλούμενο «φαινόμενο απόστασης», και που σύμφωνα με τον Dehaene (2009) το φαινόμενο υποδηλώνει την εσωτερική αναπαράσταση αριθμητικών μεγεθών, αυτές αποκαλύπτουν σχεδόν διπλάσιες επιδράσεις του φαινομένου αυτού στους μαθητές με δυσαριθμησία. Τα ευρήματα αυτά της έρευνας συνάδουν με ευρήματα λιγοστών μελετών νευροαπεικόνισης που διερευνούν την ακεραιότητα των αριθμητικών αναπαραστάσεων σε παιδιά με δυσαριθμησία σε σύγκριση με τα τυπικά αναπτυσσόμενα παιδιά, μελετώντας τη λειτουργική ενεργοποίηση, κατά κύριο λόγο μέσω της εργασίας αριθμητικής διάκρισης, κι έχουν βρει διαφορές στο φαινόμενο της επίδρασης της απόστασης. Συγκεκριμένα, ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία δεν παρουσιάζουν τυπική επίδραση απόστασης κατά την ενεργοποίηση που σχετίζεται με τη διαδρομή στη δεξιά ενδοβρεγματική αύλακα (IPS), όπου η IPS είναι η οντογενετική νευρική προέλευση της επεξεργασίας μη συμβολικών αριθμητικών μεγεθών (Price, Holloway, Rasanen, Vesterinen, & Ansari, 2007), αλλά και σε διμερείς περιοχές της IPS (Kaufmann et al., 2009) σε παιδιά ηλικίας εννέα ετών με δυσαριθμησία. Η άτυπη ενεργοποίηση στη δεξιά IPS έχει επίσης εμπλακεί στην επεξεργασία συμβολικών αριθμητικών μεγεθών. Οι McCaskey, von Aster, Maurer, Martin, O'Gorman και Kucian (2018), διαπίστωσαν ότι τα παιδιά με δυσαριθμησία έδειξαν αδύναμη διαμόρφωση της σωστής ενδοβρεγματικής αύλακας IPS και του αριστερού ανώτερου βρεγματικού λοβού κατά τη διάρκεια μιας συμβολικής αριθμητικής εργασίας διακρίσεων (π.χ., διάκριση αραβικών αριθμών, όπως 3 και 5).

Ωστόσο, οι μαθητές με δυσαριθμησία δε διαφοροποιούνται μόνο στο φαινόμενο της απόστασης, αλλά και στο φαινόμενο του μεγέθους των αριθμών σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους, με ποσοστό διαφοράς μέσων τιμών 46,56%, αντανακλώντας με τη σειρά του της μεγαλύτερης του φαινομένου επίδρασης του μεγέθους των αριθμών στους μαθητές με την εν λόγω διαταραχή.

Συνολικά, τα ανωτέρω ευρήματα υποδηλώνουν ότι οι χαμηλές επιδόσεις στις συμβολικές αριθμητικές αναπαραστάσεις ή η αδυναμία πρόσβασης σε τέτοιες αναπαραστάσεις από αριθμητικά σύμβολα, οι οποίες εντοπίζονται στους υψηλούς χρόνους που χρειάζονται οι μαθητές στην απαρίθμηση, στη σύγκριση των μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών, στις μεγαλύτερες επιδράσεις των φαινομένων της απόστασης και του μεγέθους των αριθμών, στα απαριθμητικά λάθη και με την αναγνώριση ότι η αντίστροφη καταμέτρηση εμφανίζει το υψηλότερο ποσοστό διαφοράς, συνιστούν σημαντικές πηγές μαθηματικών μηχανισμών που σχετίζονται με την κακή αριθμητική απόδοση κι επομένως αποτελούν σημαντικούς δείκτες διαφοροποίησης των δύο ομάδων μαθητών.

**5.2.3. Ελλείμματα στους γνωστικούς μηχανισμούς**

Η προκύπτουσα ερευνητική εργασία ενημερώνει την έρευνα με ευρήματα που παρέχουν υποστήριξη του μοντέλου των γνωστικών ελλειμμάτων στους μαθητές με δυσαριθμησία και εποικοδομούν στον καμβά των υπαρχουσών ευρημάτων της βιβλιογραφίας.

Αρχικά, υποστηρικτικά στοιχεία προκύπτουν από τον συσχετιστικό έλεγχο του Spearman's rho, ο οποίος αναδεικνύει μέτριες προς ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της πλειονότητας των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών.

Ειδικότερα, η μαθηματική ικανότητα σχετίζεται ισχυρά θετικά με την εργαζόμενη λεκτική μνήμη αριθμών, και μετρίως θετικά με την εργαζόμενη λεκτική μνήμη λέξεων. Λόγω του βαθμού συσχέτισης με τη μνήμη αριθμών, η μαθηματική ικανότητα στους μαθητές με δυσαριθμησία μεσολαβείται εξ' ολοκλήρου από τη μνήμη αριθμών. Παραταύτα, οι ανωτέρω συσχετίσεις αντανακλούν το γεγονός ότι η μαθηματική ικανότητα σχετίζεται και με τις δύο διαστάσεις της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης. Ο βαθμός από την άλλη της συσχέτισης, ιδιαίτερα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, εισηγείται ότι η λεκτική εργαζόμενη μνήμη, συνιστά ένα σημαντικό παράγοντα της γνωστικής βάσης της μαθηματικής ικανότητας των συμμετεχόντων μαθητών. Η εύρεση αυτών των σχέσεων έχει αναφερθεί και από άλλες σχετικές έρευνες (Peng, Namkung, Barnes, & Sun, 2016).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η έλλειψη ευρήματος στατιστικά σημαντικής συσχέτισης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία με την οπτικοχωρική μνήμη, εν αντιθέσει με προηγούμενες έρευνες (Ashkenazi et al., 2013· Szűcs, 2016)  Μια πιθανή εξήγηση μπορεί να συνδέεται με το δείγμα του πληθυσμού, καθώς κάποιοι μαθητές από αυτό εμφάνιζαν τυπικές επιδόσεις στην οπτικοχωρική μνήμη, αποκαλύπτοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τις ατομικές διαφορές που ενυπάρχουν στους μαθητές με τη διαταραχή. Παραταύτα, τα ευρήματα της έρευνας συγκλίνουν με ευρήματα πρόσφατης μελέτης από τους Allen, Higgins και Adams (2019), βάσει της οποίας η οπτικοχωρική μνήμη και τα μαθηματικά που αξιολογούνται δεν έχουν σημαντική σχέση σε μαθητές σχολικής ηλικίας.

Από την άλλη βλέπουμε ότι η μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία έχει πραγματική σχέση με τις επιτελικές λειτουργίες της αναστολής του φυσικού μεγέθους των αριθμών, της προσοχής - ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και της γνωστικής εναλλαγής, δεδομένης της υψηλής ή πολύ υψηλής συνάφειας με αυτά τα επιτελικά δομήματα και κατά συνέπεια μπορεί να βοηθήσει να εξηγηθούν τουλάχιστον ατομικές διαφορές στη μαθηματική ικανότητα. Η επίλυση μιας αλγοριθμικής πράξης ή ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος, όπως φάνηκε και στη θεωρητική προσέγγιση του θέματος, είναι μια σύνθετη και απαιτητική διαδικασία η οποία απαιτεί επαρκή λειτουργία της μνήμης εργασίας, καθώς και επαρκές επίπεδο επιτελικών λειτουργιών, όπως είναι η αποφυγή της διάσπασης της προσοχής καθόσον επιλύω μια πράξη ή ένα πρόβλημα, η συνεχής παρακολούθηση των όσων επιλύω και γράφω και η ευελιξία της μετατόπισης από τα φωνολογικά ισοδύναμα των λέξεων του προβλήματος σε αριθμητικά σύμβολα, η οποία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον προσδιορισμό των ενεργειών που απαιτούνται για να λυθεί το πρόβλημα (Bull, & Lee, 2014).

Η εστίαση στις διαφορές στις γνωστικές επεξεργασίες μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία, αποκαλύπτει ότι η εργαζόμενη μνήμη και οι επιτελικές λειτουργίες εμπλέκονται ως βασικοί μηχανισμοί που υπογραμμίζουν τις διαφορές στη μαθηματική γνώση των παιδιών με τη διαταραχή.

Η μεγαλύτερη διαφορά στην εργαζόμενη μνήμη μεταξύ των δύο ομάδων, παρατηρείται στο εύρος της μνήμης αριθμών, όπου η ποσοστιαία διαφορά των μέσων τιμών ανέρχεται στο 81,1%. Οι μαθητές με δυσαριθμησία αδυνατούν να έχουν μια ταχεία αποθήκευση των πληροφοριών για τα αποτελέσματα των πρώτων επεξεργασιών στη βραχύχρονη μνήμη καθώς μετακινούνται προς τις επόμενες επεξεργασίες. Συγκεκριμένα το εύρος της μνήμης αριθμών κυμαίνεται μεταξύ 2 έως 3 αριθμών με την ανάκληση αυτών και με την αντίστροφη σειρά σε αντίθεση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους που το εύρος της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών είναι 4 έως 6 αριθμούς.

Αντίστοιχα, η μικρότερη διαφορά βλέπουμε να παρουσιάζεται στην οπτικο-χωρική μνήμη, με ποσοστό διαφοράς των μέσων τιμών 37,09%, ενώ για τη μνήμη λέξεων, το ποσοστό διαφοράς των μέσων τιμών ανέρχεται στο 60,6%.

Τα συγκεκριμένα ευρήματα αναδεικνύουν το μικρό εύρος της μνήμης αριθμών, της μνήμης λέξεων και της οπτικοχωρικής μνήμης στους μαθητές με τη διαταραχή και κατ' επέκταση του μικρού εύρους συγκράτησης πληροφοριών, και ευθυγραμμίζονται με αποτελέσματα ερευνών της διεθνούς βιβλιογραφίας σύμφωνα με τα οποία, η μνήμη εργασίας, έχει βρεθεί να προβλέπει ατομικές διαφορές στα αριθμητικά επιτεύγματα τόσο σε τυπικά αναπτυσσόμενους μαθητές (Ashkenazi, Rosenberg-Lee, Metcalfe, Swigart & Menon, 2013· Nath, & Szücs, 2014· Sowinski, LeFevre, Skwarchuk, Kamawar, Bisanz, Smith-Chant, 2015), όσο και σε μαθητές με δυσαριθμησία (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012). Ωστόσο, τα ευρήματα της τρέχουσας έρευνας έρχονται σε αντίθεση με αποτελέσματα έρευνας των Szücs, Devine, Soltesz, Nobes και Gabriel (2013α) και των Mammarella, Hill, Devine, Caviola και Szűcs (2015), σύμφωνα με τα οποία, τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν ελλείμματα μόνο στην οπτικο-χωρική μνήμη εργασίας σε σύγκριση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους μαθητές, αλλά όχι στη λεκτική μνήμη εργασίας ή στη λεκτική βραχυπρόθεσμη μνήμη, καθώς και με αποτελέσματα έρευνας των Peng, Namkung, Barnes και Sun (2016), σύμφωνα με οποία, τα παιδιά με δυσαριθμησία εμφανίζουν προβλήματα με τη λεκτική μνήμη εργασίας αριθμών, αλλά όχι με τη λεκτική μνήμη εργασίας ανάκλησης λέξεων.

Στην τρέχουσα μελέτη, τα παιδιά με δυσαριθμησία επιδεικνύουν σημαντικά ελλείμματα στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών, στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη λέξεων αλλά και στην οπτικοχωρική μνήμη εργασίας Αυτά τα ευρήματα παρέχουν ενδείξεις ότι οι συνιστώσες της εργαζόμενης μνήμης όπως η λεκτική μνήμη αριθμών, η λεκτική μνήμη λέξεων και η οπτικοχωρική μνήμη, παρέχουν χώρους εργασίας συγκράτησης και χειρισμού των αναπαραστάσεων αριθμητικού μεγέθους και κατά συνέπεια ένα μειωμένο σύστημα εργαζόμενης μνήμης έχει αρνητικό αντίκτυπο στην ανάπτυξη αναπαραστάσεων αριθμητικού μεγέθους και στη βασική αριθμητική.

Ένα σημαντικό ζήτημα στον τομέα των γνωστικών επεξεργασιών της παρούσας έρευνας είναι οι μεγάλες διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών στις επιτελικές λειτουργίες. Συγκεκριμένα, η ποσοστιαία διαφορά των μέσων τιμών στην επιτελική λειτουργία της αναστολής, ανέρχεται στο 30,46%. Οι μαθητές με τη διαταραχή, εμφανίζουν λάθη στο αριθμητικό έργο αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, όπου πρέπει να διακρίνουν τον μεγαλύτερο ποσοτικά μεταξύ δύο αριθμών που διαφέρουν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το **2**), μέσω της σιωπηρής επεξεργασίας των αριθμητικών μεγεθών και της νοερής αναπαράστασής τους, σε αντίθεση με τους τυπικούς συνομήλικους που δεν εμφανίζουν λάθη στο συγκεκριμένο έργο. Η παρουσία λαθών στην ασυμφωνία του (αριθμητικού) μεγέθους των αριθμών κατά τη σύγκριση (ο αριθμός που είναι φυσικά - αντιληπτικά μικρότερος είναι αριθμητικά μεγαλύτερος, π.χ. **2**-6), υποδηλώνει ότι η άσχετη πληροφορία μεγέθους του αριθμού δεν έχει υποστεί αυτόματη επεξεργασία στους μαθητές με τη διαταραχή, εν αντιθέσει με τους τυπικά αναπτυσσόμενους μαθητές.

Από την άλλη, η μη αυτόματη επεξεργασία των μεγεθών στο συγκεκριμένο έργο επηρεάζει τον RT (τον χρόνο απόκρισης) που οι μαθητές κάνουν σε οποιαδήποτε σύγκριση στην οποία υπάρχει ασυμφωνία μεγέθους, με ποσοστιαία διαφορά στους χρόνους 60% σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους.

Στην επιτελική λειτουργία της Προσοχής – Ταχύτητα Επεξεργασίας, παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 65,43%. Αυτό το εύρημα τεκμηριώνει μια σημαντική έκπτωση τόσο στην προσοχή των συγκεκριμένων μαθητών όσο και στην ταχύτητα με την οποία επεξεργάζονται τα ερεθίσματα.

Ομοίως, στην επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής που εξετάστηκε με το trail making test, παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 60,66%. Οι μαθητές με δυσαριθμησία δυσκολεύονται να εναλλάσσονται μεταξύ γραμμάτων και αριθμών ενώ οι χρόνοι ολοκλήρωσης ξεπερνούν κατά πολύ τους αποδεκτούς χρόνους ολοκλήρωσης του τεστ (Bowie, & Harvey, 2006). Οι ασύμβατοι χρόνοι στην επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής αντανακλούν τις δυσκολίες των μαθητών στην ικανότητα αποτελεσματικής μετάβασης μεταξύ διαφορετικών έργων και διαδικασιών, δηλαδή στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο όποτε αυτό είναι απαραίτητο, για τη λειτουργική εκτέλεση μιας πράξης (Miyake et al., 2000). Αυτό το εύρημα έρχεται σε συμφωνία με την υπόθεση που τέθηκε στην αρχή της έρευνας, καθώς και με άλλους ερευνητές (D'Amico, & Passolungi, 2009· Szücs et al., 2013a· Szücs et al., 2014· van der Sluis, de Jong, & van der Leij, 2004).

Καταληκτικά, από την επισκόπηση των ευρημάτων, η ευπάθεια στις μαθηματικές δυσκολίες των μαθητών διαμεσολαβείται από ελλείμματα σε δομήματα των γνωστικών λειτουργιών, εργαζόμενη μνήμη κι επιτελικές λειτουργίες, κι αυτά τα υποκείμενα ελλείμματα αποτελούν σημαντικά διαφοροποιητικά, αξιολογικά στοιχεία της διάκρισης των μαθητών με τη διαταραχή από τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους.

### 5.2.4. Ο αλληλεξαρτησιακός χαρακτήρας του μη συμβολικού αριθμητικού συ-

**στήματος και των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων**

Τα ευρήματα της παρούσας πραγμάτευσης αποκαλύπτουν τον αλληλεξαρτησιακό χαρακτήρα των εγγενών μη συμβολικών αριθμητικών συστημάτων και της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας στους μαθητές με δυσαριθμησία.

Ειδικότερα, καταδεικνύουν ότι το πρώτο εγγενές σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, το σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών (ANS), συμμεταβάλλεται σημαντικά με δύο ικανότητες της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, αυτή της απαρίθμησης και αυτή της επίδρασης της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών. Το συγκεκριμένο εύρημα αντανακλά αφενός το γεγονός ότι η ακρίβεια στη διάκριση μεγεθών W και η ικανότητα απαρίθμησης και η επίδραση απόστασης δεν είναι ανεξάρτητες ικανότητες, αλλά αλληλοσυσχετίζονται και αφετέρου ότι οι ακριβέστερες αναπαραστάσεις στη διάκριση μεγεθών οδηγούν σε καλύτερες απαριθμητικές ικανότητες και ταυτόχρονα μειωμένη επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών. Παρά το γεγονός ότι αυτά τα ευρήματα δεν εγκαθιδρύουν αιτιακή σχέση ανάμεσα στο προσεγγιστικό σύστημα αριθμών και τις δύο συμβολικές ικανότητες, είναι σε συμφωνία με την υπόθεση ελαττωματικού προλεκτικού ANS και PI, καθώς οι επιδράσεις μεγέθους και απόστασης θεωρούνται αποτέλεσμα των όλο και πιο ασαφών αναπαραστάσεων του ANS, ως αποτέλεσμα της (λογαριθμικής) συμπίεσης ή της μεγαλύτερης μεταβλητότητας για την αναπαράσταση μεγαλύτερου αριθμητικού μεγέθους (Dehaene, 2011· Desoete et al. 2009· Feigenson et al. 2004), κι επομένως ενισχύεται η πορεία της σχέσης ότι οι συγκεκριμένες συμβολικές ικανότητες εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το εγγενές προσεγγιστικό σύστημα αριθμών.

Το δεύτερο με τη σειρά μη συμβολικό εγγενές σύστημα, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), με μεταβλητές την ικανότητα της άμεσης αντίληψης της ποσότητας με μια ματιά και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας, είναι συσχετισμένο με το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές με μη αυτόματη επεξεργασία μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων χωρίς την προσφυγή στην καταμέτρηση (Subitizing), έχουν μειωμένες απαριθμητικές ικανότητες, έχουν αυξημένο χρόνο απόκρισης κατά την απαρίθμηση (R.T. Απαρίθμησης), έχουν χαμηλές επιδόσεις κατά τη διάρκεια σύγκρισης τόσο μονοψήφιων όσο και διψήφιων αριθμών, έχουν αυξημένη επίδραση των φαινομένων της απόστασης και του μεγέθους των αριθμών κι έχουν υψηλότερες βαθμολογίες σφάλματος στην αντίστροφη καταμέτρηση. Ομοίως, ο ατομικός χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T. Subitizing), συνδέεται ισχυρά αρνητικά με το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, γεγονός που υποδηλώνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος αντίδρασης τόσο μειώνεται η ικανότητα των μαθητών να διαχειρίζονται απαριθμητικές ικανότητες, ικανότητες σύγκρισης μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών και ικανότητες αντίστροφης καταμέτρησης. Συνακόλουθα, οι μεγαλύτεροι χρόνοι απόκρισης στη γνώση της ποσότητας με μια ματιά οδηγούν σε αυξημένη επίδραση απόστασης και μεγέθους των αριθμών.

Οι ισχυρές συνάφειες μεταξύ του συστήματος παράλληλης εξατομίκευσης και της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσες, γιατί τονίζουν τη σημασία της πρώιμης ανάπτυξης της αυτόματης επεξεργασίας μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων χωρίς την προσφυγή στην καταμέτρηση (Subitizing) στην ανάπτυξη της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας.

Βάσει της θεωρίας της ελλειμματικής αναπαράστασης μεγεθών, μια πιθανή εξήγηση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας τόσο για το εγγενές προσεγγιστικό σύστημα των αριθμών όσο και για το σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης και της αλληλεξαρτησιακής τους σχέσης με το συμβολικό σύστημα αριθμών μπορεί να είναι ότι τα υποκείμενα ελλείμματα στο ANS και στο PI, έχουν προκαλέσει σοβαρές βλάβες στο συμβολικό σύστημα αριθμών, καθώς τα δύο εγγενή συστήματα θεωρείται ότι εντάσσονται στην ανάπτυξη (Dehaene, 2011· Gelman & Butterworth, 2005, Piazza et al. 2010).

### 5.2.5. Η σύνδεση των γνωστικών λειτουργιών με το μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα και την πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων

Τα τρέχοντα αποτελέσματα της μελέτης προσθέτουν στην έρευνα σημαντικές ευρεθείσες σχέσεις μεταξύ της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία.

Ειδικότερα, η μεταβλητή W του προσεγγιστικού συστήματος των αριθμών (ANS), δηλαδή η ακρίβεια στη διάκριση ποσοτήτων, συνδέεται αρνητικά ισχυρά με την εργαζόμενη λεκτική μνήμη αριθμών, υποδεικνύοντας, ότι όσο μικρότερη είναι η ικανότητα διάκρισης (μεγάλο W) τόσο μικρότερο είναι το εύρος της μνήμης αριθμών. Η ίδια μεταβλητή, παρουσιάζεται θετικά συσχετισμένη με την ικανότητα αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, υποδηλώνοντας ότι όσο μεγαλώνει η ικανότητα στη διάκριση ποσοτήτων τόσο αυξάνει η ικανότητα αναστολής της άσχετης πληροφορία μεγέθους του αριθμού, και αρνητικά συσχετισμένη με τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας αναστολής. Στη βάση αυτών των ευρημάτων, οι σημαντικότεροι παράγοντες που σχετίζονται με την ικανότητα διάκρισης ποσοτήτων είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και η επιτελική λειτουργία της αναστολής συνυφασμένη με τον χρόνο απόκρισης αυτής.

Σχετικά με το δεύτερο σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), οι σημαντικότεροι γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με την ικανότητα της άμεσης αντίληψης με μια ματιά (Subitizing) είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων και οι επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, του χρόνου απόκρισης της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής. Σε αυτό το πλαίσιο, το σημαντικό εύρημα είναι ότι οι συνάφειες μεταξύ της ικανότητας Subitizing και των γνωστικών λειτουργιών, λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών και γνωστική εναλλαγή είναι επί το πλείστον γύρω στο +0,9 και -0,8 αντίστοιχα. Αυτές οι συνάφειες είναι τόσο υψηλές που υποδηλώνουν ότι η ικανότητα Subitizing είναι ουσιαστικά το ίδιο με τη χωρητικότητα της λεκτικής μνήμης αριθμών και της γνωστικής εναλλαγής. Από αυτό προκύπτει αφενός ότι οι μαθητές με μη αυτόματη επεξεργασία μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων χωρίς την προσφυγή στην καταμέτρηση (Subitizing), έχουν χαμηλή χωρητικότητα εργαζόμενης λεκτικής μνήμης αριθμών και αδυναμία αποτελεσματικής μετάβασης μεταξύ διαφορετικών έργων και διαδικασιών, και αφετέρου ότι πιθανά αυτές οι λειτουργίες να εμπλέκουν τους ίδιους γνωστικούς πόρους.

Αξιοσημείωτο είναι, ότι ο ο συντελεστής συσχέτισης της ικανότητας Subitizing με την οπτικοχωρική εργαζόμενη μνήμη δε βρέθηκε στατιστικά σημαντικός και αυτό το εύρημα ευθυγραμμίζεται με αποτελέσματα έρευνας του Ashkenazi (2016), σύμφωνα με τα οποία, η ικανότητα Subitizing δεν επηρεάζεται από το φορτίο της οπτικοχωρικής μνήμης εργασίας, εν αντιθέσει με τους Piazza, Fumarola, Chinello και Melcher (2011), οι οποίοι βρήκαν μια θετική σχέση μεταξύ της άμεσης εκτίμησης χωρίς μέτρημα (Subitizing) και της οπτικο-χωρικής εργαζόμενης μνήμης.

Σχετικά με τα αποτελέσματα της διερεύνησης της ύπαρξης συσχέτισης των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και των γνωστικών λειτουργιών στους μαθητές με δυσαριθμησία, αυτά καταδεικνύουν ότι πράγματι οι συμβολικές αριθμητικές αναπαραστάσεις συνδέονται με τις γνωστικές λειτουργίες.

Συγκεκριμένα, η ικανότητα της απαρίθμησης σχετίζεται σημαντικά με τη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και με την ικανότητα της αναστολής του φυσικού μεγέθους των αριθμών, κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές με μικρές τιμές στη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και στην ικανότητα της αναστολής του φυσικού μεγέθους των αριθμών, δηλαδή όταν η άσχετη πληροφορία μεγέθους του αριθμού δεν έχει υποστεί αυτόματη επεξεργασία σε δοκιμές που δεν υπάρχει συμφωνία μεγέθους (ο αριθμός που είναι φυσικά μικρότερος είναι αριθμητικά μεγαλύτερος π.χ. **2**-6), έχουν μικρές τιμές στην ικανότητα της απαρίθμησης. Συνάμα, συνδέεται αρνητικά με τη γνωστική εναλλαγή, σημαίνοντας ότι η ικανότητα της απαρίθμησης αυξάνει όσο μικρότεροι είναι οι χρόνοι επίτευξης των μαθητών στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο.

Από την άλλη, ο ατομικός χρόνος απόκρισης στην ικανότητα της απαρίθμησης (R.T. Απαρίθμησης), μειώνεται καθώς το εύρος της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αυξάνει και ταυτοχρόνως αυξάνει με την αύξηση του ατομικού χρόνου απόκρισης στην ικανότητα αναστολής.

Τα ευρήματα για την ικανότητα σύγκρισης μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών, ενδυναμώνουν τις σχέσεις της συμβολικής αριθμητικής αναπαραστάσεις με τις γνωστικές λειτουργίες, καθώς οι συγκεκριμένες ικανότητες συσχετίζονται με το σύνολο των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών. Κατά συνέπεια, οι σημαντικοί παράγοντες που σχετίζονται με την ικανότητα της σύγκρισης μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών, είναι η χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης λέξεων, η επιτελική λειτουργία της αναστολής και του χρόνου απόκρισης αυτής, η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής, με σημαντικότερους ωστόσο, τη χωρητικότητα της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, της προσοχής

– ταχύτητας επεξεργασίας και της γνωστικής εναλλαγής, λόγω του μεγάλου βαθμού συσχέτισης.

Μοναδικά ευρήματα στη βιβλιογραφία προσφέρει η τρέχουσα μελέτη και για το φαινόμενο της επίδρασης απόστασης των αριθμών. Ειδικότερα, για την επίδραση απόστασης 1 αριθμού κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αλλά και διψήφιων αριθμών, οι σημαντικοί γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με το φαινόμενο, είναι η λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών, η επιτελική λειτουργία της αναστολής, η επιτελική λειτουργία της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας και η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής. Αυτό σημαίνει πως το μικρό εύρος στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών, η μη αυτόματη επεξεργασία της άσχετης πληροφορίας μεγέθους του αριθμού, η χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και ο βραδύς ρυθμός μετατόπισης της προσοχής από το ένα ερέθισμα στο άλλο, οδηγούν σε μεγαλύτερη μεταβλητότητα ή λιγότερη ακρίβεια για την αναπαράσταση μεγαλύτερων αριθμητικών μεγεθών, με συνέπεια η αντιληπτή απόσταση μεταξύ 95 και 94 να είναι πολύ μικρότερη από την αντιληπτή απόσταση μεταξύ 5 και 4, αλλά και επίσης σε μεγαλύτερη μεταβλητότητα ή λιγότερη ακρίβεια για μικρότερους αριθμούς (π.χ. όταν συγκρίνουν το 6 με το 7). Κατά συνέπεια οι ασαφείς αναπαραστάσεις αριθμητικού μεγέθους σχετίζονται με τα δομήματα των γνωστικών λειτουργιών. Ομοίως, για την επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών, επίσης παρουσιάζεται σημαντική συσχέτιση με τη μνήμη αριθμών και τη Γνωστική Εναλλαγή.

Σημαντικό επίσης, είναι το εύρημα σχετικά με το φαινόμενο της επίδρασης του μεγέθους των αριθμών για ίσες αριθμητικές αποστάσεις, όπου ο R.T αυξάνεται με το μέγεθος των αριθμών (π.χ., τα υποκείμενα είναι πιο γρήγορα όταν συγκρίνουν το 2 με το 3 απ’ ό,τι το 12 με το 13) (Castro, Reigosa-Crespo, & Gonzalez, 2012), όπου στους μαθητές με δυσαριθμησία, συνδέεται με τη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών και μνήμη λέξεων, με την επιτελική λειτουργία της αναστολής, με την επιτελική λειτουργία της προσοχής - ταχύτητα επεξεργασίας και με την επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής, καθώς υποδηλώνει ότι η αναπαράσταση αριθμητικών μεγεθών και η μεταβλητότητα αυτών κατά την αύξηση τους, σχετίζεται με το εύρος της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης, αφού όσο μεγαλώνει το εύρος τόσο μικραίνει η επίδραση του φαινομένου, με την αυτόματη επεξεργασία της άσχετης πληροφορίας μεγέθους του αριθμού, καθώς όσο αυξάνει η αυτόματη επεξεργασία τόσο μικραίνει η επίδραση του φαινομένου, με την προσοχή και ταχύτητα της επεξεργασίας μεγεθών και βρίσκεται σε συνοχή με την ικανότητα της μετατόπισης της προσοχής από λεκτικές αναπαραστάσεις σε αριθμητικές.

Ένα άλλο πρόσθετο εύρημα, αφορά τις συνάφειες της αντίστροφης καταμέτρησης με τη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών, με τη λεκτική εργαζόμενη μνήμη λέξεων, με την οπτικοχωρική μνήμη, με την ικανότητα αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, με τον χρόνο απόκρισης της αναστολής, με την προσοχή – ταχύτητα επεξεργασίας και με τη γνωστική εναλλαγή. Αυτό αποκαλύπτει, ότι τα ελλείμματα των μαθητών στο σχηματισμό μιας διανοητικής αναπαράστασης της γραμμικής αριθμογραμμής κατά την πραγματοποίηση πραγματικών τοποθετήσεων στην αριθμογραμμή με την αντίστροφη σειρά, σχετίζονται με ελλείμματα στη μνήμη εργασίας και στις επιτελικές λειτουργίες, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι υποκείμενες αιτίες των δυσχερειών εκτίμησης σχετίζονται με υποκείμενες αιτίες των γνωστικών λειτουργιών.

Επισκοπώντας τα παραπάνω ευρήματα, οι υποκείμενες αναπαραστάσεις μεγεθών τόσο στη μη συμβολική όσο και στη συμβολική εκδοχή τους συνδέονται με τα δομήματα των γνωστικών λειτουργιών. Το προσεγγιστικό σύστημα αριθμών (ANS), δηλαδή η ακρίβεια στη διάκριση ποσοτήτων συνδέεται με το εύρος της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και με την επιτελική λειτουργία της αναστολής. Επιπροσθέτως, το μικρό εύρος στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών, η μη αυτόματη επεξεργασία της άσχετης πληροφορίας μεγέθους του αριθμού, η χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και ο βραδύς ρυθμός μετατόπισης της προσοχής από το ένα ερέθισμα στο άλλο, σχετίζονται αφενός με το PI, δηλαδή με τη μη αυτόματη επεξεργασία μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων (Subitizing), και αφετέρου με την αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών και τη μεταβλητότητα αυτών κατά την αύξηση τους, καθώς και με το σχηματισμό της γραμμικής αριθμογραμμής κατά την πραγματοποίηση πραγματικών τοποθετήσεων με την αντίστροφη σειρά. Στη βάση ότι τα δύο εγγενή συστήματα εντάσσονται στην ανάπτυξη, σύμφωνα με τη θεωρία του ελλείμματος στην αίσθηση του αριθμού (Dehaene, 2011· Gelman & Butterworth, 2005, Piazza et al. 2010), και δεδομένης της συναφειακής σχέσης που παρατηρείται με τις γνωστικές λειτουργίες, οι συσχετιστικές σχέσεις μεταξύ της επεξεργασίας συμβολικών μεγεθών και των γνωστικών λειτουργιών ίσως είναι «ίχνη» της σχέσης της μη συμβολικής αναπαράστασης και των γνωστικών λειτουργιών, αντανακλώντας τη φύση των μη συμβολικών αναπαραστάσεων.

### 5.2.6. Προβλεπτές της δυσαριθμησίας

Τα ευρήματα παλινδρόμησης της παρούσας μελέτης της ισχύς σε ένα μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας με την ανεξάρτητη και την κοινή συνεισφορά της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και των γνωστικών λειτουργιών στην ηλικία των 8-9 ετών, παρέχουν σημαντική υποστήριξη στη δυνατότητα πρόβλεψης αυτής, κι ενημερώνουν την έρευνα μέσα από τέσσερα προβλεπτικά μοντέλα.

Τα ευρήματα στο επίπεδο της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, υποστηρίζουν ένα προβλεπτικό μοντέλο τριών μεταβλητών στην πρόβλεψη αυτής, το οποίο εξηγεί ένα πολύ σημαντικό μέρος της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία (88,1%). Βάσει του μοντέλου του μη συμβολικού συστήματος η ικανότητα Subitizing, δηλαδή η αυτοματοποιημένη γνώση της ποσότητας με μια ματιά, είναι κατά πολύ ο καλύτερος προβλέπτης και ακολουθούν ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T Subitizing) και στη συνέχεια ο χρόνος απόκρισης της ακρίβειας του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών (R.T W). Τα τρέχοντα ευρήματα αποκαλύπτουν ότι η μη αυτοματοποιημένη γνώση της ποσότητας με μια ματιά Subitizing, οι μεγάλοι χρόνοι απόκρισης στην ικανότητα Subitizing και οι μεγάλοι χρόνοι απόκρισης στη διάκριση μεγεθών (R.T W), σε μαθητές ηλικίας 8 έως 9 ετών, αποτελούν ισχυρούς δείκτες πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, ανεξάρτητα από τις συμβολικές αναπαραστάσεις και τις γνωστικές λειτουργίες των μαθητών. Τα παρόντα ευρήματα επεκτείνουν ευρήματα ερευνών που διεξήχθησαν σε μαθητές νηπιαγωγείου, όπου οι ικανότητες αναπαράστασης μεγέθους μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως ισχυροί πρώιμοι δείκτες πρόβλεψης για την ανίχνευση μαθητών σε κίνδυνο (Libertus, 2011· Praet, & Desoete, 2014· Stock, & Desoete, 2009). Παράλληλα, αναδεικνύουν τη μεγάλη σημασία της σχέσης της ικανότητας Subitizing και της μαθηματικής ικανότητας, καταδεικνύοντας περαιτέρω τη σπουδαιότητα του εγγενούς συστήματος της παράλληλης εξατομίκευσης στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας.

Σχετικά με την προβλεπτική αξία της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, οι αναλύσεις αποκαλύπτουν ένα δεύτερο προβλεπτικό μοντέλο δύο μεταβλητών: α) τη σύγκριση διψήφιων αριθμών και β) την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων. Για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, οι χαμηλές επιδόσεις στη σύγκριση διψήφιων αριθμών και οι μεγάλες τιμές στην επίδραση απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, αποτελούν προβλεπτικούς δείκτες της δυσαριθμησίας. Αν και τα ευρήματα αυτό είναι μοναδικά στη βιβλιογραφία που αφορούν στις συμβολικές αναπαραστάσεις, υποστηρίζουν την ικανότητα της σύγκρισης διψήφιων αριθμών και τις μεγάλες επιδράσεις του φαινομένου της απόστασης ως ιδιαίτερες σημαντικές επιρροές στη συνολική διακύμανση της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία και ενισχύουν προηγούμενες απόψεις σύμφωνα με τις οποίες, τα παιδιά με δυσαριθμησία έχουν έλλειμμα πρόσβασης σε συμβολικές αριθμητικές αναπαραστάσεις, καθώς αποτυγχάνουν να κάνουν σύνδεση μεταξύ συμβολικών αριθμών και των αναπαραστάσεών τους (Mussolin, Mejias, & Noël, 2010b), το οποίο έλλειμμα συνεπικουρεί στην αδυναμία σύγκρισης, καθώς το παιδί πρέπει να αναπαραστήσει κατά τη σύγκριση αυτές τις πληθικότητες (τους πληθάριθμους ή τις ποσότητες) και να δηλώσει ποιος πληθάριθμος είναι μεγαλύτερος. Η προηγούμενη βιβλιογραφία στην επίδραση της απόστασης των αριθμών επίσης υποστηρίζει το παρόν εύρημα, καθώς ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία δεν παρουσιάζουν τυπική επίδραση απόστασης κατά την ενεργοποίηση που σχετίζεται με τη διαδρομή στη δεξιά ενδοβρεγματική αύλακα (IPS), (Price et al., 2007). Η άτυπη επίδραση του φαινομένου απόστασης στην παρούσα πραγμάτευση εκδηλώνεται με διπλάσια επίδραση του φαινομένου απόστασης, όπως ενημερώνουν τα ευρήματα της τρέχουσας μελέτης.

Εξίσου μεγάλη προβλεπτική ισχύ δείχνει να έχει το τρίτο μοντέλο, αυτό των γνωστικών λειτουργιών, καθώς συνολικά το μοντέλο ερμηνεύει το 82,7% της μαθηματικής ικανότητας, με σημαντικούς προβλέπτες: α) την εργαζόμενη λεκτική μνήμη αριθμών και β) την επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής, με την αναγνώριση ότι ο ισχυρότερος προβλέπτης είναι η εργαζόμενη λεκτική μνήμη αριθμών, καθώς εξηγεί το 79,7% της διακύμανσης, με την επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής να αποτελεί τον δεύτερο ισχυρότερο προβλέπτη. Τα ευρήματα αυτά βρίσκονται σε συνέπεια με πρωιμότερα ευρήματα έρευνας του De Weerdt (2012), όπου η ανάκληση ψηφίων ήταν ο καλύτερος παράγοντας πρόβλεψης των παιδιών που παρουσιάζουν προφίλ δυσαριθμησίας στην ηλικία των 10 ετών και ταυτόχρονα επεκτείνουν ευρήματα έρευνας των De Weerdt, Desoete και Roeyers (2013), όπου η κεντρική εκτελεστική συνιστώσα ήταν ο σημαντικότερος προγνωστικός παράγοντας της δυσαριθμησίας.

Σε ένα τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, η αμοιβαία συνεισφορά της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, αποκαλύπτει ένα μοντέλο πέντε μεταβλητών στην πρόβλεψη αυτής: α) την ικανότητα Subitizing β) την ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής, γ) την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, δ) τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας Subitizing και ε) τον χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W), το οποίο προβλέπει σημαντικά τη διαταραχή, καθώς το μοντέλο επεξηγεί το 92,4% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία. Η ικανότητα Subitizing είναι ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης, καθώς εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας και ακολουθούν η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής ως ο δεύτερος ισχυρότερος προβλέπτης, η επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών ως ο τρίτος κατά σειρά σημαντικότερος προβλέπτης, ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing ως ο τέταρτος καλύτερος προβλέπτης, και τέλος, ο χρόνος απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W), ως ο πέμπτος καλύτερος προβλέπτης. Αυτά τα ευρήματα, μοναδικά στη βιβλιογραφία στην πρόβλεψη της δυσαριθμησίας με την αμοιβαία διαπλοκή των τριών μοντέλων, παρέχουν περαιτέρω υποστήριξη στην πολυδιάστατο χαρακτήρα της διαταραχής και στη χρησιμότητα των παραπάνω δεικτών ως σημαντικές επιρροές στη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με προφίλ δυσαριθμησίας.

Συμπερασματικά, η συζήτηση για τη δυσαριθμησία μπορεί να είναι δημιουργική υπό το πρίσμα της σύγκλισης των νευροψυχολογικών και γνωστικών θεωριών, καθώς η σχετική έρευνα προσφέρει σημαντικά ευρήματα των μεταβλητών του μη συμβολικού αριθμητικού συστήματος, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών που έχουν επεξηγηματική δύναμη σε ένα μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας.

### 5.2.7. Η συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης στην αλγοριθμική επίλυση

Τα πειραματικά ευρήματα της μελέτης είναι ελπιδοφόρα και συνεπή με την εξεύρεση παρόμοιων έργων στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, καθώς καταδεικνύουν την ισχυρή επίδραση της πειραματικής παρέμβασης, μέσω της αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσο κωδικοποίησης και διαμεσολαβητικού παράγοντα ενεργοποίησης των αριθμητικών διαδικασιών, στην εκμάθηση του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, στους μαθητές με δυσαριθμησία.

Συγκεκριμένα, τα ευρήματα των πολλαπλών στατιστικών τεστ δείχνουν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική βελτίωση στη μέση επίδοση (τάξεως του 75%) της πειραματικής ομάδας, στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης μέσω της αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου. Αυτό είναι ένα ευρέως αναφερόμενο όφελος των σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων στην αναπαράσταση μιας έννοιας ή της μαθηματικής δομής, κατά τη διαδικασία μαθηματικοποίησης ευρύτερα στην εκπαίδευση (Gravemeijer, 1999· Κολέζα, 2009· Krawec, 2014· Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, Γουναροπούλου, & Βαμβουλή 2015· Σαλβαράς, 2011· Van de Walle, 2005), και αυτή η μελέτη παρέχει στοιχεία για την επέκταση αυτής της δήλωσης στο πλαίσιο της συγκρότησης της εννοιολογικής διεργασίας του αλγόριθμου, επίσης, των μαθητών με προφίλ δυσαριθμησίας. Αυτά τα οφέλη των μαθητών στην αναπαραστατικές ικανότητες των ποσοτήτων μέσω των σχηματοποιήσεων κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων και στη συνέχεια στη σύνδεσή τους σε ένα δίκτυο συμβολικών διαδικασιών, μπορούν να αποδοθούν στην ταυτόχρονη υποστήριξη της στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας σε όλα τα στάδια της διδασκαλίας. Παρόλο που προηγούμενες μελέτες είχαν επίσης προτείνει τη σύνδεση στην ανάπτυξη εννοιολογικών μοντέλων μιας δεξιότητας-στόχου, η εργασία αυτή παρέχει μια σαφή και διαφανή ανάλυση των συγκεκριμένων μαθησιακών δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται στην πειραματική ομάδα σε όλη την πειραματική έρευνα μεμονωμένης περίπτωσης για την υποστήριξη της δήλωσης. Χαρακτηριστικά της ακολουθίας δραστηριοτήτων της συγκεκριμένης στρατηγικής διδασκαλίας, η οποία διαρθρώνεται σε τέσσερις φάσεις, είναι: (α) *Το μαθησιακό συμβόλαιο*, όπου ο εκπαιδευτικός και μαθητές συμφωνούν στον προσδιορισμό ενός μαθησιακού στόχου (τι θα μάθουμε: την τριψήφια πρόσθεση με κρατούμενο), τη διαδικασία (πώς θα την μάθουμε: με σχηματοποιήσεις και με συμβολικό τρόπο) και πρωτίστως για τους ρόλους του εκπαιδευτικού και των μαθητών για την κατανομή των αποφάσεων (τι θα κάνει ο καθένας), ώστε ο μαθητής να αντιλαμβάνεται τη σημασία του στόχου και τη θέση του στο οικοδόμημα των μαθηματικών γνώσεων. (β) Η *προτυποποίηση/μοντελοποίηση* του ενεργήματος, συνοδευόμενη από τη φθίνουσα καθοδήγηση, όπου ο εκπαιδευτικός δείχνει και εξηγεί καθοδικά, ολικά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων στο επίπεδο της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης. Λειτουργεί ως να είναι δικό του το πρόβλημα, κάνει ρητορικά ερωτήματα και δίνει ο ίδιος απάντηση. Οι μαθητές με την προτυποποίηση του ενεργήματος, διαμέσου του φωναχτού λόγου, βλέπουν την ποσοτικοποιημένη σε σχήμα, μορφή του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και διαμορφώνουν μια νοητική εικόνα τόσο των ποσοτήτων όσο και των διαδικασιών του εκπαιδευτικού για την επίλυση αυτών. Αμέσως μετά το σχηματικό στάδιο των ποσοτήτων, το μη συμβολικό, ακολουθεί η άμεση σύνδεση της συμβολικής μορφής της πράξης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης για να αντιληφθεί ο μαθητής τη σχέση μεταξύ συμβόλων και της σχηματικής εκτέλεσης της πράξης που προηγήθηκε (Σαλβαράς, 2013α, σελ. 57), και εν γένει τις δυνατότητες διαφορετικής αναπαράστασης των μεγεθών. (γ) *Εξάσκηση με φθίνουσα καθοδήγηση: εξωτερική*, όπου ο εκπαιδευτικός υποβοηθεί τους μαθητές να ξανακάνουν και λένε μαζί (λεκτική αυτοκαθοδήγηση) και *σιωπηλή*, όπου οι μαθητές ξανακάνουν και δίνουν οδηγίες στον εαυτό, «τι να προσέξει» (σιωπηλή αυτοκαθοδήγηση), ώστε λόγος και πράξη να ενισχύονται αμοιβαία και η *εξάσκηση με αυτοέλεγχο*, κατά την οποία ο μαθητής εξασκείται στον έλεγχο της ακριβούς εφαρμογής της στρατηγικής, κατά την επίλυση του μαθησιακού στόχου, ώστε να προλαμβάνονται ή να διορθώνονται λάθη σε μια πορεία αυτόνομης μάθησης. (δ) Ολοκληρώνει με την αξιολόγηση, όπου παρέχεται *εξωτερική* τακτική ανατροφοδότηση στο μαθητή, ώστε να αντιλαμβάνεται το αποτέλεσμα των προσπαθειών του, και κάθε μαθητής συγκρίνει τις εκτελέσεις του με το ενέργημα και λαμβάνει *εσωτερική* ανατροφοδότηση, ελέγχει την ανταπόκριση στο ρόλο και τη μίμηση με το πρότυπο (Σαλβαράς, 2011· Σαλβαράς, & Σαλβαρά, 2011).

Ένα άλλο πρόσθετο εύρημα είναι ότι ο έλεγχος του μετατέστ στην ομάδα ελέγχου, τους μαθητές με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση, έδειξε μείωση στη μέση επίδοσή τους κατά 0,9 % στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, κι επομένως η εφαρμογή της συνήθους διδασκαλία, δεν επέφερε βελτίωση στην επίδοση των μαθητών.

Επιπλέον, η στατιστική σημαντικότητα της διαφοράς των πρωτοκόλλων αξιολόγησης αντικατοπτρίζει τη σημαντικότητα στην ελαχιστοποίηση της συμπτωματολογίας λαθών της πειραματικής ομάδας, ως συνέπεια της σημαντικής επιρροής της πειραματικής παρέμβασης στην εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Τα Πρωτόκολλα Διαγνωστικής και Αποδεικτικής Αξιολόγησης, ευρύτερα στην έρευνα, αποτελούν ένα ισχυρό διαγνωστικό εργαλείο, που μας προσφέρει ένα παράθυρο στον εννοιολογικό κόσμο των μαθητών (Σαλβαράς, 2011· Στασινός, 2015), διότι αντανακλούν ιδέες και στρατηγικές που χρησιμοποιεί ο μαθητής κατά τη μαθηματική του ανάπτυξη στην προσπάθειά του να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της αλγοριθμικής επίλυσης. Αρχικά, το Πρωτόκολλο Διαγνωστικής Αξιολόγησης μας δείχνει τις ατυχείς γνωστικές υποκαταστάσεις που κάνουν οι μαθητές στην προσπάθεια της αλγοριθμικής επίλυσης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, και η συνάρθρωση και κατηγοριοποίηση αυτών καταδεικνύει τέσσερις κατηγορίες λαθών, ήτοι, α. Λάθη στους αριθμητικούς συνδυασμούς (Α.Σ.), β. Αλγοριθμικά λάθη, γ. Οπτικοχωρικά λάθη και δ. Συνδυασμός λαθών των προηγούμενων κατηγοριών, με συνολικό αριθμό λαθών 97, πριν την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης. Στη συνέχεια, το Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης αποκαλύπτει την ύπαρξη μόνο 5 λαθών στις αναφερόμενες τέσσερις κατηγορίες λαθών μετά την εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, ο δε συσχετισμένος έλεγχος (Paired Samples t – test) των δύο Πρωτοκόλλων ($p$ = 0,000 < 0,05), εμφανίζει μέση βελτιωμένη επίδοση κατά 14 βαθμούς στο Πρωτόκολλο Αποδεικτικής Αξιολόγησης. Αυτό το εύρημα υπογραμμίζει την ευεργετική συνέπεια της διαμεσολάβησης της αναπαράστασης των ποσοτήτων των αραβικών αριθμών με σχήματα, με την υποστήριξη της στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας, καθώς αυτή βοήθησε τους μαθητές ν' αναδιοργανώσουν τις γνώσεις τους και να οδηγηθούν σε νέες κατανοήσεις για τις ποσότητες που εκφράζουν οι συμβολικοί αριθμοί και την αλγοριθμική επίλυση και συνάδει με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Gersten, Chardk, Jayanthi, Baker, Morphy, & Flojo, 2009· Griffin, & Jitendra, 2009).

Καταληκτικά, οι σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας είναι επωφελείς για τη βελτίωση των μαθησιακών επιτευγμάτων στην αλγοριθμική επίλυση των μαθητών με δυσαριθμησία. Αυτό, παρέχει ελπιδοφόρα αποδεικτικά στοιχεία για την αντιμετώπιση ενός σημαντικού ζητήματος στη διδασκαλία των εν λόγω μαθητών σχετικά με τις εννοιολογικές και διαδικαστικές μαθηματικές κατανοήσεις, και συγκεκριμένα το συχνά αναφερόμενο έλλειμμα αναπαράστασης ή αίσθησης του αριθμού των μαθητών που αποτελεί τροχοπέδη για τις μαθηματικές κατανοήσεις. Για να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια των μεγεθών, πρέπει να εμπλέκονται σε δραστηριότητες αναπαράστασης των ποσοτήτων των αραβικών αριθμών, αλλά και σε δραστηριότητες μετασχηματισμού των μεγεθών που τροποποιούν ή δεν τροποποιούν τη σπουδαιότητα ενός συνόλου (π.χ. η προσθήκη ή η αφαίρεση αντικειμένων σε ένα σετ τροποποιεί τη σπουδαιότητα, η εξάπλωση ή η ομαδοποίηση των αντικειμένων όχι). Πρέπει επίσης να συγκρίνουν την πολλαπλότητα των διαφορετικών συνόλων (π.χ. το σύνολο Α θα μπορούσε να είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με το σύνολο Β) (Van de Walle, 2005). Η σχηματοποίηση/ μοντελοποίηση δίνει τη δυνατότητα της σχηματικής αναπαράστασης των ποσοτήτων των μεγεθών και του μετασχηματισμού αυτών, κατά τη διαδικασία μαθηματικοποίησης, και λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος ανάμεσα στις ποσότητες και στα σύμβολα και ως μέσο ανάπτυξης εννοιών με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

### 5.2.8. Η συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης, στο εγγενές μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα, στην πρόσβαση συμβολικών αριθμητικών αναπα-

**ραστάσεων και στις γνωστικές λειτουργίες**

Η προκύπτουσα ερευνητική εργασία ενημερώνει την έρευνα με μοναδικά σημαντικά ευρήματα, σύμφωνα με τα οποία η αναπαράσταση των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους, με τη μορφή σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων κατά την εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, έχει σημαντική επιρροή: α) στο εγγενές μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα, β) στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία και γ) σε δομήματα των γνωστικών λειτουργιών, απηχώντας την καίρια επίδραση της πειραματικής παρέμβασης στα ανωτέρω ελλείμματα των μαθητών με δυσαριθμησία, δεδομένου ότι η πτυχή αυτή δεν είχε προηγουμένως λάβει καμία προσοχή. Τα ευρήματα της έρευνας βρίσκονται σε συνέπεια με τη θεωρητική σχέση που προβλέπει η θεωρία των μοντελοποιήσεων (Κολέζα, 2009· Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, 1999· Σαλβαράς, 2011· van Garderen et al., 2016) και η θεωρία της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας (Collins, 2006· Engeström, 2001· Kalantzis, & Cope, 2013· Σαλβαράς, 2013β), καθώς και με την υπόθεση αυτής της μελέτης, σύμφωνα με την οποία οι ικανότητες στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα, οι ικανότητες συμβολικής επεξεργασίας αριθμητικών μεγεθών και οι γνωστικές λειτουργίες που επηρεάζουν τη δυσαριθμησία ως αιτιολογικοί παράγοντες εμφάνισής της, θα βελτιωθούν από τη διαμεσολάβηση των σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους στην εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Στο επίπεδο της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει στατιστικά σημαντική βελτίωση στο εγγενές σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης, καθώς επιφέρει στατιστικά σημαντική βελτίωση στην Ικανότητα Subitizing ($p$ = 0,003), με μέση βελτιωμένη επίδοση της τάξης του 45,625% και οριακή στατιστικά σημαντική μείωση στον χρόνο απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Subitizing Μ.Π) ($p$ = 0,058), με μέση βελτιωμένη επίδοση της τάξης του 40,5%. Αυτό το εύρημα σηματοδοτεί τη σημαντική ενίσχυση στην ικανότητα της αυτόματης επεξεργασίας μεγεθών που αριθμητικά κυμαίνονται από 1 έως και 4 αντικείμενα, η οποία ικανότητα συνυφαίνεται με τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία, και ενθαρρύνει την καθιέρωση μιας ισχυρής σχέσης ανάμεσα στην παρέμβαση και την προκύπτουσα βελτίωση στο εγγενές σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης, που καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη μαθηματική συμπεριφορά. Αν και το εύρημα αυτό είναι μοναδικό στη βιβλιογραφία, συνεπικουρεί στη σημαντικότητα του θεωρητικού υπόβαθρου των σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων και της διδακτικής στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας και ταυτοχρόνως, ενισχύει και επεκτείνει προηγούμενες πρακτικές εφαρμογές αυτών (Griffin, & Jitendra, 2009· Jitendra et al.,1999· Sharma, 2016· van Garderen et al., 2016).

Αναφορικά με το προσεγγιστικό σύστημα ANS, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει ασήμαντη στατιστικά αύξηση κατά 16,06% στην ακρίβεια των αναπαραστάσεων κατά τη διάκριση αυτών (W ακρίβεια ANS) και ασήμαντη στατιστικά μείωση κατά 19,83% στο χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση (R.T W). Η αναφερόμενη μη στατιστικά σημαντική ενίσχυση στο προσεγγιστικό σύστημα δεν ελαχιστοποιεί τη σημαντική συμβολή της παρέμβασης, καθώς πρόκειται για ένα φυλογενετικά προσδιορισμένο σύστημα που η εξέλιξή του βρίσκεται υπό την επίδραση κληρονομικών και περιβαλλοντικών παραγόντων (Dehaene, 2011).

Τα ευρήματα στο επίπεδο της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας καταδεικνύουν ότι, η πειραματική παρέμβαση έχει στατιστικά σημαντικό αντίκτυπο σε όλες τις μεταβλητές της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, πλην της μεταβλητής της επίδρασης του μεγέθους των αριθμών ($p$ = 0,283 > 0,05).

Ειδικότερα, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει, στατιστικά σημαντική αύξηση κατά 22% στη μέση τιμή της ικανότητας απαρίθμησης και σημαντική μείωση κατά 30% στη μέση τιμή του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας (R.T Απαρίθμησης). Από τα συγκεκριμένα ευρήματα, προκύπτει ότι η αναπαράσταση των ποσοτήτων μέσω της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης, η κωδικοποίηση των συνόλων των αριθμητικών συμβόλων και των σχέσεων τους ως προσθετική δομή σε ξεχωριστές στήλες (ανάλυση σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) για την κατανόηση της θεσιακής αξίας της πληθικής σχέσης του κάθε αριθμητικού συμβόλου, κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, μειώνει αιτιακά σημαντικά τον χρόνο που χρειάζονται οι μαθητές για να καταμετρήσουν ποσότητες και αυξάνει την ικανότητα της σωστής απαρίθμησης.

Περαιτέρω, η επιρροή της πειραματικής παρέμβασης της αναπαράστασης των ποσοτήτων επιφέρει σημαντική αύξηση κατά 31,87% στην ικανότητα σύγκρισης μονοψήφιων, εύρημα το οποίο είναι ερμηνεύσιμο υπό το πρίσμα του ορισμού της ικανότητας της σύγκρισης, η οποία δεν είναι ηχητική αναπαράσταση αραβικών αριθμών, αλλά ταυτόχρονη νοητική αναπαράσταση και αποκωδικοποίηση των ποσοτήτων που αυτή εκφράζει (Λεμονίδης, 2013). Η αναμενόμενη εξέλιξη της ικανότητας σύγκρισης από την αναπαράσταση ποσοτήτων επεκτείνεται και στην ικανότητα της σύγκρισης διψήφιων αριθμών, με στατιστικά σημαντική αύξηση (τάξεως του 51,31%), αναδεικνύοντας την αύξηση στην ικανότητα της νοητικής αναπαράστασης των πληθάριθμων και της συνακόλουθης ποσότητας που εκφράζουν, των σχέσεων μεταξύ τους, καθώς και τη γνώση της θεσιακής αξίας των συγκεκριμένων αριθμών.

Σημαντικό επίσης εύρημα, που ενισχύει τη σύνδεση της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης των αλγόριθμων των πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας στην ελαχιστοποίηση των συμβολικών ελλειμμάτων των μαθητών, είναι η σημαντική μείωση (τάξεως 44,78%) στο φαινόμενο της επίδρασης απόστασης 1 αριθμού, στην επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών (τάξεως 45,66%) κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, και ομοίως, σημαντική μείωση (τάξεως 20,05%) στην επίδραση απόστασης 1 ψηφίου (τάξεως 29,59%) και στην επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων κατά τη σύγκριση διψήφιων. Οι μαθητές μετά την πειραματική παρέμβαση απαντούσαν πιο γρήγορα κατά τη σύγκριση μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών που διέφεραν κατά 1 αριθμό κι επίσης πιο γρήγορα όταν σύγκριναν μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς που είχαν απόσταση 4-5 αριθμών. Η σημαντικότητα στην ελαχιστοποίηση του προτύπου των ελλειμμάτων στο φαινόμενο της επίδρασης απόστασης, συνυφαίνεται με τη στατιστικά σημαντική αρνητική συσχέτιση που διαπιστώθηκε μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της επίδρασης της απόστασης των αριθμών στην παρούσα μελέτη, αλλά και με τις διπλάσιες επιδράσεις του εν λόγω φαινομένου στους μαθητές με τη διαταραχή, καθώς κατά την πειραματική προσέγγιση υπάρχει στατιστικώς σημαντική μείωση της επίδρασης, άρα αύξηση της μαθηματικής ικανότητας.

Εξίσου μοναδικό σημαντικό εύρημα αποτελεί η σημαντική αύξηση κατά 62,5% στην ικανότητα της αντίστροφης καταμέτρησης, καθώς αντανακλά τη δύναμη της σχηματοποιημένης αναπαράστασης των ποσοτήτων στην ανάπτυξη του σχηματισμού μιας διανοητικής αναπαράστασης της γραμμικής αριθμογραμμής κατά την πραγματοποίηση πραγματικών τοποθετήσεων στην αριθμογραμμή με την αντίστροφη σειρά.

Κατά συνέπεια απ’ αυτή τη μελέτη, η αιτιώδης συνάφεια μεταξύ μιας παρέμβασης, που εμπεριέχει την αναπαράσταση των ποσοτήτων μέσω της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης με την υποστήριξη της διδακτικής στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας, και των ικανοτήτων χειρισμού συμβολικών αριθμητικών πληροφοριών, όπως είναι η απαρίθμηση, η αυτοματοποίηση κατά τη σύγκριση συμβολικών αριθμών, ώστε η γραμμική απόσταση να ελαχιστοποιείται από τις αξίες που συγκρίνονται, και η αντίστροφη καταμέτρηση, γίνεται σαφής.

Στον τομέα των γνωστικών διεργασιών, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει στατιστικά σημαντική βελτίωση στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών και στις επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και της γνωστικής εναλλαγής.

Εκκινώντας από την υποκατηγορία της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης, αυτή της μνήμης αριθμών, το αποτέλεσμα της επίδρασης της πειραματικής παρέμβασης που εμπεριέχει την αναπαράσταση των ποσοτήτων μέσω της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης για την κατανόηση από τους μαθητές της πληθικότητας των συμβολικών αριθμών, την κωδικοποίηση των συνόλων των αριθμητικών συμβόλων και των σχέσεων τους ως προσθετική δομή σε ξεχωριστές στήλες (ανάλυση σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) για την κατανόηση της θεσιακής αξίας της πληθικής σχέσης του κάθε αριθμητικού συμβόλου, και τη μετάβαση αυτής της σχέσης με τη συμβολική αριθμητική έκφραση των ποσοτήτων κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, όπου υποβοηθούνται το λεκτικό και οπτικό κανάλι επεξεργασίας των πληροφοριών που υποστηρίζουν τη μνήμη εργασίας, ερμηνεύει την ενδυνάμωση της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών, και ισχυροποιεί την αιτιακή μεταξύ τους σχέση.

Σε συνάφεια με το προηγούμενο εύρημα, βρίσκεται ο εντοπισμός της στατιστικά σημαντικής διαφοράς στις επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και της γνωστικής εναλλαγής, η οποία διαφορά κεφαλαιοποιεί τα πλεονεκτήματα της πειραματικής παρέμβασης. Οι μαθητές με την προτυποποίηση του ενεργήματος έβλεπαν τη διαδικασία που βρίσκονταν πίσω από την αφηρημένη μορφή του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και διαμόρφωναν μια νοητική εικόνα τόσο των ποσοτήτων όσο και των διαδικασιών του εκπαιδευτικού για την επίλυση αυτών. Αμέσως μετά το σχηματικό στάδιο πρόσθεσης των ποσοτήτων, το μη συμβολικό, ακολουθούσε η άμεση σύνδεση της συμβολικής μορφής της πράξης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης για να αντιληφθεί ο μαθητής τη σχέση μεταξύ συμβόλων και της σχηματικής εκτέλεσης της πράξης που προηγήθηκε. Οι μαθητές εξασκούνταν στο να μεταβαίνουν από τη μια μορφή αναπαράστασης των ποσοτήτων στην άλλη. Αυτή η επάλληλη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη ενδυνάμωσε την ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής των μαθητών, καθώς οι χρόνοι απόκρισης τους σ' αυτή την ικανότητα μειώθηκαν, την ικανότητα αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, καθώς οι μαθητές διέκριναν τον μεγαλύτερο ποσοτικά μεταξύ δύο αριθμών που διέφεραν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το **2)**, μέσω της σιωπηρής επεξεργασίας των αριθμητικών μεγεθών και της νοερής αναπαράστασής τους και αύξησε την ικανότητα της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών, μειώνοντας το χρόνο απόκρισης σ' αυτή την ικανότητα. Η ταχύτερη επεξεργασία των πληροφοριών οδηγούσε σε αποτελεσματικότερη χρήση της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης και αποδοτικότερη χρήση της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης οδηγούσε σε υψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά. Η ταχύτητα επεξεργασίας επηρέασε την επίδοση στα μαθηματικά μέσα από την ταχύτερη ανάκτηση των πληροφοριών από τη λεκτική εργαζόμενη μνήμη πληροφοριών σχετικών με τις αριθμητικές διαδικασίες.

Ας παρατηρηθεί, ότι η αιτιότητα που στηρίζει η παρούσα παρεμβατική μελέτη μεταξύ της αναπαράστασης των ποσοτήτων με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας και των γνωστικών διεργασιών, δεν αφίσταται της επιστημολογικής σκοπιάς των σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων και του μοντέλου της γνωστικής μαθητείας, πράγμα ευεξήγητο, εφόσον, οι σχηματοποιήσεις / μοντελοποιήσεις ενεργοποιούν τις διαδικασίες αναπαράστασης, κωδικοποίησης, κατηγοριοποίησης, με τις οποίες οι μαθητές συγκροτούν τις δομές των αλγόριθμων των αριθμητικών πράξεων (Van de Walle, 2005· Kalantzis, & Cope, 2013), η δε στρατηγική της γνωστικής μαθητείας έχει κριθεί κατάλληλη για μαθήσεις που ενεργοποιούν τις ανώτερες επιτελικές λειτουργίες και επιδιώκουν την εκμάθηση προτύπων (Collins, 2006· Engeström, 2001· Kalantzis, & Cope, 2013· Σαλβαράς, 2013β).

Γενικότερα, η προκύπτουσα ερευνητική μελέτη ενημερώνει την έρευνα για τη σημαντική επιρροή της οργανωτικής διαδικασίας της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης με την υποστήριξη της γνωστικής μαθητείας, στη διευκόλυνση αναπαράστασης μεγέθους και στην επεξεργασία μη συμβολικών και συμβολικών αριθμητικών μεγεθών και σε δομήματα των γνωστικών λειτουργιών. Η σχηματοποίηση των ποσοτήτων λειτουργεί αρχικά ως «μοντέλο της» σχηματοποιημένης πρόσθεσης, καθώς οι αραβικοί αριθμοί μεταφράζονται σε ποσοτική έκφραση του μεγέθους τους, για να καταλήξει τελικά σε «μοντέλο για» την υποστήριξη του μαθηματικού συλλογισμού (Gravemeijer, 1999· Σαλβαράς, 2011), σχετικά με την αλγοριθμική διαδικασία των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε συμβολικό επίπεδο.

### 5.3. Συμπεράσματα της έρευνας

Η κεντρική εστίαση της έρευνας ήταν στην εξεύρεση δεικτών και προβλεπτών της δυσαριθμησίας στην ηλικία των 8-9 ετών και στη συμβολή της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεων τους για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας και από τα ευρήματά της συνάγουμε τα παρακάτω συμπεράσματα.

Οι μαθητές με δυσαριθμησία παρουσιάζουν μια αναπαραστατική εξασθένιση αριθμητικών μεγεθών, η οποία συνιστά μια διακριτή διαφορά των προτύπων ενεργοποίησης των δύο εγγενών μη συμβολικών αριθμητικών συστημάτων ANS και PI σε σχέση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους. Στα πλαίσια αυτά, τόσο η χαμηλή ακρίβεια - οξύτητα του προσεγγιστικού συστήματος αριθμών – οι μαθητές εμφανίζουν σημαντικά υψηλότερες μέσες τιμές w - που δείχνει τις ανακριβείς απαντήσεις των μαθητών, όταν πρέπει να κρίνουν ποιες από τις δύο αριθμητικές διατάξεις είναι μεγαλύτερη όσο και η μικρή ικανότητα στην άμεση αντίληψη της ποσότητας με μια ματιά (Subitizing), η οποία καταδεικνύει μια εξασθενημένη αναπαραστατική ικανότητα μιας ποσότητας που κυμαίνεται από 1 έως και 4 αντικείμενα, και των υψηλών χρόνων απόκρισης - επεξεργασίας αυτών των ικανοτήτων, μπορούν να ερμηνευθούν ως σημαντικοί, διακριτοί δείκτες ελλειμματικών μηχανισμών που ενυπάρχουν στους συγκεκριμένους μαθητές και ταυτοχρόνως συνιστούν δείκτες αξιολόγησης-διαφοροποίησης των εν λόγω μαθητών από τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους.

Ταυτόχρονα, οι διαφορές των μαθητών με τη διαταραχή της δυσαριθμησίας και τυπικών στις ικανότητες της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, οι οποίες εντοπίζονται στους υψηλούς χρόνους που χρειάζονται οι μαθητές στην απαρίθμηση, στη σύγκριση των μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών, στις αυξημένες επιδράσεις των φαινομένων της απόστασης και του μεγέθους των αριθμών, στα απαριθμητικά λάθη και με την αναγνώριση ότι η αντίστροφη καταμέτρηση εμφανίζει το υψηλότερο ποσοστό διαφοράς, συνιστούν σημαντικές πηγές μαθηματικών μηχανισμών που σχετίζονται με την κακή αριθμητική απόδοση κι επομένως αποτελούν σημαντικούς δείκτες διαφοροποίησης των δύο ομάδων μαθητών.

Λόγω των ευρημάτων της παρούσας πραγμάτευσης που αποκαλύπτουν τον αλληλεξαρτησιακό χαρακτήρα του εγγενούς προσεγγιστικού συστήματος των αριθμών ANS και του συστήματος παράλληλης εξατομίκευσης με το συμβολικό σύστημα αριθμών, θεωρούμε πως η θεωρία του ελλείμματος αναπαράστασης μεγέθους ή ελλείμματος στην αίσθηση του αριθμού είναι θεωρητικά προσφυέστερη για την κατανόηση αυτής της αλληλεξαρτησιακής σχέσης γιατί εκκινεί από τη σύλληψη ότι τα υποκείμενα ελλείμματα στο ANS και στο PI, έχουν προκαλέσει σοβαρές βλάβες στο συμβολικό σύστημα αριθμών, καθώς τα δύο εγγενή συστήματα θεωρείται ότι εντάσσονται στην ανάπτυξη (Dehaene, 2011· Gelman & Butterworth, 2005, Piazza et al. 2010).

Ειδικότερα, το πρώτο εγγενές σύστημα της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, το σύστημα των κατά προσέγγιση αριθμών (ANS), συμμεταβάλλεται σημαντικά με δύο ικανότητες της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, αυτή της απαρίθμησης και αυτή της επίδρασης της απόστασης 4-5 αριθμών κατά τη σύγκριση μονοψήφιων αριθμών, αντανακλώντας το γεγονός ότι η οι ακριβέστερες αναπαραστάσεις στη διάκριση μεγεθών οδηγούν σε καλύτερες απαριθμητικές ικανότητες και ταυτόχρονα μειωμένη επίδραση του φαινομένου της απόστασης των αριθμών. Παρά το γεγονός ότι αυτά τα ευρήματα δεν εγκαθιδρύουν αιτιακή σχέση ανάμεσα στο προσεγγιστικό σύστημα αριθμών και τις δύο συμβολικές ικανότητες, είναι σε συμφωνία με την υπόθεση ελαττωματικού προλεκτικού ANS και το PI, καθώς οι επιδράσεις μεγέθους και απόστασης θεωρούνται αποτέλεσμα των όλο και πιο ασαφών αναπαραστάσεων του ANS, ως αποτέλεσμα της (λογαριθμικής) συμπίεσης ή της μεγαλύτερης μεταβλητότητας για την αναπαράσταση μεγαλύτερου αριθμητικού μεγέθους (Dehaene, 2011· Desoete et al. 2009· Feigenson et al. 2004), κι επομένως ενισχύεται η πορεία της σχέσης ότι οι συγκεκριμένες συμβολικές ικανότητες εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το εγγενές προσεγγιστικό σύστημα αριθμών.

Το δεύτερο με τη σειρά μη συμβολικό εγγενές σύστημα, αυτό της παράλληλης εξατομίκευσης (PI), με μεταβλητές την ικανότητα της άμεσης αντίληψης της ποσότητας με μια ματιά και του χρόνου απόκρισης αυτής της ικανότητας, είναι συσχετισμένο με το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές με μη αυτόματη επεξεργασία μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων χωρίς την προσφυγή στην καταμέτρηση (Subitizing), έχουν μειωμένες απαριθμητικές ικανότητες, έχουν αυξημένο χρόνο απόκρισης κατά την απαρίθμηση (R.T. Απαρίθμησης), έχουν χαμηλές επιδόσεις κατά τη διάρκεια σύγκρισης τόσο μονοψήφιων όσο και διψήφιων αριθμών, έχουν αυξημένη επίδραση των φαινομένων της απόστασης και του μεγέθους των αριθμών και έχουν υψηλότερες βαθμολογίες σφάλματος στην αντίστροφη καταμέτρηση. Ομοίως, ο ατομικός χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing (R.T. Subitizing), συνδέεται ισχυρά αρνητικά με το σύνολο των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, γεγονός που υποδηλώνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος αντίδρασης τόσο μειώνεται η ικανότητα των μαθητών να διαχειρίζονται απαριθμητικές ικανότητες, ικανότητες σύγκρισης μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών και ικανότητες αντίστροφης καταμέτρησης. Συνακόλουθα, οι μεγαλύτεροι χρόνοι απόκρισης στη γνώση της ποσότητας με μια ματιά, οδηγούν σε αυξημένη επίδραση απόστασης και μεγέθους των αριθμών. Οι ισχυρές συνάφειες μεταξύ του συστήματος παράλληλης εξατομίκευσης και της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσες, γιατί τονίζουν τη σημασία της πρώιμης ανάπτυξης της αυτόματης επεξεργασίας μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων χωρίς την προσφυγή στην καταμέτρηση (Subitizing) στην ανάπτυξη της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας.

Προς τούτο, ας μας επιτραπεί να πούμε ότι από μόνος του ο δείκτης της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας, απουσία των ελλειμμάτων στο μη συμβολικό αριθμητικό σύστημα, δεν είναι ένας αξιόπιστος δείκτης της διαταραχής της δυσαριθμησίας, καθώς ελλείμματα σε συμβολικές αριθμητικές επεξεργασίες μπορεί να έχουν και οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και των οποίων οι χαμηλές επιδόσεις να οφείλονται σε εξωγενείς επιδράσεις.

Η εστίαση στις διαφορές στις γνωστικές επεξεργασίες μεταξύ παιδιών τυπικής ανάπτυξης και παιδιών με δυσαριθμησία, αποκαλύπτει ότι η εργαζόμενη μνήμη και οι επιτελικές λειτουργίες εμπλέκονται ως βασικοί μηχανισμοί που υπογραμμίζουν τις διαφορές στη μαθηματική γνώση των παιδιών με τη διαταραχή.

Οι μαθητές με δυσαριθμησία αδυνατούν να έχουν μια ταχεία αποθήκευση των πληροφοριών για τα αποτελέσματα των πρώτων επεξεργασιών στη βραχύχρονη μνήμη καθώς μετακινούνται προς τις επόμενες επεξεργασίες. Συγκεκριμένα το εύρος της μνήμης αριθμών κυμαίνεται μεταξύ 2 έως 3 αριθμών με την ανάκληση αυτών και με την αντίστροφη σειρά σε αντίθεση με τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους που το εύρος της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών είναι 4 έως 6 αριθμούς. Μικρότερες διαφορές στο εύρος παρουσιάζονται για τη μνήμη λέξεων και την οπτικοχωρική εργαζόμενη μνήμη, παραταύτα σημαντικές. Αυτά τα ευρήματα παρέχουν ενδείξεις ότι οι συνιστώσες της εργαζόμενης μνήμης όπως η λεκτική μνήμη αριθμών, η λεκτική μνήμη λέξεων και η οπτικοχωρική μνήμη, παρέχουν χώρους εργασίας συγκράτησης και χειρισμού των αναπαραστάσεων αριθμητικού μεγέθους και κατά συνέπεια ένα μειωμένο σύστημα εργαζόμενης μνήμης έχει αρνητικό αντίκτυπο στην ανάπτυξη αναπαραστάσεων αριθμητικού μεγέθους και στη βασική αριθμητική.

Ένα σημαντικό ζήτημα στον τομέα των γνωστικών επεξεργασιών της παρούσας έρευνας είναι οι μεγάλες διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών στις επιτελικές λειτουργίες. Οι μαθητές με τη διαταραχή, εμφανίζουν λάθη στο αριθμητικό έργο αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, όπου πρέπει να διακρίνουν τον μεγαλύτερο ποσοτικά μεταξύ δύο αριθμών που διαφέρουν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το **2**), μέσω της σιωπηρής επεξεργασίας των αριθμητικών μεγεθών και της νοερής αναπαράστασής τους, σε αντίθεση με τους τυπικούς συνομήλικους που δεν εμφανίζουν λάθη στο συγκεκριμένο έργο. Η παρουσία λαθών στην ασυμφωνία του (αριθμητικού) μεγέθους των αριθμών κατά τη σύγκριση (ο αριθμός που είναι φυσικά - αντιληπτικά μικρότερος είναι αριθμητικά μεγαλύτερος, π.χ. **2**-6), υποδηλώνει ότι η άσχετη πληροφορία μεγέθους του αριθμού δεν έχει υποστεί αυτόματη επεξεργασία στους μαθητές με τη διαταραχή, εν αντιθέσει με τους τυπικά αναπτυσσόμενους μαθητές. Από την άλλη, η μη αυτόματη επεξεργασία των μεγεθών στο συγκεκριμένο έργο επηρεάζει τον RT (τον χρόνο απόκρισης) που οι μαθητές κάνουν σε οποιαδήποτε σύγκριση στην οποία υπάρχει ασυμφωνία μεγέθους, με ποσοστιαία διαφορά στους χρόνους 60% σε σχέση με τους τυπικούς συνομήλικους. Στην επιτελική λειτουργία της Προσοχής – Ταχύτητα Επεξεργασίας, παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 65,43%. Αυτό το εύρημα τεκμηριώνει μια σημαντική έκπτωση τόσο στην προσοχή των συγκεκριμένων μαθητών όσο και στην ταχύτητα με την οποία επεξεργάζονται τα ερεθίσματα. Ομοίως, στην επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής που εξετάστηκε με το trail making test, παρατηρείται ποσοστιαία διαφορά 60,66%. Οι μαθητές με δυσαριθμησία δυσκολεύονται να εναλλάσσονται μεταξύ γραμμάτων και αριθμών ενώ οι χρόνοι ολοκλήρωσης ξεπερνούν κατά πολύ τους αποδεκτούς χρόνους ολοκλήρωσης του τεστ (Bowie, & Harvey, 2006). Οι ασύμβατοι χρόνοι στην επιτελική λειτουργία της Γνωστικής Εναλλαγής αντανακλούν τις δυσκολίες των μαθητών στην ικανότητα αποτελεσματικής μετάβασης μεταξύ διαφορετικών έργων και διαδικασιών, δηλαδή στην ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από ένα ερέθισμα σε ένα άλλο όποτε αυτό είναι απαραίτητο, για τη λειτουργική εκτέλεση μιας πράξης (Miyake et al., 2000).

Η σχετική προσέγγιση της παρούσας έρευνας, αποκαλύπτει ότι οι υποκείμενες αναπαραστάσεις μεγεθών τόσο στη μη συμβολική όσο και στη συμβολική εκδοχή τους συνδέονται με τα δομήματα των γνωστικών λειτουργιών. Το προσεγγιστικό σύστημα αριθμών (ANS), δηλαδή η ακρίβεια στη διάκριση ποσοτήτων συνδέεται με το εύρος της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης αριθμών και με την επιτελική λειτουργία της αναστολής. Επιπροσθέτως, το μικρό εύρος στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών, η μη αυτόματη επεξεργασία της άσχετης πληροφορίας μεγέθους του αριθμού, η χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και ο βραδύς ρυθμός μετατόπισης της προσοχής από το ένα ερέθισμα στο άλλο, σχετίζονται αφενός με το PI, δηλαδή με τη μη αυτόματη επεξεργασία μιας ποσότητας 1-4 κουκκίδων (Subitizing), και αφετέρου με την αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών και τη μεταβλητότητα αυτών κατά την αύξηση τους, καθώς και με το σχηματισμό της γραμμικής αριθμογραμμής κατά την πραγματοποίηση πραγματικών τοποθετήσεων με την αντίστροφη σειρά. Στη βάση ότι τα δύο εγγενή συστήματα εντάσσονται στην ανάπτυξη, σύμφωνα με τη θεωρία του ελλείμματος στην αίσθηση του αριθμού (Dehaene, 2011· Gelman & Butterworth, 2005, Piazza et al. 2010), και δεδομένης της συναφειακής σχέσης που παρατηρείται με τις γνωστικές λειτουργίες, οι συσχετιστικές σχέσεις μεταξύ της επεξεργασίας συμβολικών μεγεθών και των γνωστικών λειτουργιών ίσως είναι «ίχνη» της σχέσης της μη συμβολικής αναπαράστασης και των γνωστικών λειτουργιών, αντανακλώντας τη φύση των μη συμβολικών αναπαραστάσεων.

Κατά συνέπεια, η σύγκλιση των θεωριών της μελέτης συντείνει στον έλεγχο των μη συμβολικών, συμβολικών και γνωστικών επεξεργασιών για τον εντοπισμό σημαντικών διαφοροποιητικών, αξιολογικών στοιχείων της διάκρισης των μαθητών με τη διαταραχή από τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους.

Η παρούσα πραγμάτευση δεν ισχυρίζεται ότι η σύγκλιση των τριών θεωριών που αποτελούν τη θεωρητική υποδομή της διαταραχής της δυσαριθμησίας, και που επιχειρήθηκε στην εν λόγω έρευνα για την εξεύρεση δεικτών και προβλεπτών της διαταραχής, μπορούν να παράσχουν πλήρη κατανόηση του φαινομένου της δυσαριθμησίας, αλλά ότι είναι οι ελάχιστες απαραίτητες σε μια διαγνωστική διαδικασία ορθής διάκρισης των περιπτώσεων μαθητών με προφίλ δυσαριθμησίας στην ηλικία των 8-9 ετών, από μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά, καθώς ορισμένες υστερήσεις των υπαρχουσών θεωριών διαφωτίζονται χάρη της σύγκλισης, η οποία αναδεικνύει τη δυσαριθμησία ως ανεπάρκεια τριπλής διάστασης.

Σε αυτό το συμπέρασμα συντείνει το τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας, της παρούσας έρευνας, με την αμοιβαία συνεισφορά της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών, το οποίο αποκαλύπτει ένα μοντέλο πέντε μεταβλητών στην πρόβλεψη αυτής: α) την ικανότητα Subitizing β) την επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής, γ) την επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών, δ) τον χρόνο απόκρισης της ικανότητας Subitizing και ε) τον χρόνο απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W), το οποίο προβλέπει σημαντικά τη διαταραχή, καθώς το μοντέλο επεξηγεί το 92,4% της μεταβλητότητας της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία. Η ικανότητα Subitizing είναι ο ισχυρότερος παράγοντας πρόβλεψης, καθώς εξηγεί το 85,3% της διακύμανσης της μαθηματικής ικανότητας και ακολουθούν η επιτελική λειτουργία της γνωστικής εναλλαγής ως ο δεύτερος ισχυρότερος προβλέπτης, η επίδραση της απόστασης 1 ψηφίου κατά τη σύγκριση διψήφιων αριθμών ως ο τρίτος κατά σειρά σημαντικότερος προβλέπτης, ο χρόνος απόκρισης της ικανότητας Subitizing ως ο τέταρτος καλύτερος προβλέπτης, και τέλος, ο χρόνος απόκρισης κατά τη διάκριση μη συμβολικών ποσοτήτων (R.T W), ως ο πέμπτος καλύτερος προβλέπτης. Αυτά τα ευρήματα, μοναδικά στη βιβλιογραφία στην πρόβλεψη της δυσαριθμησίας με την αμοιβαία διαπλοκή των τριών μοντέλων, παρέχουν περαιτέρω υποστήριξη στην πολυδιάστατο χαρακτήρα της διαταραχής και στη χρησιμότητα των παραπάνω δεικτών ως σημαντικές επιρροές στη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με προφίλ δυσαριθμησίας.

Η εστίαση της προκύπτουσας ερευνητικής εργασίας στη συμβολή της πειραματικής παρέμβασης μέσω της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεων τους για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, απηχεί την καίρια επίδραση της πειραματικής παρέμβασης στα ανωτέρω ελλείμματα – μέσα από μοναδικά σημαντικά ευρήματα - δεδομένου ότι η πτυχή αυτή δεν είχε προηγουμένως λάβει καμία προσοχή.

Η κύρια σημασία που προκύπτει αρχικά από αυτή τη μελέτη, είναι ότι οι σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας είναι επωφελείς για τη βελτίωση των μαθησιακών επιτευγμάτων στην αλγοριθμική επίλυση των μαθητών με δυσαριθμησία. Αυτό παρέχει ελπιδοφόρα αποδεικτικά στοιχεία για την αντιμετώπιση ενός σημαντικού ζητήματος στη διδασκαλία των εν λόγω μαθητών σχετικά με τις εννοιολογικές και διαδικαστικές μαθηματικές κατανοήσεις, και συγκεκριμένα το συχνά αναφερόμενο έλλειμμα αναπαράστασης ή αίσθησης του αριθμού των μαθητών που αποτελεί τροχοπέδη για τις μαθηματικές κατανοήσεις. Για να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια των μεγεθών, πρέπει να εμπλέκονται σε δραστηριότητες αναπαράστασης των ποσοτήτων των αραβικών αριθμών, αλλά και σε δραστηριότητες μετασχηματισμού των μεγεθών που τροποποιούν ή δεν τροποποιούν τη σπουδαιότητα ενός συνόλου (π.χ. η προσθήκη ή η αφαίρεση αντικειμένων σε ένα σετ τροποποιεί τη σπουδαιότητα, η εξάπλωση ή η ομαδοποίηση των αντικειμένων όχι). Πρέπει επίσης να συγκρίνουν την πολλαπλότητα των διαφορετικών συνόλων (π.χ. το σύνολο Α θα μπορούσε να είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με το σύνολο Β) (Van de Walle, 2005). Η σχηματοποίηση/ μοντελοποίηση δίνει τη δυνατότητα της σχηματικής αναπαράστασης των ποσοτήτων των μεγεθών και του μετασχηματισμού αυτών, κατά τη διαδικασία μαθηματικοποίησης, και λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος ανάμεσα στις ποσότητες και στα σύμβολα και ως μέσο ανάπτυξης εννοιών με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Στον τομέα των μη συμβολικών επεξεργασιών, η αναπαράσταση των ποσοτήτων επιφέρει σημαντική βελτίωση στην ικανότητα subitizing. Αυτό το εύρημα σηματοδοτεί τη σημαντική ενίσχυση στην ικανότητα της αυτόματης επεξεργασίας μεγεθών που αριθμητικά κυμαίνονται από 1 έως και 4 αντικείμενα, η οποία ικανότητα συνυφαίνεται με τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με δυσαριθμησία, και ενθαρρύνει την καθιέρωση μιας ισχυρής σχέσης ανάμεσα στην παρέμβαση και την προκύπτουσα βελτίωση στο εγγενές σύστημα παράλληλης εξατομίκευσης που καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη μαθηματική συμπεριφορά.

Από την άλλη, η αιτιώδης συνάφεια μεταξύ μιας παρέμβασης, που εμπεριέχει την αναπαράσταση των ποσοτήτων μέσω της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης με την υποστήριξη της διδακτικής στρατηγικής της γνωστικής μαθητείας, και των ικανοτήτων χειρισμού συμβολικών αριθμητικών πληροφοριών, όπως είναι η απαρίθμηση, η αυτοματοποίηση κατά τη σύγκριση συμβολικών αριθμών, ώστε η γραμμική απόσταση να ελαχιστοποιείται από τις αξίες που συγκρίνονται, και η αντίστροφη καταμέτρηση, γίνεται σαφής.

Τέλος, στον τομέα των γνωστικών διεργασιών, η πειραματική παρέμβαση επιφέρει σημαντική βελτίωση στη λεκτική εργαζόμενη μνήμη αριθμών και στις επιτελικές λειτουργίες της αναστολής, της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών και της γνωστικής εναλλαγής. Οι μαθητές με την προτυποποίηση του ενεργήματος έβλεπαν τη διαδικασία που βρίσκονταν πίσω από την αφηρημένη μορφή του αλγόριθμου της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και διαμόρφωναν μια νοητική εικόνα τόσο των ποσοτήτων όσο και των διαδικασιών του εκπαιδευτικού για την επίλυση αυτών. Αμέσως μετά το σχηματικό στάδιο πρόσθεσης των ποσοτήτων, το μη συμβολικό, ακολουθούσε η άμεση σύνδεση της συμβολικής μορφής της πράξης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης για να αντιληφθεί ο μαθητής τη σχέση μεταξύ συμβόλων και της σχηματικής εκτέλεσης της πράξης που προηγήθηκε. Οι μαθητές εξασκούνταν στο να μεταβαίνουν από τη μια μορφή αναπαράστασης των ποσοτήτων στην άλλη. Αυτή η επάλληλη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη ενδυνάμωσε την ικανότητα της γνωστικής εναλλαγής των μαθητών, καθώς οι χρόνοι απόκρισης τους σ’ αυτή την ικανότητα μειώθηκαν, την ικανότητα αναστολής του φυσικού μεγέθους του αριθμού, καθώς οι μαθητές διέκριναν τον μεγαλύτερο ποσοτικά μεταξύ δύο αριθμών που διέφεραν αντιληπτικά σε μέγεθος (π.χ. το 3 με το **2**), μέσω της σιωπηρής επεξεργασίας των αριθμητικών μεγεθών και της νοερής αναπαράστασής τους και αύξησε την ικανότητα της προσοχής – ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών, μειώνοντας το χρόνο απόκρισης σ’ αυτή την ικανότητα. Η ταχύτερη επεξεργασία των πληροφοριών οδηγούσε σε αποτελεσματικότερη χρήση της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης και αποδοτικότερη χρήση της λεκτικής εργαζόμενης μνήμης οδηγούσε σε υψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά. Η ταχύτητα επεξεργασίας επηρέασε την επίδοση στα μαθηματικά μέσα από την ταχύτερη ανάκτηση των πληροφοριών από τη λεκτική εργαζόμενη μνήμη πληροφοριών σχετικών με τις αριθμητικές διαδικασίες.

Γενικότερα, η προκύπτουσα ερευνητική μελέτη προτείνει ότι, από επιστημολογική σκοπιά, αλλά και από την σκοπιά των εφαρμογών της παρούσας έρευνας, είναι σημαντική και χρήσιμη η οργανωτική διαδικασία της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης με την υποστήριξη της γνωστικής μαθητείας, στη διευκόλυνση αναπαράστασης μεγέθους και στην επεξεργασία μη συμβολικών και συμβολικών αριθμητικών μεγεθών και σε δομήματα των γνωστικών λειτουργιών, καθώς όπως διαπιστώθηκε η βελτίωση των λειτουργιών αυτών είναι ένας εφικτός και επιθυμητός στόχος.

**5.4. Προεκτάσεις και Μελλοντικές Κατευθύνσεις**

Η προκύπτουσα συσχετιστική – προβλεπτική και πειραματική έρευνα υποδεικνύει προεκτάσεις, αλλά και κατευθύνσεις για μελλοντικές έρευνες.

Τα ευρήματα της συσχετιστικής – προβλεπτικής φάσης της μελέτης έχουν προεκτάσεις αφενός στη διαγνωστική διαδικασία των μαθητών με προφίλ δυσαριθμησίας στην ηλικία των 8-9 ετών, καθώς συμβάλλουν σε πληρέστερη διάγνωση, αλλά και διαφορική διάγνωση των μαθητών με τη συγκεκριμένη διαταραχή, διαμέσου των δεικτών εκείνων που διαφοροποιούν τα παιδιά με την εν λόγω διαταραχή από τους τυπικά αναπτυσσόμενους συνομήλικους και των προβλεπτών που συντείνουν στη χρησιμότητα των παραπάνω δεικτών ως σημαντικές επιρροές στη μαθηματική ικανότητα των μαθητών με προφίλ δυσαριθμησίας και αφετέρου στην αποκαταστασιακή προσπάθεια, καθώς η βαθύτερη κατανόηση των δυσκολιών και των δυνατοτήτων των μαθητών μέσα από μια γνωσιακή ανάλυση του μαθητή, ως ένας από τους πρώτους στόχους μιας ενιαίας διαδικασίας εντοπισμού – παρέμβασης στα μαθηματικά, συμβάλλει στην καλύτερη δυνατή παροχή εκπαιδευτικών υπηρεσιών.

Ωστόσο, η τρέχουσα συσχετιστική – προβλεπτική μελέτη βασίστηκε αποκλειστικά σε μετρήσεις της ηλικίας των 8-9 ετών για την εξεύρεση δεικτών και προβλεπτών της διαταραχής. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ίδια η φύση των δυσαριθμητικών δυσκολιών σε συμπεριφορικό επίπεδο δεν είναι πάγιες και μονοσήμαντες καταστάσεις, αλλά ένα σύνολο χαρακτηριστικών που εξελίσσονται στο διάβα του χρόνου, καθιστά αναγκαίους μελλοντικούς σχεδιασμούς διαχρονικής έρευνας που θα συμπεριλαμβάνει δείγματα μαθητών 7 – 12 ετών. Οι σχεδιασμοί αυτοί θα προσέφεραν πληροφορίες με μεγαλύτερη σαφήνεια αναφορικά με τις μεταβλητές που συνεισφέρουν στην πρόβλεψη της διαταραχής σε μικρότερες και μεγαλύτερες ηλικίες και κατά συνέπεια θα συνεισέφεραν στην καλύτερη αξιολόγηση των μαθητών κατά τα χρόνια των σπουδών τους στο δημοτικό.

Τα ευρήματα της πειραματικής μελέτης σε επίπεδο παρέμβασης έχουν σημασίες για για την παροχή βοήθειας προς τους μαθητές με δυσαριθμησία, μέσω της ανάπτυξης προγραμμάτων που θα ενσωματώνουν τη σχηματοποίηση/μοντελοποίηση στη διευκόλυνση της αναπαράστασης των αριθμητικών μεγεθών για τη βελτίωση της αίσθησης του αριθμού, των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και δομημάτων των γνωστικών λειτουργιών, με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας. Διαμέσου των κατευθυντήριων γραμμών σχετικά με την υλοποίηση της διδασκαλίας, για την υποστήριξη του μαθητή στην απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προβούν σε έναν επανασχεδιασμό της πρακτικής τους για να ενισχύσουν την παροχή εξατομικευμένων μαθησιακών εμπειριών στους μαθητές τους.

Παρόλο που η παρούσα πρωτόλεια πρόταση στη μελέτη μας παρέχει αποδεικτικά στοιχεία σχετικά με την ανάπτυξη της ικανότητας στην αλγοριθμική επίλυση, την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, την ανάπτυξη των συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και δομημάτων των γνωστικών λειτουργιών, απαιτείται περαιτέρω θεωρητική και εμπειρική εργασία προκειμένου να αξιοποιηθεί, καθώς υπάρχουν και ορισμένοι περιορισμοί, οι οποίοι υποδεικνύουν κατευθύνσεις για μελλοντικές έρευνες. Πρώτον, πρέπει να προσεγγιστεί προσεκτικά η γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων, δεδομένου ότι η μελέτη διεξήχθη σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, με μελέτες μεμονωμένων περιπτώσεων μαθητών, παρόλο της εμπειρικής μεθοδολογίας που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση των μεταβλητών και της αμεροληψίας των αποτελεσμάτων που αυτή συνεπάγεται. Δεύτερον, το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρεμβατική πειραματική έρευνα περιελάμβανε μόνο μαθητές ηλικίας 8-9 ετών, δηλαδή μαθητές της Τρίτης Τάξης. Για να αντισταθμιστούν αυτοί οι περιορισμοί, οι μελλοντικές έρευνες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μεγαλύτερα δείγματα για τη βελτίωση της γενικευσιμότητας. Η συμμετοχή παιδιών με προφίλ δυσαριθμησίας από όλες τις τάξεις της πρωτοβάθμιας θα διεύρυνε τη συνολική σκοπιά των ευρημάτων και θα επέτρεπε μια συγκριτική ανάλυση ανάμεσα στους μαθητές των διαφορετικών τάξεων. Επιπρόσθετα, οι σχεδιασμοί διαχρονικής έρευνας θα συνεισέφεραν στην καλύτερη αξιολόγηση της επιρροής της σχηματοποίησης/μοντελοποίησης με την υποστήριξη της στρατηγικής διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας, στη βελτίωση των μαθησιακών επιτευγμάτων των μαθητών, κατά τα χρόνια των σπουδών στο δημοτικό. Τέλος, η ενσωμάτωση σχεδιασμών ποιοτικής και φαινομενολογικής έρευνας μπορούν να συνεισφέρουν στην περαιτέρω κατανόηση των μοναδικών επιρροών της παρέμβασης στην ενίσχυση της μαθησιακής εμπειρίας των συγκεκριμένων μαθητών και της συναισθηματικής τους κατάστασης, τουτέστιν να συμβάλλουν στην κατανόηση του φύσει πολυπρόσωπου και αλληλεξαρτησιακού χαρακτήρα της παρέμβασης στη γνωστική και συναισθηματική εξέλιξη των μαθητών.

## Βιβλιογραφία


Αγαλιώτης, Ι. (2013). *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση. Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών.* Αθήνα: Γρηγόρη.

Agrillo, C., Piffer, L., Bisazza, A., & Butterworth, B. (2012). Evidence for Two Numerical Systems That Are Similar in Humans and Guppies. *PLoS One*, *7*(2), e31923. DOI: 10.1371/journal.pone.0031923 Διαθέσιμο: http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0031923 Ανασύρθηκε: 17/05/2017.

Allen, K., Higgins, S., & Adams, J. (2019). The Relationship between Visuospatial Working Memory and Mathematical Performance in School-Aged Children: a Systematic Review. *Educational Psychological Review*, *31*(3), 509–531. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09470-8

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). Arlington, VA: American Psychiatric Publishing.

Arslan, C., & Yavuz, G. (2012). A study on mathematical literacy self-efficacy beliefs of prospective teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 46*, 5622‑5625. Διαθέσιμο: https://www.researchgate.net/publication/271880787_A_Study_on_Mathematical_Literacy_Self-Efficacy_Beliefs_of_Prospective_Teachers Ανασύρθηκε: 05/05/2018.

Ashkenazi, S.(2016). Enumeration Processes under Attack: The Role of Working Memory in Subitizing and Serial Counting. *Journal of Forensic Psychology*, *1*(1), 1-6. DOI: 10.4172/2475-319X.1000103.

Ashkenazi, S., Mark-Zigdon, N., & Henik, A. (2009). Numerical distance effect in developmental dyscalculia. *Cognitive Development*, *24*(4), 387-400. DOI: 10.1016/j.cogdev.2009.09.006.

Ashkenazi, S., & Henik, A. (2010a). Attentional networks in developmental dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, *6*(2), 1-12. DOI: 10.1186/1744-9081-6-2. Διαθέσιμο: https://behavioralandbrainfunctions.biomedcentral.com/articles/10.1186/1744-9081-6-2 Ανασύρθηκε: 15/10/2016. Ashkenazi, S., Mark-Zigdon, N., & Henik, A. (2013). Do subitizing deficits in developmental dyscalculia involve pattern recognition weakness? *Developmental Science 16*(1), 35-46. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2012.01190.x.

Ashkenazi, S., Rosenberg-Lee, M., Metcalfe, A. W., Swigart, A.G., & Menon, V. (2013). Visuo-spatial working memory is an important source of domain-general vulnerability in the development of arithmetic cognition. *Neuropsychologia*, *51*(11), 2305-2317. DOI:10.1016/j.neuropsychologia.2013.06.031 Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4136716/ Ανασύρθηκε: 10/05/2017.

Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in cognitive sciences*, *4*(11), 417–423.

Baddeley, A. D. (2012). Working memory: theories, models, and controversies. *Annual review of psychology*, *63*, 1–29.

Baddeley, A. D., Gathercole, S. E., & Papagno, C. (1998). The phonological loop as a language learning device. *Psychological Review*, *105*(1), 158–173.

Baddeley, A. D., & Hitch, G. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory* (pp.

47–89). New York: Academic Press.

Baddeley, A. D., & Logie, R. H. (1999). Working memory: The multiple-component model. In A. Miyake & P. Shah (Eds), *Models of Working memory: Mechanisms of active maintenance and executive control.* Cambridge: Cambridge University Press.

Bandura, A. (2000). Modeling. In E. W. Craighead, & C. B. Nemeroff (Eds.), *Encyclopedia of psychology and neuroscience* (3rd ed., pp. 967-968). New York: Wiley.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2006). Nonsymbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition*, *98*, 199-222. Διαθέσιμο: http://web.mit.edu/bcs/nklab/media/pdfs/2006Barth.pdf Ανασύρθηκε: 22/05/2017.

Bonny, J. W., & Lourenco, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: evidence from the preschool years. *Journal of Experimental Child Psychology*, 114(3), 375–388. http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2012.09.015

Bowie, C. R., & Harvey, P. D. (2006). Administration and interpretation of the trail making test. *Nature Protocols*, *1*(5), 2277-2281. DOI: 10.1038/nprot.2006.390.

Bruner, J. (1997). *Πράξεις νοήματος*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Bugden, S., & Ansari, D. (2016). Probing the nature of deficits in the Approximate Number System in children with persistent Developmental Dyscalculia. *Developmental Science*, *19*(5), 817-833. DOI: 10.1111/desc.12324.

Bull, R., Espy, K. A., & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at 7 years. *Developmental Neuropsychology, 33*, 205-228. DOI: 10.1080/87565640801982312

Bull, R., & Lee, K. (2014). Executive Functioning and Mathematics Achievement. *Child Development Perspectives, 8*(1), 36-41. doi.org/10.1111/cdep.12059 .

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*, 3-18. Διαθέσιμο: http://www.mathematicalbrain.com/pdf/BUTTJCPP05.PDF Ανασύρθηκε: 10/07/2016.

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Science, 14*(12), 534-541. DOI: 10.1016/j.tics.2010.09.007.

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science, 332*, 1049-1053. DOI: 10.1126/science.1201536.

Byrnes, J. P., & Fox, N. A. (1998). The educational relevance of research in cognitive neuroscience. *Educational Psychological Review*, *10*(3), 297-342.

Canizares, D. C., Crespo, V. R., & Alemany, E. G. (2013). Symbolic and Non-Symbolic Number Magnitude Processing in Children with Developmental Dyscalculia. *Spanish Journal of Psychology*, *15*(3), 952-966. DOI: https://doi.org/10.5209/rev_SJOP.2012.v15.n3.39387**.**

Castro, D., Reigosa, V., & González, E. (2012). Symbolic and non-symbolic number magnitude processing in children with developmental dyscalculia. *Spanish Journal of Psychology*, *15*(3), 952–966 http://dx.doi.org/10.5209/rev SJOP.2012.v15.n3.39387 .

Censabella, S., & Noël, M. P. (2008). The inhibition capacities of children with mathematical disabilities. *Child Neuropsychology*, *14*(1), 1–20. DOI:

10.1080/09297040601052318.

Collette, F, & Van der Linden, M. (2002). Brain imaging of the central executive component of working memory. *Neuropsychology Biobehavioral Review, 26*(2), 105-125.

Collins, A., Brown, 1. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A., Hawkins, J., & Carver, S. M. (1991). Cognitive apprenticeship for disadvantaged students. In B. Means, C. Chelemer, & M. S. Knapp (Eds.), *Teaching advanced skills to at-risk students* (pp. 216-254). San Francisco: Jossey-Bass.

Collins, A. (2006). Cognitive apprenticeship. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 47-60). Cambridge: Cambridge University Press. Διαθέσιμο: https://faculty.weber.edu/eamsel/Classes/Projects%20and%20Research%20(4800)/Teaching%20and%20Learning/Collins%20(2006).pdf Ανασύρθηκε: 05/04/2018.

Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2004). Arithmetic education and learning disabilities in Italy. *Journal of Learning Disabilities*, *37*, 42-49.

Corsi, P. M. (1972). *Human memory and the medial temporal region of the brain*. Doctoral Thesis at McGill University (Canada). Διαθέσιμο: http://digitool.library.mcgill.ca/webclient/StreamGate?folder_id=0&dvs=1502433427637~234 Ανασύρθηκε: 21/12/2016.

Creswell, J. W. (2016). *Η έρευνα στην εκπαίδευση.* (Μτφρ. Ν. Κουβαράκου, Επιμ. Χ. Τσορμπατζούδης). Αθήνα: Ιών.

D'Amico, A., & Passolunghi, M. C. (2009). Naming speed and effortful and automatic inhibition in children with arithmetic learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 19*, 170-180. DOI: 10.1016/j.lindif.2009.01.001.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics* (6th ed.). New York: Oxford University Press.

De Smedt, B., Noël, M. P., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). The relationship between symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing and the typical and atypical development of mathematics: a review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education, 2*, 48–55. DOI: 10.1016/j.tine.2013.06.001. Διαθέσιμο: https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/403145/2/DeSmedt_TrendsNE_OA.pdf Ανασύρθηκε: 20/05/2017.

De Smedt, B., & Gilmore, C. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology, 108*, 278-292. doi:10.1016/j.jecp.2010.09.003. Διαθέσιμο: https://dspace.lboro.ac.uk/dspace-jspui/bitstream/2134/8764/1/DeSmedtGilmoreJECP(2011).pdf Ανασύρθηκε: 20/05/2017.

Devlin, K. (2010). The mathematical brain. In D. A. Sousa (Ed.), *Mind, brain, & education: Neuroscience implications for the classroom* (pp. 162–177). Bloomington, IN: Solution Tree Press.

De Weerdt, F. (2012). Working memory, inhibition and naming speed in children with learning disabilities. Unpublished PhD dissertation. Chent University.

De Weerdt, F., Desoete, A., & Roeyers, H. (2013). Working memory in children with learning and/or mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 46*, 461-472.

Ένγκελς, Φ. (2016). *Η διαλεκτική της φύσης* (10η έκδ.). Αθήνα: Σύγχρονη εποχή.

Engeström, Y. (2001) Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization, *Journal of Education and Work*, *14*(1), 133-156.

Estrada, C. A., Martin-Hryniewicz, M., Peek, B. T., Collins, C., & Byrd, J. C. (2004). Literacy and numeracy skills and anticoagulation control. *American Journal of Medical Sciences*, *328*(2), 88–93. DOI: 00000441-200408000-00004.

European Commission, (2014). *Thematic Working Group on Mathematics, Science and Technology (2010 – 2013). Addressing Low Achievement in Mathematics and Science*. Final Report, 1-48.

Ευρωπαϊκή Επιτροπή (2000). *Ευρωπαϊκή Έκθεση για την Ποιότητα της Σχολικής Εκπαίδευσης. Δεκαέξι δείκτες ποιότητας.* Γενική Διεύθυνση Εκπαίδευσης και Πολιτισμού, σ. 1-15.

Eysenck, M. W. (2010). *Βασικές αρχές γνωστικής ψυχολογίας*. (Μτφρ. Μ. Κουλεντιανού, Επιμ. Ε. Βασιλάκη). Αθήνα: Gutenberg.

Ζαφειρόπουλος, Κ. (2012). *Ποσοτική εμπειρική έρευνα και δημιουργία στατιστικών μοντέλων.* Αθήνα: Κριτική.

Fayol, M., & Seron, X. (2005). About numerical representations: insights from neuropsychological, experimental and developmental studies. In Campbell J. I. D. (Ed.) *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 3–22). New York: Psychology Press.

Feigenson, L., & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, *97,* 295-313. DOI: 10.1016/j.cognition.2004.09.010.

Fischer, B., Gebhardt, C., & Hartnegg, K. (2008). Subitizing and Visual Counting in Children with Problems in Acquiring Basic Arithmetic Skills. *Optometry &*

*Vision Development 39*(1), 24-29. Διαθέσιμο: http://www.optomotorik.de/pubs/ovd39-1.pdf Ανασύρθηκε: 19/05/2017.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3-8. Διαθέσιμο: http://mathed.net/files/Freudenthal-1968-Why_teach_mathematics_so_as_to_be_useful.pdf Ανασύρθηκε: 20/05/2018.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., & Fletcher, J. M., (2008). Intensive Intervention for Students with Mathematics Disabilities: Seven Principles of Effective Practice. *Learning Disability Quarterly, 31*(2), 79–92. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2547080/ Ανασύρθηκε: 19/02/2015.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 4–15. Διαθέσιμο: https://pdfs.semantic scholar.org/06bd/bd4f011e9497fddfc47654116feab28b63bd.pdf Ανασύρθηκε: 30/1/2016.

Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Developmental and Behavioral Pediatrics, 32,* 250-263. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3131082/ Ανασύρθηκε: 01/04/2016.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical Cognition Deficits in Children With Learning Disabilities and Persistent Low Achievement: A Five-Year Prospective Study. *Journal of Educational Psychology, 104*(1), 206–223. DOI: 10.1037/a0025398 Διαθέσιμο: http://sites.uci.edu/dhbailey/files/2014/07/Geary-et-al.-2012-J.-Educational-

Psy.pdf Ανασύρθηκε: 10/05/2017.

Gersten, R., Chardk, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. R. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202-1242.

Godden D. R., & Baddeley A. D. (1975). Context-Dependent memory in two natural environments: on land and underwater. *British Journal of Psychology 66*(3), 325-331. Διαθέσιμο: https://pdfs.semanticscholar.org/d71d/381c6371f95b4b84baa2763f147709ab3d57.pdf Ανασύρθηκε: 04/04/2018.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning 1*(2), 155–177. Διαθέσιμο: https://www.researchgate.net/...Gravemeijer/...Emergent Ανασύρθηκε: 20/05/2018.

Griffin, C. C., & Jitendra, A. K. (2009). Word problem-solving instruction in inclusive third-grade mathematics classrooms. *The Journal of Educational Research, 102*(3), 187-202. DOI:10.3200/JOER.102.3.187-202.

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the Number Sense: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457–65. DOI: 10.1037/a0012682.

Halberda, J., Mazzocco, M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in nonverbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*(7213), 665–668. DOI: 10.1038/nature07246.

Hassinger-Das, B., Jordan, N. C., Glutting, J., Irwin, C., & Dyson, N. (2014). Domain

General Mediators of the Relation between Kindergarten Number Sense and First-Grade Mathematics Achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118, 1-32. DOI:10.1016/j.jecp.2013.09.008. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3883039/ Ανασύρθηκε: 20/05/2017.

Heiman, T., & Precel, K. (2003). Students with Learning Disabilities in Higher Education: Academic Strategies Profile. *Journal of Learning Disabilities, 36*, 248-258. Διαθέσιμο: https://pdfs.semantic scholar.org/ebe7/6a39ae6b54b4864959d08dfe2e8c6b092d71.pdf Ανασύρθηκε: 15/09/2016.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Holloway, I. D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbolic. The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(1), 17-29.

Hunt, N., & Marshall, K. (2005). *Exceptional Children and Youth*. Boston, MA: Houghton Mifflin.

Hyde, D. C. (2011). Hypothesis and theory article: Two systems of non-symbolic numerical cognition. *Frontiers in Hulicman Neuroscience, 5, 150.* DOI:10.3389/fnhum.2011.00150.

Hyde, D. C., & Spelke, E. S. (2011). Neural signatures of number processing in human infants: Evidence for two core systems underlying non-verbal numerical cognition. *Developmental Science, 14*, 360-371.

Inglis, M., Attridge, N., Batchelor, S., & Gilmore, C. (2011). Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: but only in children. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18* (6), 1222–1229. DOI: 10.3758/s13423-011-0154-1.

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., McCoey, K., Gardill, M. C., Bhat, P., & Riley, T. (1998). Effects of mathematical word problem solving by students at risk or with mild disabilities. *Journal of Education Research, 91*(6), 345-355.

Jitendra, A. K., Hoff, K., & Beck, M. M. (1999). Teaching middle school students with learning disabilities to solve word problem using a schema-based approach. *Remedial and Special Education, 20*(1), 50-64.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*, *22*, 36-46.

Καραγιαννάκης, Γ. (2018). *Οι αριθμοί ...πέρα από τους κανόνες*. Αθήνα: Πεδίο.

Kaufmann, L., Vogel, S. E., Starke, M., Kremser, C., Schocke, M., & Wood, G. (2009b). Developmental dyscalculia: compensatory mechanisms in left intraparietal regions in response to nonsymbolic magnitudes. *Behavioral Brain Functions*. *5*(35), 1-6. Doi: 10.1186/1744-9081-5-35. Διαθέσιμο: https://www.researchgate.net/publication/26716155_Developmental_dyscalculia_Compensatory_mechanisms_in_left_intraparietal_regions_in_response_to_nonsymbolic_magnitudes. Ανασύρθηκε: 15/04/2016.

Kalantzis, M., & Cope, B. (2013). *Βασικές αρχές για την επιστήμη της εκπαίδευσης*. (Μτφρ. Γ. Χρηστίδης, Επιμ. Ε. Αρβανίτη). Αθήνα: Κριτική.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Krawec, J. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities, 47*(2), 103-115. DOI: 10.1177/0022219412436976.

Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2016). The Source of the Symbolic Numerical Distance and Size Effects. *Frontiers in Psychology, 7*, 1-16. DOI: 10.3389/fpsyg.2016.01795. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5116562/ Ανασύρθηκε 15/05/2017.

Kucian, K., & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *Europian Journal of Pediatrics, 174*(1), 1-13. DOI: 10.1007/s00431-014-2455-7.

Kyttälä, M., Aunio, P. & Hautamäki, J. (2010). Working memory resources in young children with mathematical difficulties. *Scandinavian Journal of Psychology, 51*, 1–15. DOI: 10.1111/j.1467-9450.2009.00736.x.

Κωνσταντίνου, Μ., & Κοσμίδου, Μ. (2011). *Νευροψυχολογία των μαθησιακών διαταραχών.* Αθήνα: Παρισιάνου.

Landerl, K. (2013). Development of numerical processing in children with typical and dyscalculic arithmetic skills – a longitudinal study. *Frontiers in Psychology, 459*, 1 -14.

Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students. *Cognition, 93*, 99–125. Διαθέσιμο: http://www.mathematicalbrain.com/pdf/LANDETAL.PDF Ανασύρθηκε: 20/05/2017.

Landerl, K., Fussenegger, B., Moll, K., & Willburger, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: two learning disorders with different cognitive profiles *Journal of Ex-*

*perimental Child Psychology*, *103*, 309-324.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Lefevre, J. A., Berrigan, L., Vendetti, C., Kamawar, D., Bisanz, J., Skwarchuk, S. L, & Smith-Chant, B. L. (2013). The role of executive attention in the acquisition of mathematical skills for children in Grades 2 through 4. *Journal of Experimental Child Psychology***,** *114*(2), 243-61. DOI: 10.1016/j.jecp.2012.10.005.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2006α). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2006β). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2006γ). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Τετράδιο Εργασιών Μαθητή, α΄ τεύχος*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2006δ). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Τετράδιο Εργασιών Μαθητή, β΄ τεύχος*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη : Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ. (2016, 2017). *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής*. Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη.

Libertus, M. E. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science*, *14*(6), 1292–1300. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x.

Libertus, M. E., Feigenson, & Halberda, J. (2013). Is Approximate Number Precision a Stable Predictor of Math Ability? *Learning and Individual Differences, 25,* (126–33). DOI: 10.1016/j.lindif.2013.02.001. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3692560/ Ανασύρθηκε: 15/05/2017.

Libertus, M. E., Starr, A., & Brannon, E. M. (2014). Number trumps area for 7-month-old infants. *Developmental Psychology*, *50*(1), 108–112. DOI: 10.1037/a0032986.

Logie, R. H. (1995). *Visual – spatial working memory*. Howe, UK: Phychology Press.

Lyons, I. M., Ansari, D., & Beilock, S. L. (2012). Symbolic Estrangement: Evidence Against a Strong Association Between Numerical Symbols and the Quantities They Represent. *Journal of Experimental Psychology: General*, *141*, 635-641.

McCaskey, U., von Aster, M., Maurer, U., Martin, E., O'Gorman, T. R, & Kucian, K. (2018). Longitudinal Brain Development of Numerical Skills in Typically Developing Children and Children with Developmental Dyscalculia. *Frontiers in Human Neuroscience*, *11*(629), 1-15. DOI: 10.3389/fnhum.2017.00629. Διαθέσιμο:https://www.researchgate.net/publication/322250626_Longitudinal_Brain_Development_of_Numerical_Skills_in_Typically_Developing_Children_and_Children_with_Developmental_Dyscalculia. Ανασύρθηκε: 18/09/2019.

Μάνιου – Βακάλη, Μ. (1995). *Ψυχολογία: Μάθηση, Μνήμη, Λήθη*. Θεσσαλονίκη: Γραφικές Τέχνες

Mammarella, I. C., Hill, F., Devine, A., Caviola, S., & Szűcs, D. (2015). Math anxiety and developmental dyscalculia: A study on working memory processes *Journal of clinical and experimental neuropsychology*, *37*(8), 878-887. DOI: 10.1080/13803395.2015.1066759.

Mazza, V., & Caramazza A. (2015). Multiple object individuation and subitizing in enumeration: a view from electrophysiology. *Frontiers in Human Neuroscience*, *9*, 162. DOI: 10.3389/fnhum.2015.00162. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4382968/ Ανασύρθηκε: 21/05/2017.

Mazzocco, M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011a). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development*, *82*, 1224–1237. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x.

Mazzocco, M. M., & Kover, S. T. (2007). A longitudinal assessment of executive function skills and their association with math performance. *Child Neuropsychology*, *13*, 18-45. DOI: 10.1080/09297040600611346.

McLean, J. F., & Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties, *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 240-260.

Mejias, S., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2012). Numerical estimation in adults with and without developmental dyscalculia. *Learning and Individual Differences*, *22*(1), 164–170.

Mertens, D. M. (2009). *Έρευνα και αξιολόγηση στην εκπαίδευση και την ψυχολογία.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Meyer, M. L., Salimpoor, V. N., Wu, S. S., Geary, D. C., & Menon, V. (2010). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 101–109. DOI: 10.1016/j.lindif.2009.08.004.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*, 81–97.

Miyake, A., Friedman, N. P., Emerson, M. J., Witzki, A. H., Howerter, A., & Wagner, T. (2000). “The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex "frontal lobe" tasks: A latent variable analysis". *Cognitive Psychology, 41*(1), 49–100. DOI:10.1006/cogp.1999.0734.

Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, Μ. (1999). Τι γνωρίζουν οι δάσκαλοι και οι δασκάλες για τα Προβλήματα Πρόσθεσης και Αφαίρεσης. Στο Gagatsis, A. et. al (Ed.) *Proccedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 305-307). Nicosia Cyprus.

Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, Μ., Γουναροπούλου, Μ, & Βαμβουλή, Α. (2016). Η Συμβολή της Λεκτικής και Εικονιστικής Αναπαράστασης στην Επίλυση Δραστηριοτήτων Στατιστικής σε μαθητές Α΄ και Β΄ τάξης Γυμνασίου. *Πρακτικά 33ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Χανιά σελ 177-184.

Mou, Y., & vanMarle, K. (2014). Two core systems of numerical representation in infants. *Developmental Review, 34,* 1-25.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature, 215*(5109), 1519–1520.

Mussolin, C., Mejias, S., & Noël, M. (2010b). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, *115*(1), 10–25. DOI: 10.1016/j.cognition.2009.10.006.

Mussolin, C., Nys, J., Content, A., & Leybaert, J. (2014). Symbolic Number Abilities predict later Approximate Number System Acuity in preschool children. PLoS ONE, *9* (3), e91839. DOI: 10.1371/journal.pone.0091839.

Nath, S., & Szücs, D. (2014). Construction play and cognitive skills associated with the development of mathematical abilities in 7-year-old children. *Learning and Instruction, 32,* 72-80. Διαθέσιμο: https://www.researchgate.net/publication/260156225_Construction_play_and_cognitive_skills_associated_with_the_development_of_mathematical_abilities_in_7-year old_children Ανασύρθηκε: 20/05/2017.

Neisser, U. (1967). *Cognitive psychology*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall

Νικολουδάκης, Ε. (2009). *Διδακτικά μοντέλα και οι τρόποι αλληλεπίδρασης καθηγητού και μαθητών στη διδασκαλία των μαθηματικών: συνδυάζοντας τις φάσεις της θεωρίας του Van Hiele με τις μεθόδους της γνωστικής μαθητείας. Ένα διδακτικό μοντέλο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε μαθητές της Α΄ Λυκείου.* Διδακτορική Διατριβή: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Noël, M. P., & Rousselle, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: An explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience, 5*, 165. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3243900/ Ανασύρθηκε: 10/09/2016.

Novak, J. D. (1998). *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept maps as facilitative tools for schools and corporations*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum & Assoc.

Odic, D., Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Developmental change in the acuity of approximate number and area representations. *Developmental Phychology, 49*(6), 1103-1112. DOI: 10.1037/a0029472. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4388157/ Ανασύρθηκε:

20/05/2017.

Olsson, L., Östergren, R., & Träff, U. (2016). Developmental dyscalculia: A deficit in the approximate number system or an access deficit? *Cognitive Development,* *39,* 154-167. Διαθέσιμο: https://www.researchgate.net/publication/303635478_Developmental_dyscalculia_A_deficit_in_the_approximate_number_system_or_an_access_deficit Ανασύρθηκε: 12/05/2017.

Östergren, R., & Träff, U. (2013). Early number knowledge and cognitive ability affect early arithmetic ability. *Journal of Experimental Child Psychology, 115*(3), 405–421. DOI: 10.1016/j.jecp.2013.03.007.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση.* Διαθέσιμο: http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C.pdf Ανασύρθηκε: 15/02/2017.

Παπαδάτος, Ι. (2011). *Ψυχοφυσιολογία.* Αθήνα: Παρισιάνου.

Παπαϊωάννου, Σ., Μουζάκη, Α., Σιδερίδης, Γ. & Σίμος, Π. (2010). *Η Ανιχνευτική Δοκιμασία Μαθηματικής Επίδοσης (ΑΔΜΕ) για Μαθητές του Δημοτικού.* Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ειδικής Αγωγής, Αθήνα, 15-18 Απριλίου 2010.

Παπαναστασίου, Ε., & Παπαναστασίου, Κ. (2016). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας,* (3η έκδ.). Έκδοση: Ιδιωτική.

Παρασκευόπουλος, Ι. (1985). *Ψυχολογική θεώρηση της πορείας της ζωής από τη σύλ-*

*ληψη ως την ενηλικίωση: Σχολική ηλικία.* Έκδοση: Ιδιωτική.

Παρασκευόπουλος, Ι., Καλαντζή – Αζίζι, Α., & Γιαννίτσας, Ν. (1999). *Αθηνά Τεστ Διάγνωσης Δυσκολιών Μάθησης, Δομή και Χρησιμότητα* (εκδ. αναθ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Parsons, S., & Bynner, J. (2006). *Does Numeracy Matter? Evidence from the National Child Development Study on the Impact of Poor Numeracy on Adult Life.* National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy. Διαθέσιμο: http://eprints.ioe.ac.uk/4758/1/parsons2006does.pdf Ανασύρθηκε: 16/09/2016.

Passolunghi, M. C., & Mammarella, I. C. (2012). Selective spatial working memory impairment in a group of children with mathematics learning disabilities and poor problem-solving skills. *Journal of Learning Disabilities*, *45*(4), 341–50.

Peng, P., & Fuchs, D. (2014). A Meta-Analysis of Working Memory Deficits in Children With Learning Difficulties: Is There a Difference Between Verbal Domain and Numerical Domain? *Journal of Learning Disabilities*. DOI: 10.1177/0022219414521667.

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., & Sun, C. Y. (2016). A meta-analysis of mathematics and working memory: Moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. *Journal of Educational Psychology*, *108*(4), 455–473. http://dx.doi.org/10.1037/edu0000079.

Pessoa, L., & Desimone, R. (2003). From Humble Neural Beginnings Comes Knowledge of Numbers. *Neuron*, *37* (1), 4–6. doi: 10.1016/s0896-6273(02)01179-0. Διαθέσιμο: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0896627302011790 Ανασύρθηκε: 15/04/2017.

Peterson, R. L., & Pennington, B. F. (2012). Developmental dyslexia. *The Lancet, 379*(9830), 1997-2007. DOI: 10.1016/S0140-6736(12)60198-6.

Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Science, 14,* 542-551. Διαθέσιμο: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.185.3403&rep=rep1&type=pdf Ανασύρθηκε: 15/05/2017.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition, 116*(1), 33–41. Διαθέσιμο: http://www.unicog.org/publications/Piazza_ANSInDyscalculia_Cognition2010.pdf: Ανασύρθηκε: 14/05/2015.

Piazza, M., Fumarola, A., Chinello, A., & Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, *121*, 147–153. http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2011.05.007

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, USA: Princeton University Press.

Popper, K. (1968). *Conjectures and refutations.* New York: Harper.

Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2002). *Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας. Ολική προσέγγιση.* Τόμος Α. Αθήνα: Έκδοση Ιδιωτική.

Raven, C. J. (2015). *Raven's Educational CPM/CVS.* Μοτίβο Εκδοτική (μτφ.) Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Ελληνικής Στάθμισης: Γ. Σιδερίδης, Φ. Αντωνίου, Α. Μουζάκη, & Π. Σίμος. Αθήνα: Μοτίβο Εκδοτική.

Riccomini, P. J., Hwang, J., & Morano, S. (2016). Chapter 3: Developing Mathematical Problem Solving through Strategic Instruction: Much More Than a Key-word. In *Advances in Learning and Behavioral Disabilities* (pp. 39-60). (Advances in Learning and Behavioral Disabilities, Vol. 29). Emerald Group Publishing Ltd.

Rosenshine, B. (2012). Principles of Instruction: Research-Based Strategies that All Teachers Should Know. *American Educator 78*(3), 30-40. Διαθέσιμο: https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/Rosenshine.pdf Ανασύρθηκε: 15/04/2018.

Rousselle, L., & Noël, M. P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: a comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition, 102*(3), 361–395. DOI: 10.1016/j.cognition.2006.01.005.

Σακονίδης, Χ. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Προτάσεις για την αξιοποίηση του διδακτικού υλικού.* Αθήνα: Υ.ΠΑΙ.Θ.Α - ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ: Πρόγραμμα Εκπαίδευσης Μουσουλμανοπαίδων 2005 – 2007.

Σαλβαράς, Γ. (2011). *Διδακτική μεθοδολογία: Αντιμετώπιση δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά Γ΄ και Δ΄ τάξεων δημοτικού σχολείου.* Αθήνα: Ατραπός.

Σαλβαράς, Γ., & Σαλβαρά, Μ. (2011). *Μοντέλα και Στρατηγικές Διδασκαλίας. Κατασκευή και χρήση «εργαλείων» διδασκαλίας.* Αθήνα: Διάδραση.

Σαλβαράς, Γ. (2013α). *Αξιολόγηση Προγραμμάτων.* Αθήνα: Γρηγόρη.

Σαλβαράς, Γ. (2013β). *Μεντορική. Παιδαγωγική και Διδακτική Υποστήριξη*. Αθήνα: Γρηγόρη.

Schleifer, P., & Landerl, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science, 14*(2), 280–291.

Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. (1977). Children's Judgments of Numerical Inequality. *Child Development, 48*(2), 630-633. DOI: 10.2307/1128664.

Sharma, Y. (2016). Alleviating mathematics anxiety of elementary school students: A situated perspective. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES),* *2*(2), 509-517. Διαθέσιμο: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1110268.pdf Ανασύρθηκε: 05/04/2018.

Skagerlund, K., & Träff, U. (2014). Development of magnitude processing in children with developmental dyscalculia: space, time, and number. *Frontiers in Psychology, 5,* 675-690. DOI: 10.3389/fpsyg.2014.00675. Διαθέσιμο: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4073420/ Ανασύρθηκε: 10/05/2017.

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Schmidt, S. S., Stricker, J., et al. (2016). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. *Developmental Science*, *1*(16). http://dx.doi.org/10.1111/desc.12372.

Sowinski, C., LeFevre, J. A., Skwarchuk, S. L., Kamawar, D., Bisanz, J., & Smith-Chant, B. (2015). Refining the quantitative pathway of the Pathways to Mathematics model. *Journal of Experimental Child Psychology*, *131*, 73–93. DOI: 10.1016/j.jecp.2014.11.004.

Στασινός, Δ. (2013). *Η Ειδική Εκπαίδευση 2020. Για μια Συμπεριληπτική ή Ολική Εκπαίδευση στο Νέο-ψηφιακό Σχολείο με Ψηφιακούς Πρωταθλητές*. Αθήνα: Παπαζήση.

Στασινός, Δ. (2015). *Ψυχολογία του Λόγου και της Γλώσσας: Ανάπτυξη και Παθολογία, Δυσλεξία και Λογοθεραπεία*. Αθήνα: Gutenberg.

Szucs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2013a). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex, a Journal Devoted to the Study of the Nervous System and Behavior*, *49*(10), 2674–2688. DOI:10.1016/j.cortex.2013.06.007.

Szücs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2014). Cognitive components of a mathematical processing network in 9-year-old children. *Developmental Science, 17*(4), 506-524. DOI: 10.1111/desc.12144. Διαθέσιμο: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/desc.12144/full Ανασύρθηκε: 20/05/2017.

Szűcs, D. (2016). Subtypes and comorbidity in mathematical learning disabilities: multidimensional study of verbal and visual memory processes is key to understanding. In B. R. Fias (Eds.), *The Mathematical brain across the lifespan* (Vol. 227, pp. 277–304). Elsevier. https://doi.org/10.1016/bs.pbr.2016.04.027

Thornton, C. A., & Tucker, S. C. (1989). Lesson planning: the key to developing number sense. *The Arithmetic Teacher, 36* (6), 18-21.

Vallar, G., Di Betta, A. M., & Silveri, M. C. (1997). The phonological short term store-rehearsal system: Patterns of impairment and neural correlates. *Neuropsychologia*, *35*(6), 795-812. DOI: 10.1016/S0028-3932(96)00127-3.

van der Sluis, S., de Jong P. F., & van der Leij, A. (2004). Inhibition and shifting in children with learning deficits in arithmetic and reading. *Journal of Experimental Child Psychology*, *87*(3), 239-266. DOI: 10.1016/j.jecp.2003.12.002.

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο*. (Μτφρ. Α. Αλεξανδροπούλου, & Β. Κομπορόζος, Επιμ. Τ. Α. Τριανταφυλλίδης). Αθήνα: Τυπωθήτω.

van Garderen, D. (2007). Teaching students with learning disabilities to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities, 40*(6), 540-553.

van Garderen, D., Scheuermann, A., Poch, A. (2016). Visual Representation in Mathematics: Special Education Teachers' Knowledge and Emphasis for Instruction. *The Journal of the Teacher Education Division of the Council for Exceptional Children, 41*(1), 5-6.

Vygotsky, L. S. (1978/1930). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press. (Original work published 1930.) Διαθέσιμο: http://ouleft.org/wp-content/uploads/Vygotsky-Mind-in-Society.pdf Ανασύρθηκε: 04/05/2018.

Wilson, A. J., & Dehaene, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. In D. Coch, G. Dawson, & K. Fischer (Eds.), *Human behavior, learning and the developing brain: Atypical development*. New York: Guilford Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976) The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 17*, 89–100. Διαθέσιμο: https://acamh.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.14697610.1976.tb00381.x?globalMessage=0. Ανασύρθηκε: 27/07/2020.

Wynn, K. (1992). Addition and Subtraction by Human Infants. *Letters to nature, 358,* 748-750. DOI: 10.1038/358749a0. Διαθέσιμο: https://www.researchgate.net/publication/21647991_Addition_and_Subtraction_by_Human_Infants Ανασύρθηκε: 05/04/2018.

Χατζηχρήστου, Χ. (2011). *Σχολική Ψυχολογία.* Αθήνα: Τυπωθήτω.

**Παράρτημα 1**

**Τεστ μαθηματικής επίδοσης**

**Όνομα μαθητή:………………………….. Ημερομηνία…………….**

**(α) Γραπτοί υπολογισμοί πρόσθεσης και αφαίρεσης (χρόνος 10΄).**

Υπολόγισε τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων με όποιο τρόπο θέλεις (οριζόντια ή κάθετα ή με το μυαλό σου):

8 + 9 + 7 =

36 + 13 =

18 + 37 =

25 + 62 + 6 =

20 + 34 + 29=

27 + 35 + 23 =

7) 28 – 6 =

8) 48 – 27 =

9) 60 – 39 =

10) 92 – 15 =

11) 100 - 6 =

12) 100 – 62 =

**(β) Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (χρόνος 15΄).**

Λύσε τα παρακάτω προβλήματα:

13) Η μητέρα της Ευτυχίας έφτιαξε μέχρι τώρα 23 κουλουράκια. Πόσα πρέπει να φτιάξει ακόμη για να φτάσει τα 40;

Λύση

14) Η Ράνια χθες διάβασε 45 σελίδες από το αγαπημένο της παραμύθι. Σήμερα διάβασε 9 λιγότερες. Πόσες σελίδες διάβασε και τις δύο ημέρες μαζί;

Λύση

15) Η Βίκυ έχει 20 λεπτά, 10 λεπτά, 5 λεπτά. Πόσα λεπτά του € χρειάζεται ακόμη για να φτάσει τα 50 λεπτά;

Λύση

16) Η Ειρήνη είχε 50 €. Αγόρασε δώρα για τα αδέλφια της που έκαναν 34 €. Πόσα € της περίσσεψαν;

Λύση

17) Η Ράνια είχε 48 €. Έδωσε στην αδελφή της 10 € που της χρωστούσε και στη φίλη της 8 €. Με τα υπόλοιπα αγόρασε ένα δώρο για τη γιαγιά της με 15 €. Πόσα € της περίσσεψαν;

Λύση

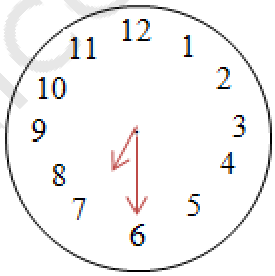
18) Η Ιωάννα αγόρασε 4 δώρα για τους φίλους της και πλήρωσε 36 €. Πόσα χρήματα έδωσε για το κάθε δώρο;

Λύση

19) Ο Πέτρος διάβασε από ένα βιβλίο τη σελίδα 199, την προηγούμενη σελίδα και την επόμενη. Μπορείς να βρεις ποιες σελίδες διάβασε;

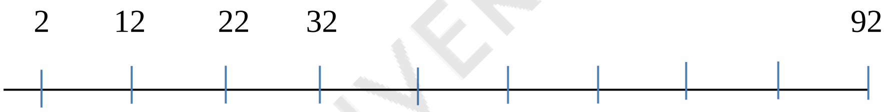
Λύση

20) Η Λαμπρινή ξυπνάει κάθε μέρα στις 7 ακριβώς. Σήμερα όμως το πρωί κοιμήθηκε λίγο παραπάνω. Δες το ρολόι και γράψε τι ώρα ξύπνησε.




Απάντηση:

21) Μπορείς να συνεχίσεις το αριθμητικό μοτίβο;




22) Η Χρυσάνθη σχεδίασε τα παρακάτω γεωμετρικά σχήματα. Μπορείς να γράψεις κάτω από κάθε σχήμα πώς ονομάζεται;

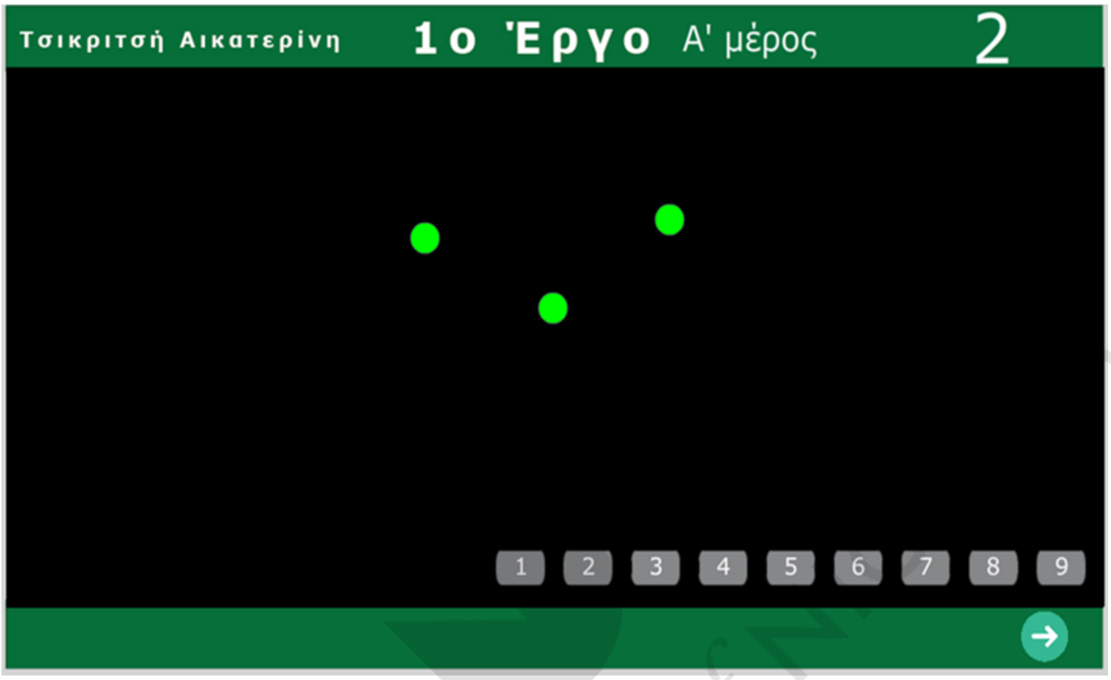
…………….. ………………………….. …………… ……………….

**(γ) Αριθμητική ευχέρεια στην πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό (ταχύτητα απλών υπολογισμών σε 3΄ λεπτά).**

Γράψε γρήγορα τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων κάνοντας τις πράξεις με το νου σου.

| Προσθέσεις | Αφαιρέσεις | Πολλαπλασιασμοί |
|---|---|---|
| 23) 7 + 2 = | 38) 9 – 6 = | 53) 2 X 8 = |
| 24) 3 + 8 = | 39) 9 – 3 = | 54) 5 X 9 = |
| 25) 5 + 8 = | 40) 7 – 2 = | 55) 6 X 3 = |
| 26) 2 + 4 = | 41) 7 – 3 = | 56) 4 X 6 = |
| 27) 5 + 4 = | 42) 8 – 4 = | |
| 28) 6 + 3 = | 43) 8 – 5 = | |
| 29) 4 + 9 = | 44) 9 – 6 = | |
| 30) 4 + 7 = | 45) 9 – 0 = | |
| 31) 2 + 9 = | 46) 6 – 4 = | |
| 32) 6 + 7 = | 47) 7 – 6 = | |
| 33) 5 + 7 = | 48) 4 – 3 = | |
| 34) 8 + 9 = | 49) 8 – 2 = | |
| 35) 0 + 6 = | 50) 9 – 4 = | |
| 36) 3 + 9 = | 51) 7 – 4 = | |
| 37) 7 + 8 = | 52) 4 – 0 = | |

**Παράρτημα 2**


Τσικριτσή Αικατερίνη
1ο Έργο Α' μέρος
2
1 2 3 4 5 6 7 8 9


Τσικριτσή Αικατερίνη
1ο Έργο Α' μέρος
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Πόσους πράσινους κύκλους είδες;

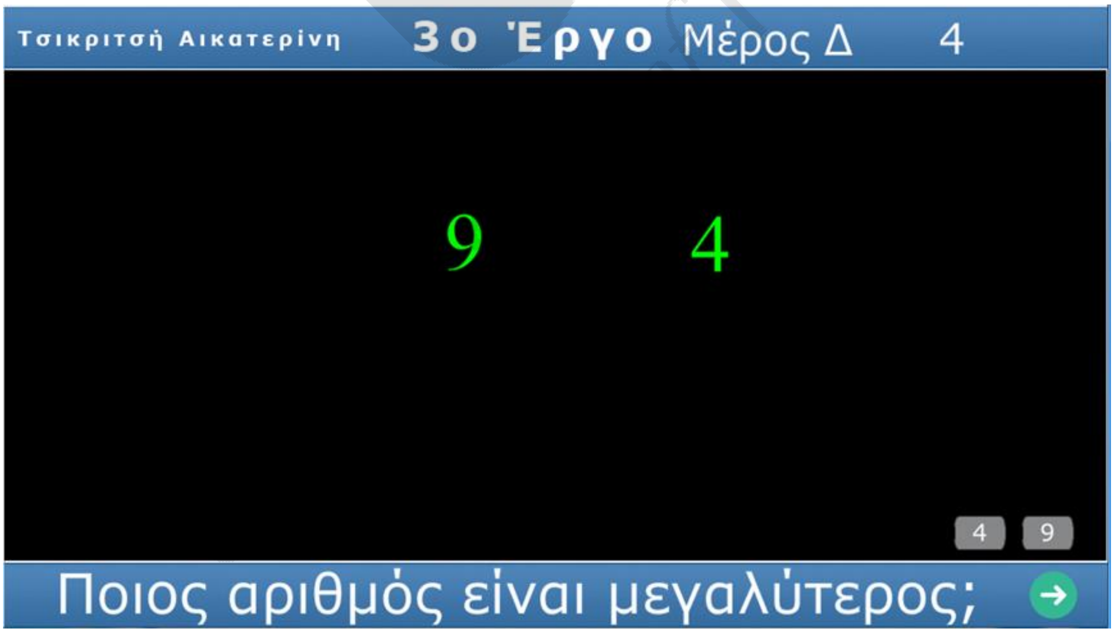
**Παράρτημα 3**


Τσικριτσή Αικατερίνη
2ο Έργο
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Πόσες κουκκίδες βλέπεις;


Τσικριτσή Αικατερίνη
2ο Έργο
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Πόσες κουκκίδες βλέπεις;

**Παράρτημα 4**


Τσικριτσή Αικατερίνη
3ο Έργο Μέρος Β 5
6 5
5 6
Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;


Τσικριτσή Αικατερίνη
3ο Έργο Μέρος Δ 4
9 4
4 9
Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;

**Παράρτημα 5**


Τσικριτσή Αικατερίνη
4ο Έργο Μέρος Α 1
20 21
20
21
Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;

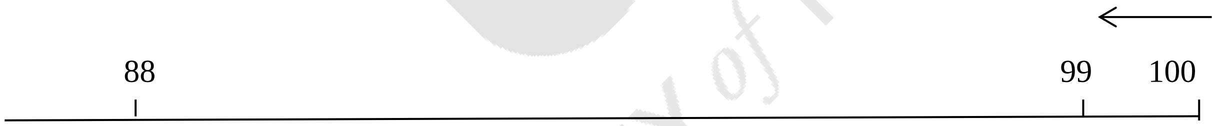

Τσικριτσή Αικατερίνη
4ο Έργο Μέρος Α 2
35 31
35
31
Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;

**Παράρτημα 6**

Αντίστροφη καταμέτρηση και εκτίμηση στην αριθμογραμμή

Συμπληρώνω τους αριθμούς στην άδεια αριθμογραμμή μετρώντας αντίστροφα. Ξεκινώ την αντίστροφη καταμέτρηση από το 20, όπως δείχνει το βέλος και σταματώ στον αριθμό 8.


Συμπληρώνω τους αριθμούς στην άδεια αριθμογραμμή μετρώντας αντίστροφα. Ξεκινώ την αντίστροφη καταμέτρηση από το 100, όπως δείχνει το βέλος και σταματώ στον αριθμό 88.

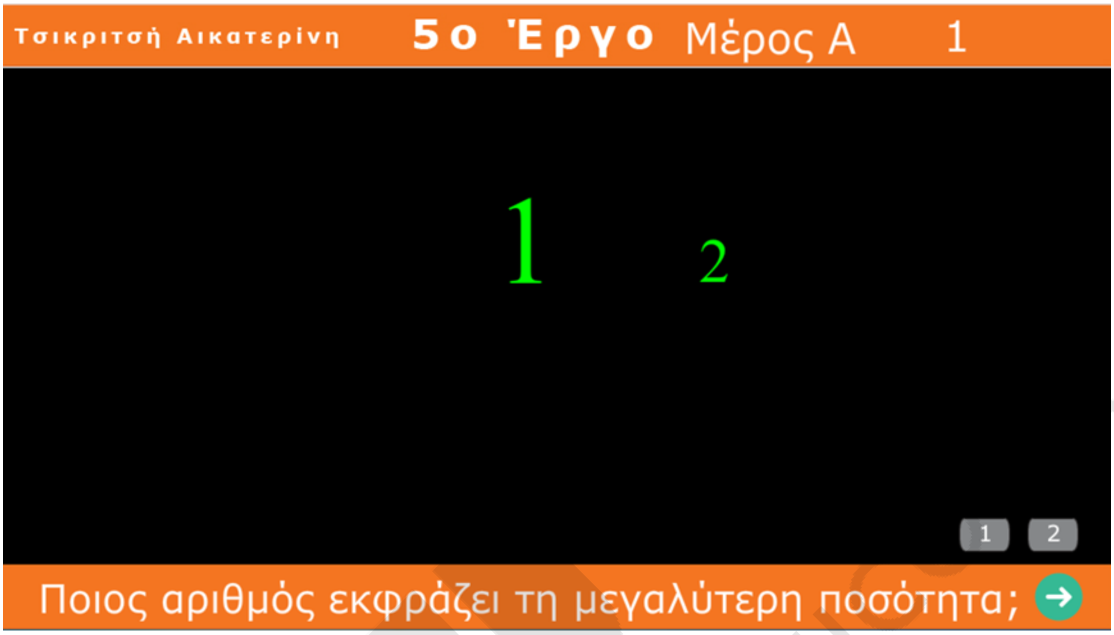


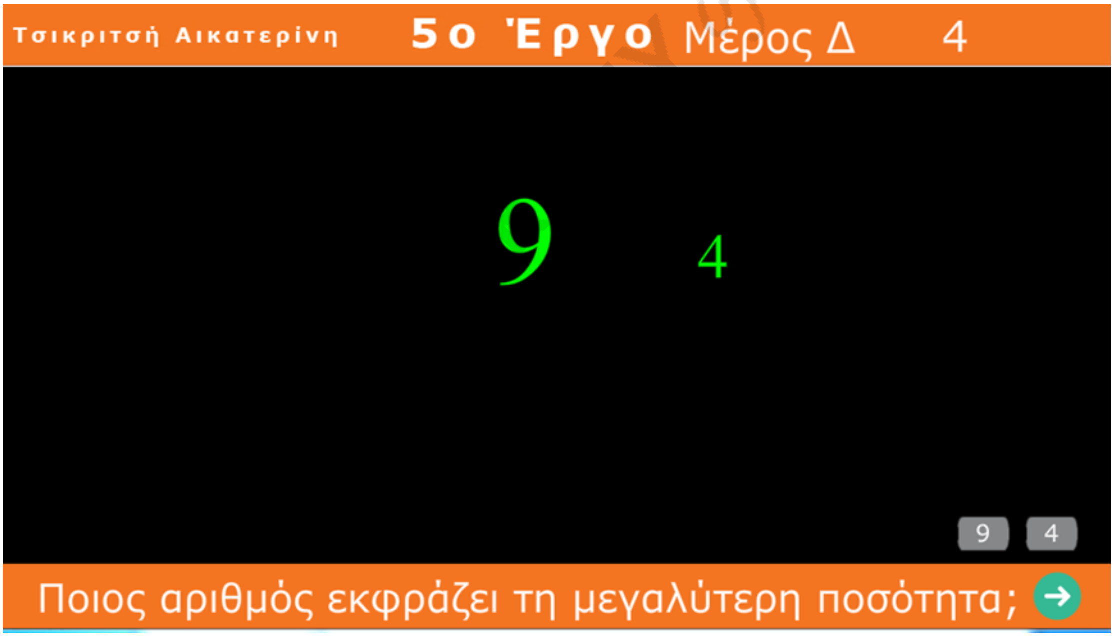
**Παράρτημα 7**

| | | |
|---|---|---|
| Μνήμη Αριθμών | | |
| Επίπεδο Δυσκολίας | Δοκιμή σε κάθε επίπεδο | Αριθμοί προς ανάκληση |
| 1ο | 1η | 4-3-3 |
| | 2η | 5-2-6 |
| 2ο | 1η | 4-3-5-5 |
| | 2η | 4-1-7-2 |
| 3ο | 1η | 3-1-7-2-2 |
| | 2η | 5-5-1-4-9 |
| 4ο | 1η | 6-1-4-3-8 |
| | 2η | 5-9-6-1-7 |
| 5ο | 1η | 8-1-7-6-4-4 |
| | 2η | 8-1-2-0-9-6 |
| 6ο | 1η | 4-7-3-1-8-5-5 |
| | 2η | 7-3-6-9-8-0-2 |

| | | |
|---|---|---|
| Μνήμη Λέξεων | | |
| Επίπεδο Δυσκολίας | Δοκιμή σε κάθε επίπεδο | Λέξεις για σειριακή ανάκληση |
| 1ο | 1η | Γάτα, αυτοκίνητο |
| | 2η | Γάλα, λιοντάρι |
| 2ο | 1η | Χτένα, σκύλος, ρινόκερος |
| | 2η | Αγελάδα, μέλι, ψωμί |
| 3ο | 1η | Αχλάδι, μήλο, χτένα, κότα |
| | 2η | Πεπόνι, χήνα, λύκος, νερό |
| 4ο | 1η | Βάτραχος, πέτρα, καμήλα, βροχή, μύτη |
| | 2η | Λάδι, στόμα, μαϊμού, τοίχος, κουτί |
| 5ο | 1η | Άμμος, δίχτυ, βάρκα, γάιδαρος, πρόβατο, κουπί |
| | 2η | Τυρί, τίγρης, κύκλος, ιπποπόταμος, ζέβρα, στολή |
| 6ο | 1η | Λαγός, κύκνος, φάλαινα, νυφίτσα, παγώνι, περιστέρι, ποντίκι |
| | 2η | Πάρκο, παγωτό, καπνός, ρολόι, κήπος, γραμμή, μωρό |

**Παράρτημα 8**

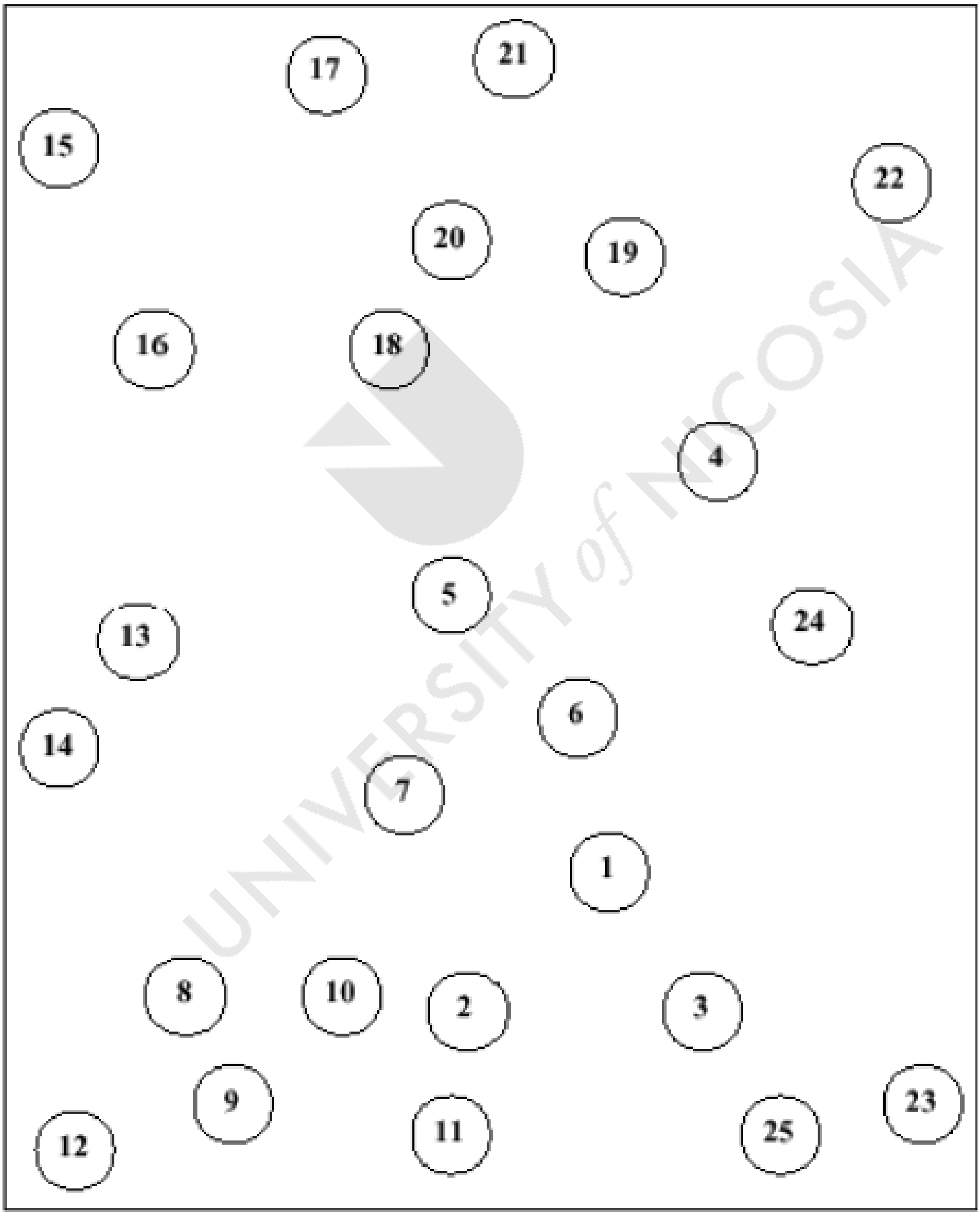

Τσικριτσή Αικατερίνη
5ο Έργο Μέρος Α 1
1
2
1
2
Ποιος αριθμός εκφράζει τη μεγαλύτερη ποσότητα;


Τσικριτσή Αικατερίνη
5ο Έργο Μέρος Δ 4
9
4
9
4
Ποιος αριθμός εκφράζει τη μεγαλύτερη ποσότητα;

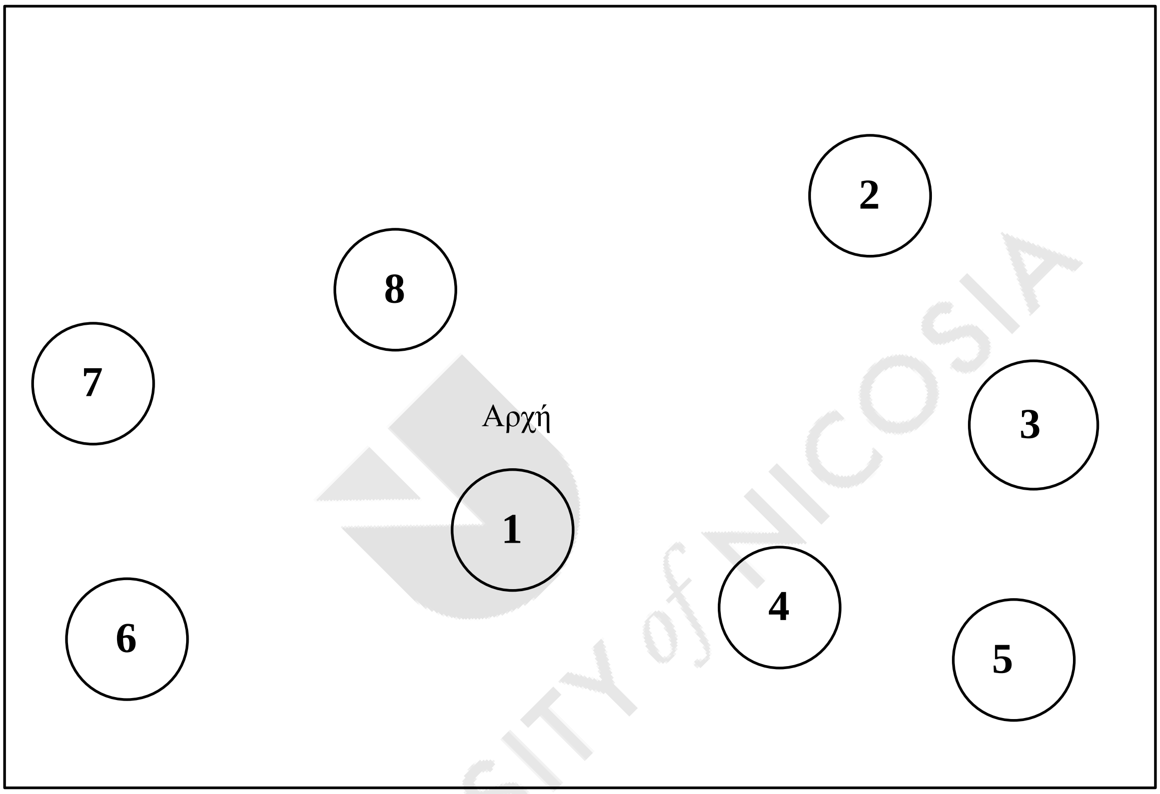
**Παράρτημα 9**

## Trail Making Test Μέρος Α

**Όνομα μαθητή:…………………………………** **Ημερομηνία:……………**

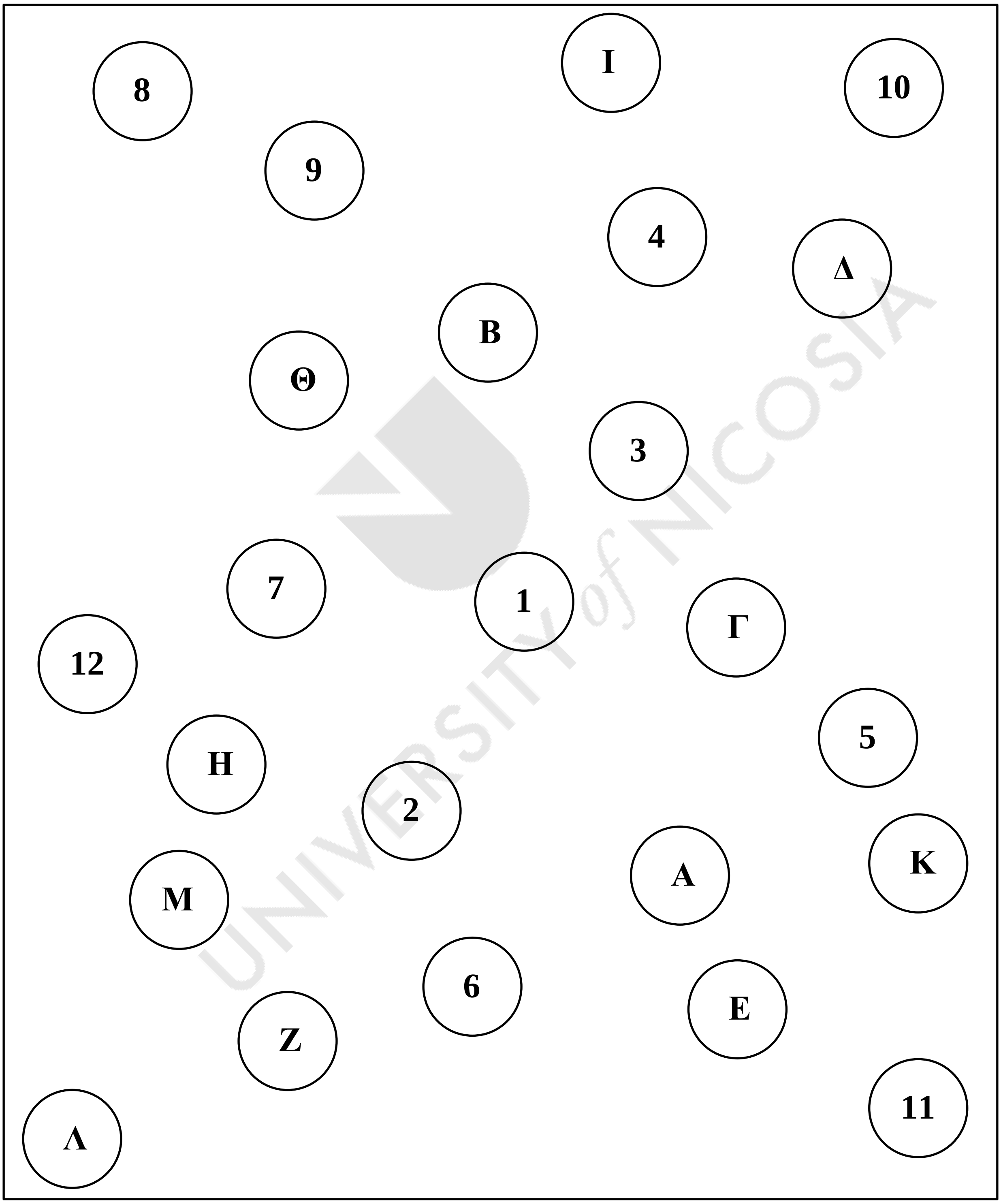


**Trail Making Test Μέρος Α - Δείγμα**

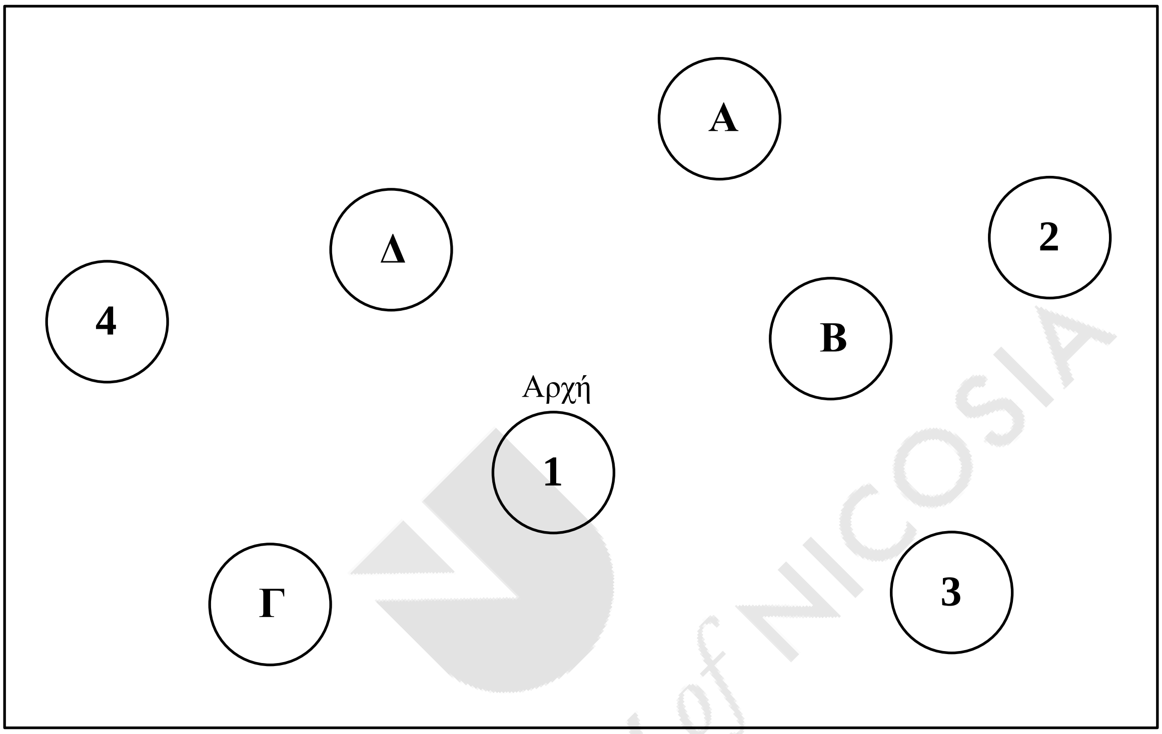


**Trail Making Test Μέρος Β**

**Όνομα μαθητή:………………………..** **Ημερομηνία:……………**



**Trail Making Test Μέρος Β - Δείγμα**



**Παράρτημα 10**

| Τάξη | Άξονες γνωστικού περιεχομένου | Γενικοί στόχοι |
|---|---|---|
| Γ΄ | Επίλυση προβλημάτων | Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες.<br>Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση.<br>Να ερευνούν προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις.<br>Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του.<br>Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης.<br>Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα.<br>Να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσοτέρων λύσεων.<br>Να αξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία. |
| | Αριθμοί και πράξεις | Να απαγγέλλουν, να διαβάζουν και να διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 10.000.<br>Να εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμούς που δεν ξεπερνούν το 1.000.<br>Να γνωρίσουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς.<br>Να εξοικειωθούν με τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης φυσικών αριθμών. |
| | Μετρήσεις | Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τις μονάδες μέτρησης μήκους, χρόνου και μάζας.<br>Να αναγνωρίζουν ένα μοτίβο και να διαπιστώνουν ότι η διαδικασία επανάληψης συνεχίζεται επ’ άπειρον. |
| | Γεωμετρία | Να εξασκούνται στην περιγραφή, αναπαραγωγή και σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων καθώς και στην εφαρμογή τεχνικών σχεδίασης κάθετων ευθειών με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων.<br>Να γνωρίσουν τις έννοιες κορυφή, ακμή, ορθή γωνία και έδρα.<br>Να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα. |

**Παράρτημα 11**

**Προτέστ και μετατέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση**

**Όνομα μαθητή:………………………. Ημερομηνία:………………….**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) 2 6 4 | (2) 3 4 8 | (3) 4 5 3 | (4) 3 5 8 | (5) 2 5 3 | (6) 1 2 4 |
| + 3 2 7 | + 4 4 2 | + 2 6 2 | + 2 7 1 | + 3 4 7 | + 3 8 8 |

Βάλε ένα ***v*** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (7) 4 6 7 | (8) 3 0 8 | (9) 2 4 2 | (10) 3 4 7 |
| + 3 3 2 □ | + 2 7 5 □ | + 2 9 4 □ | + 1 8 2 □ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις**:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (11) 3 4 5 | (12) 2 4 5 | (13) 9 6 7 | (14) 8 9 3 | (15) 7 9 4 | (16) 3 6 0 |
| - 1 3 6 | - 1 2 7 | - 3 0 9 | - 3 6 6 | - 2 7 8 | - 1 5 8 |

Βάλε ένα ***v*** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (17) 7 9 8 | (18) 7 8 8 | (19) 8 6 4 | (20) 7 4 4 |
| - 3 5 2 □ | - 1 6 7 □ | - 2 5 5 □ | - 3 2 7 □ |

**Παράρτημα 12**

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 1** **Βαθμός επίδοσης: 5/20**

**Όνομα μαθητή:** ........ **Ημερομηνία:** ........

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 1 | 453 | 358 1 | 253 1 | 124 1 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 580 | 880 | 605 | 512 | 580 | 102 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☐ | +294 ☐ | +182 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 1 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 468 | 362 | 260 | 120 | 934 | 408 |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☐ | -167 ☑ | -255 ☑ | -327 ☐ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 2** **Βαθμός επίδοσης: 2/20**

**Όνομα μαθητή:…** **Ημερομηνία:…**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 887 | 880 | 725 | 819 | 890 | 892 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☑ | +275 ☑ | +294 ☐ | +182 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 289 | 018 | 568 | 427 | 416 | 218 |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☑ | -167 ☑ | -255 ☐ | -327 ☑ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 3** **Βαθμός επίδοσης: 6/20**

**Όνομα μαθητή:..............................** **Ημερομηνία:...........**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 1 | +442 1 | +262 | +271 | +347 1 | +388 1 |
| 5811 | 790 | 6115 | 5129 | 590 | 4102 |

Βάλε ένα ***V*** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☑ V | +294 ☐ | +182 ☐ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 1 | 245 1 | 967 1 | 893 1 | 794 1 | 360 1 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 289 | 128 | 368 | 537 | 26 | 218 |

Βάλε ένα ***V*** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☐ | -167 ☐ | -255 ☑ V | -327 ☑ V |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 4** **Βαθμός επίδοσης: 4/20**

**Όνομα μαθητή:.....** ................ **Ημερομηνία:**..............

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

(1) 264 + 327 = 681 (2) 348 + 442 = 880 (3) 453 + 262 = 715 (4) 358 + 271 = 629 (5) 253 + 347 = 690 (6) 124 + 388 = 504

Βάλε ένα **ν** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 + 332 ☑ (8) 308 + 275 ☐ (9) 242 + 294 ☑ (10) 347 + 182 ☐

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(11) 345 − 136 (12) 245 − 127 (13) 967 − 309 (14) 893 − 366 (15) 794 − 278 (16) 360 − 158

Βάλε ένα **ν** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

(17) 798 − 352 ☑ (18) 788 − 167 ☑ (19) 864 − 255 ☑ (20) 744 − 327 ☑

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 5** **Βαθμός επίδοσης: 7/20**

**Όνομα μαθητή:.. ..........** **Ημερομηνία:......./..............**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) 264 | (2) 348 | (3) 453 | (4) 358 | (5) 253 | (6) 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 581 | 780 | 615 | 529 | 590 | 412 |

Βάλε ένα **ν** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (7) 467 | (8) 308 | (9) 242 | (10) 347 |
| +332 □ | +275 □ | +294 □ | +182 √ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (11) 345 | (12) 245 | (13) 967 | (14) 893 | (15) 794 | (16) 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 219 | 145 | 209 | | | |

Βάλε ένα **ν** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (17) 798 | (18) 788 | (19) 864 | (20) 744 |
| -352 □ | -167 □ | -255 √ | -327 √ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός μαθητή: 6** **Βαθμός επίδοσης: 3/20**

**Όνομα μαθητή:....** **Ημερομηνία:…………………**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 590 | 780 | 615 | 539 | 590 | 402 |

Βάλε ένα **v** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☑ | +294 ☐ | +182 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 219 | 128 | 606 | 534 | 962 | 420 |

Βάλε ένα **v** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☐ | -167 ☑ | -255 ☐ | -327 ☐ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 7** **Βαθμός επίδοσης: 6/20**

Όνομα μαθητή: ............ Ημερομηνία:......................

### Ασκήσεις προσθέσεων

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 567 | 980 | 725 | 629 | 690 | 502 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☐ | +294 ☐ | +182 ☑ |

### Ασκήσεις αφαιρέσεων

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 259 | 143 | 366 | | | 218 |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☐ | -167 ☑ | -255 ☐ | -327 ☐ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 8** **Βαθμός επίδοσης: 6/20**

**Όνομα μαθητή:.. ..... Ημερομηνία:.. ................**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) 264 | (2) 348 | (3) 453 | (4) 358 | (5) 253 | (6) 124 1 |
| +327 1 | +442 1 | +262 1 | +271 1 | +347 1 | +388 1 |
| 681 | 880 | 715 | 629 | 690 | 602 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (7) 467 | (8) 308 | (9) 242 | (10) 347 |
| +332 ☐ | +275 ☐ | +294 ☐ | +182 ☐ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (11) 345 1 | (12) 245 1 | (13) 967 1 | (14) 893 | (15) 794 | (16) 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 119 | 028 | 668 | | | |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (17) 798 | (18) 788 | (19) 864 | (20) 744 |
| -352 ☐ | -167 ☐ | -255 ☐ | -327 ☐ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 9** | **Βαθμός επίδοσης: 8/20**

**Όνομα μαθητή:……………………….** **Ημερομηνία:…………………..**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| [illegible] | [illegible] | 715 | 629 | 600 | [illegible] |

Βάλε ένα **ν** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☑ | +294 ☐ | +182 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| [illegible] | 122 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | |

Βάλε ένα **ν** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☐ | -167 ☐ | -255 ☐ | -327 ☐ |

**Προτέστ επίδοσης στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μαθητών με δυσαριθμησία**

**Κωδικός Μαθητή: 10** **Βαθμός επίδοσης: 8/20**

**Όνομα μαθητή:** ..... **Ημερομηνία:** .............

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

(1) 264 + 327 = 591

(2) 348 + 442 = 790

(3) 453 + 262 = 715

(4) 358 + 271 = 629

(5) 253 + 347 = 509

(6) 124 + 388 = 512

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 + 332 ☑

(8) 308 + 275 ☑

(9) 242 + 294 ☑

(10) 347 + 182 ☑

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(11) 345 − 136 = 211

(12) 245 − 127 = 122

(13) 967 − 309 = 662

(14) 893 − 366 = 533

(15) 794 − 278 = 524

(16) 360 − 158 = 278

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

(17) 798 − 352 ☑

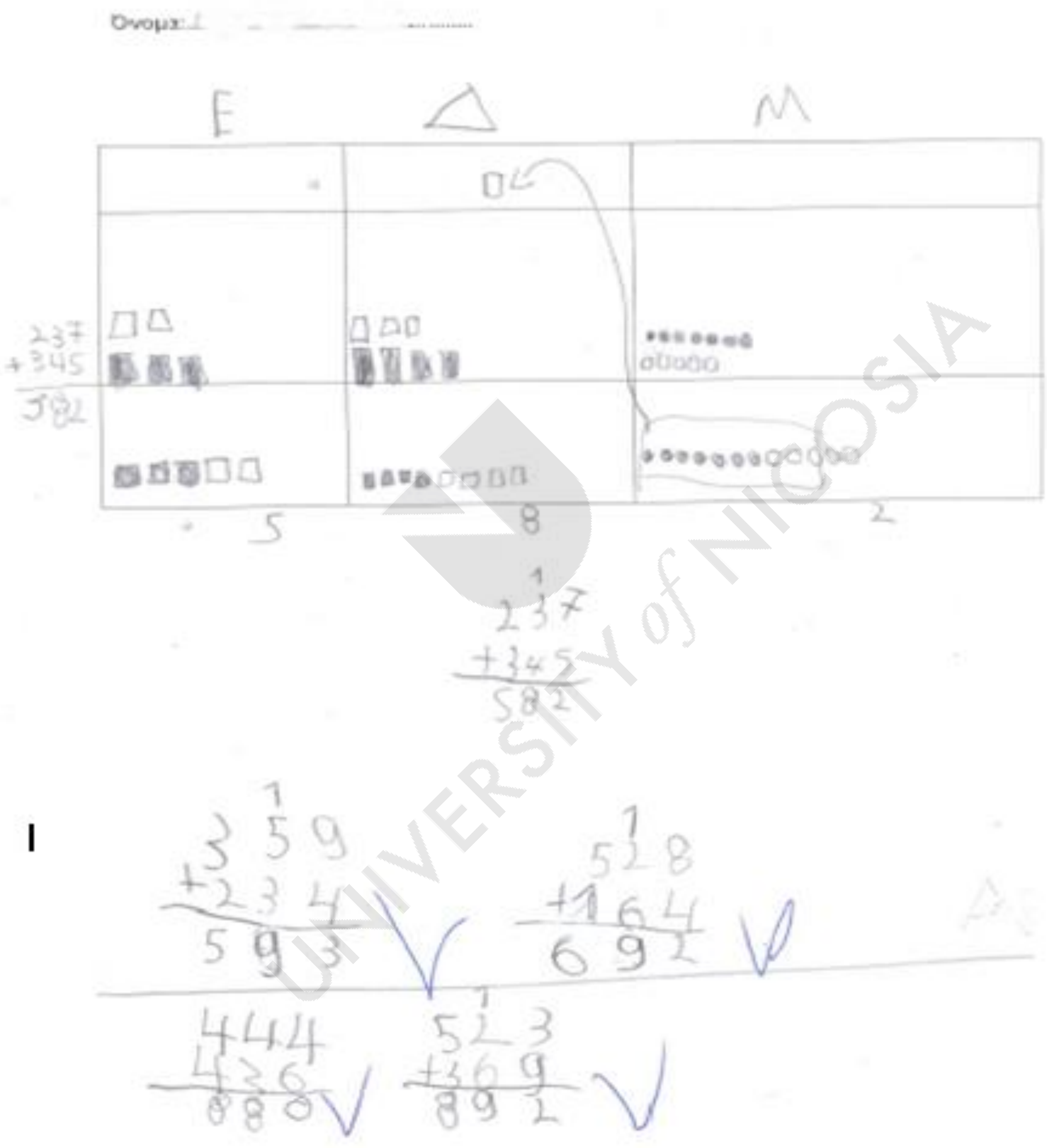
(18) 788 − 167 ☑

(19) 864 − 255 ☑

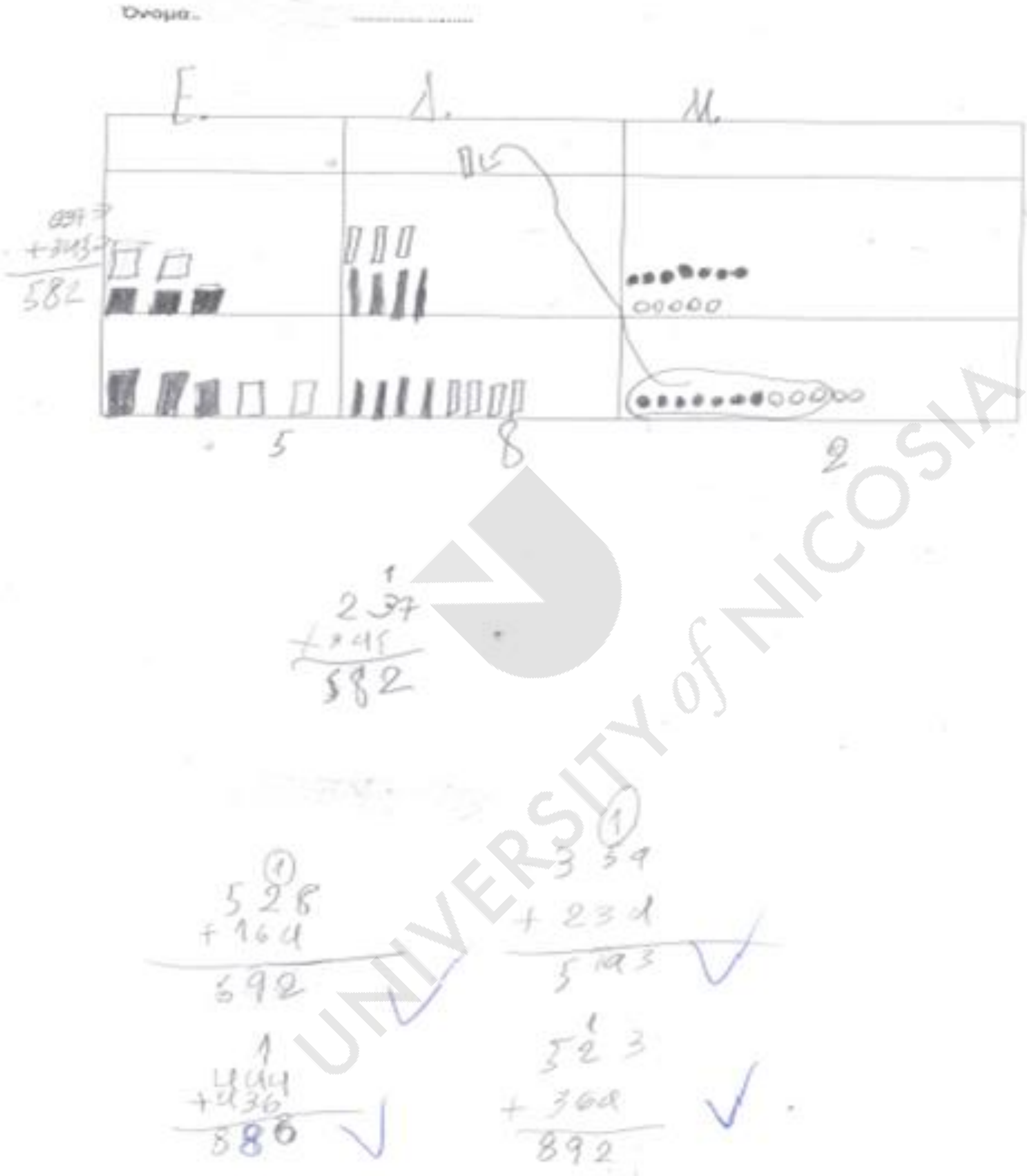
(20) 744 − 327 ☑

**Παράρτημα 13**

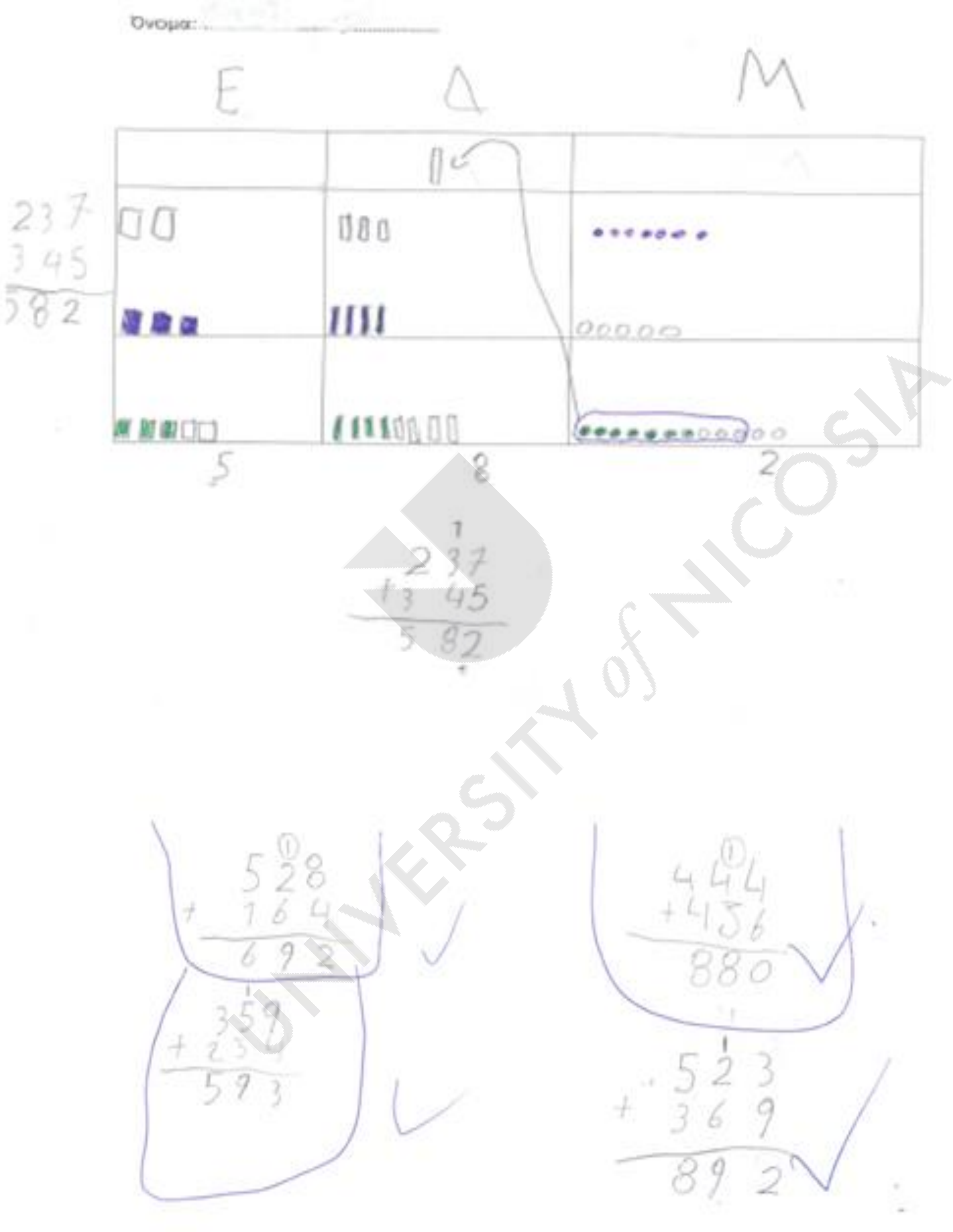
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της πρώτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1



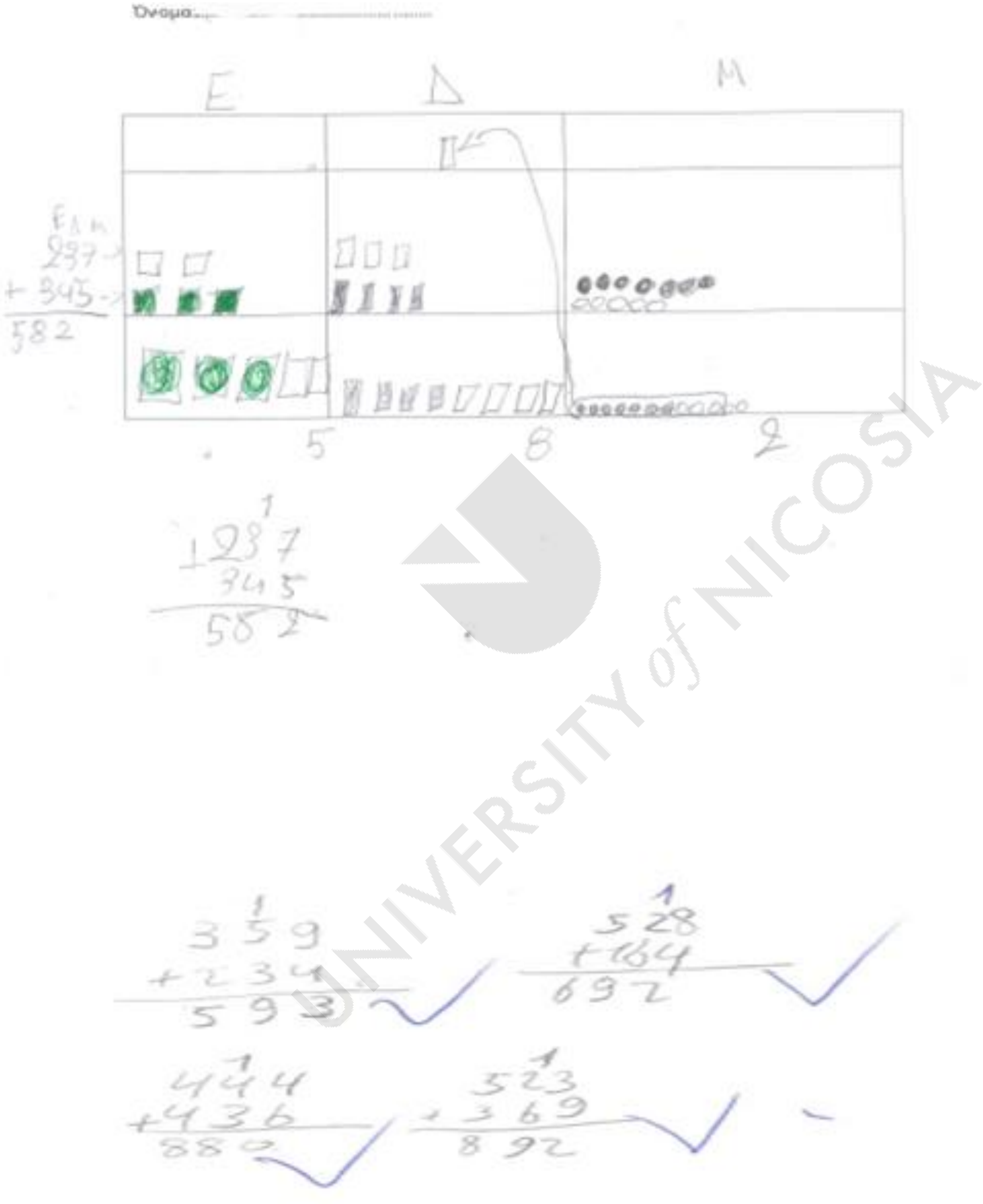
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της πρώτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2



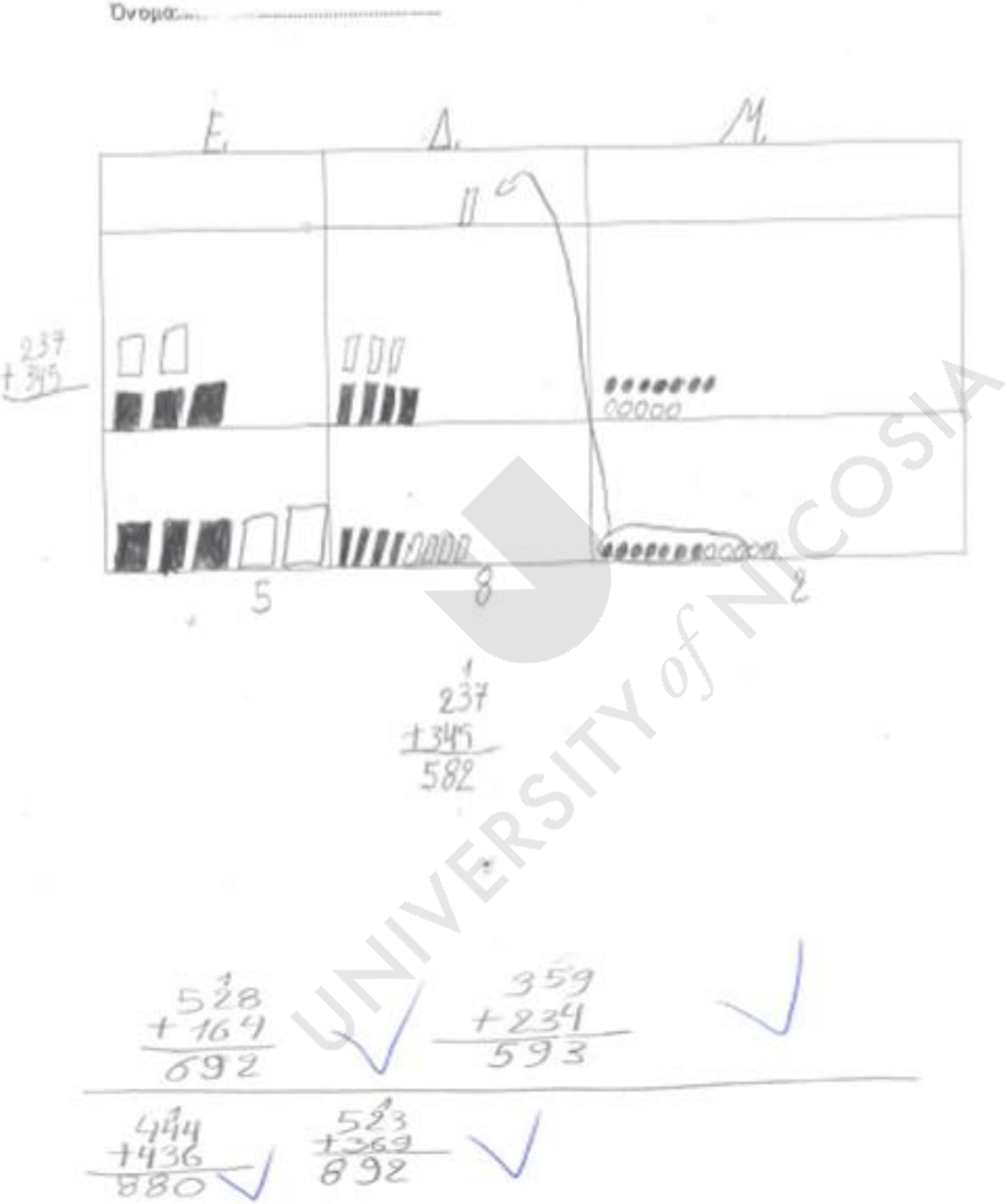
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της πρώτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της πρώτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4

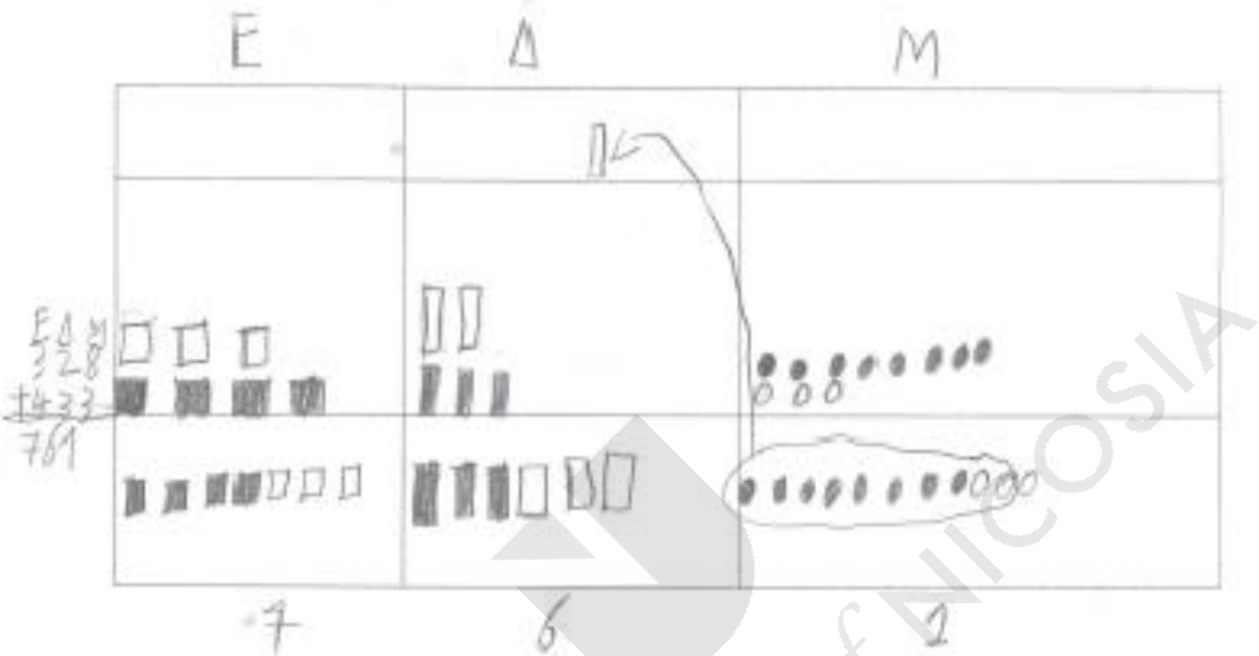


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της πρώτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δεύτερης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1

Όνομα:........................

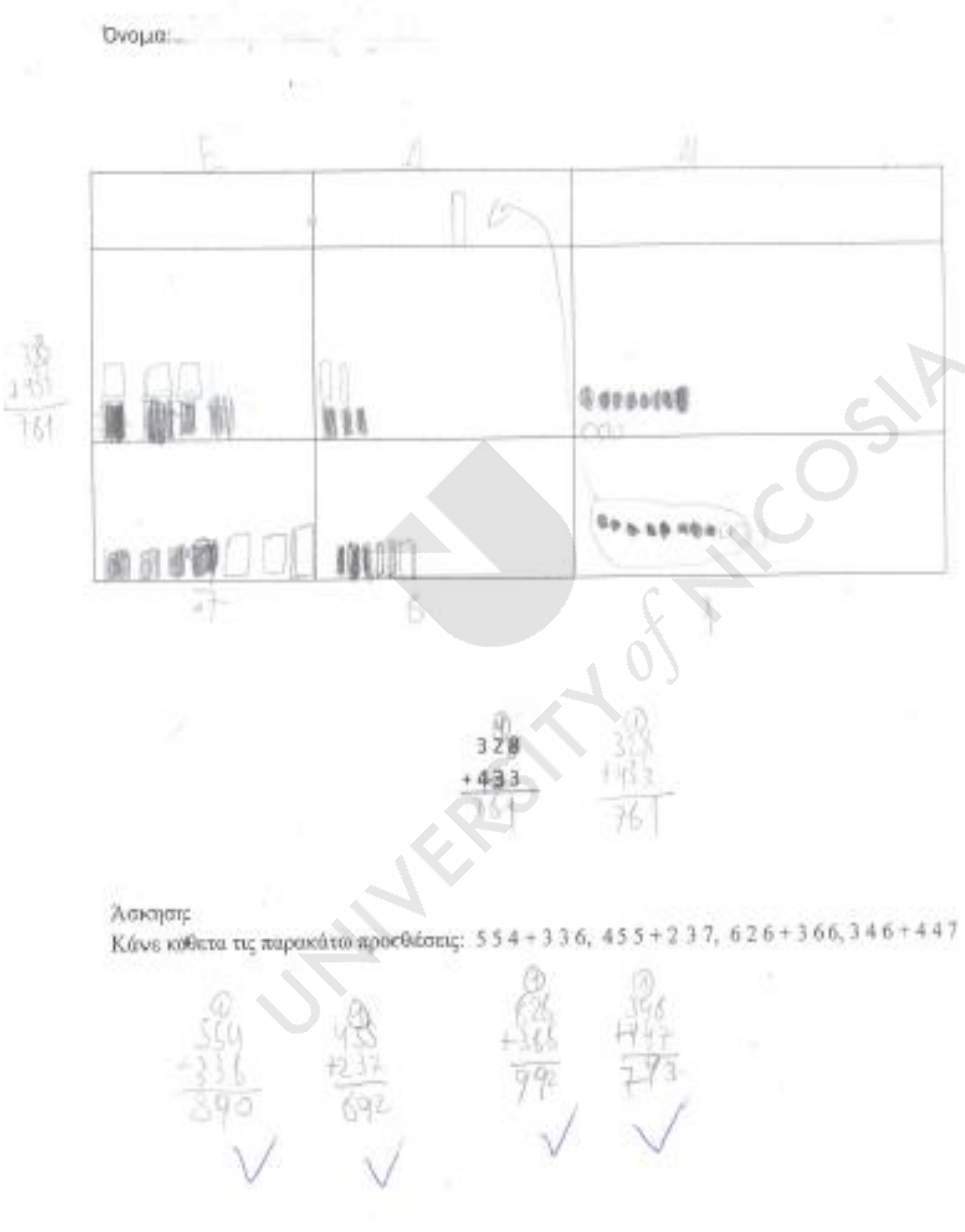



$$\begin{array}{r} 3\overset{1}{2}8 \\ +\,433 \\ \hline 761 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\overset{1}{2}8 \\ +\,433 \\ \hline 761 \end{array}$$

Άσκηση
Κάνε κάθετα τις παρακάτω προσθέσεις: 5 5 4 + 3 3 6, 4 5 5 + 2 3 7, 6 2 6 + 3 6 6, 3 4 6 + 4 4 7

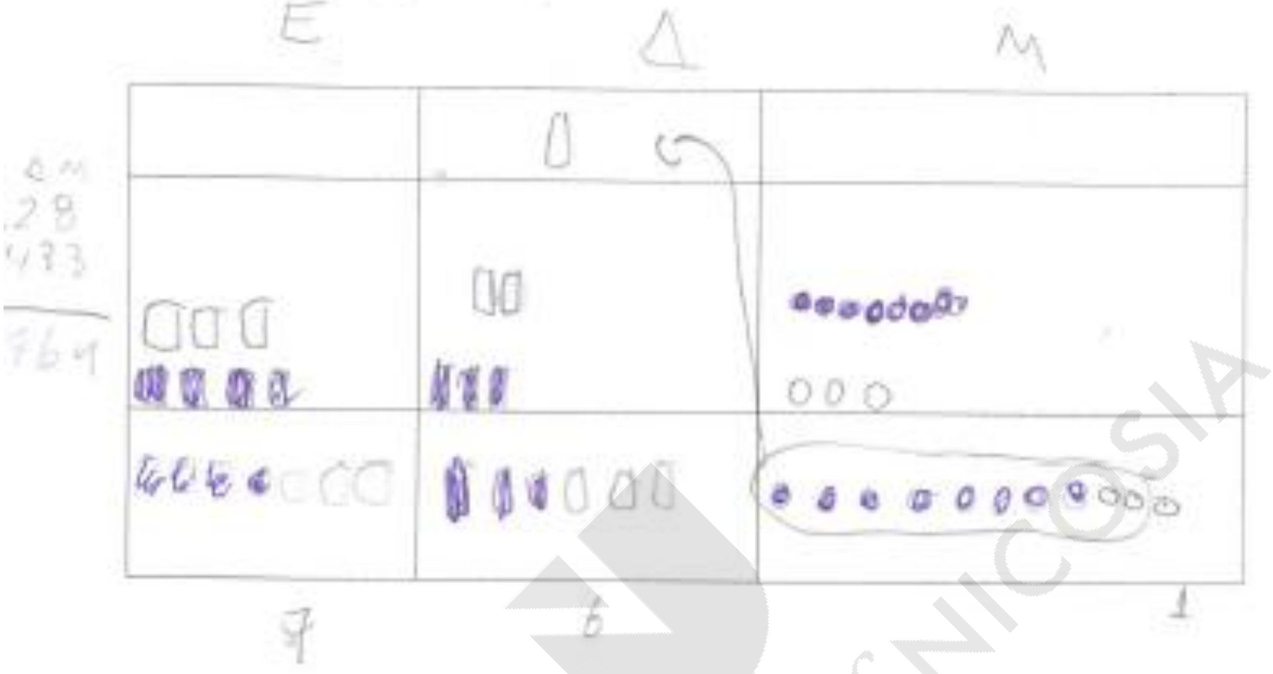
$$\begin{array}{r} 5\overset{1}{5}4 \\ +\,336 \\ \hline 890 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\overset{1}{5}5 \\ +\,237 \\ \hline 692 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\overset{1}{2}6 \\ +\,366 \\ \hline 992 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\overset{1}{4}6 \\ +\,447 \\ \hline 793 \end{array}$$

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δεύτερης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δεύτερης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3

Όνομα:




328 + 433 = 761

328 + 433 = 761

Άσκηση:
Κάνε κάθετα τις παρακάτω προσθέσεις: 5 5 4 + 3 3 6, 4 5 5 + 2 3 7, 6 2 6 + 3 6 6, 3 4 6 + 4 4 7

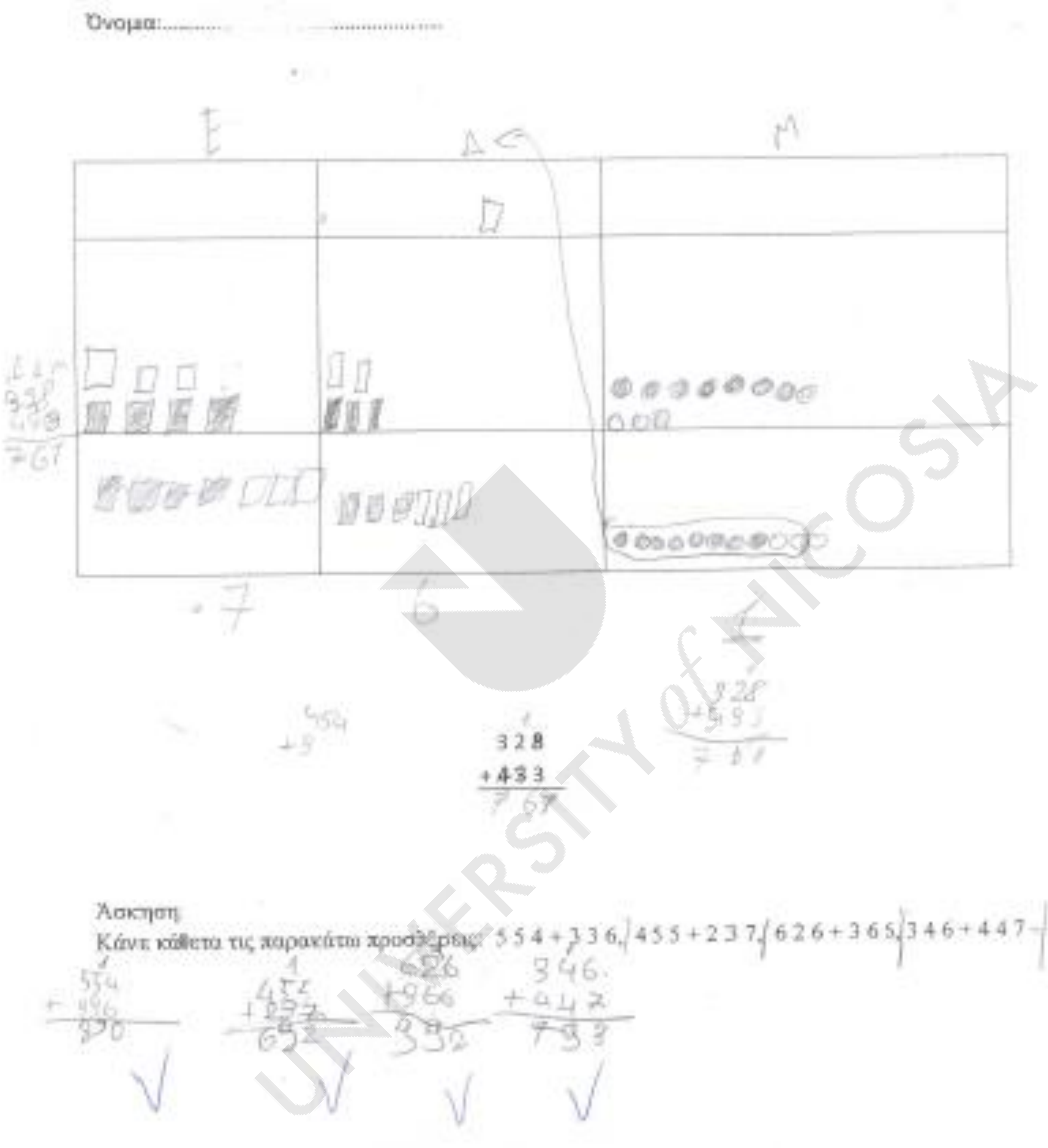
554 + 336 = 890

455 + 237 = 692

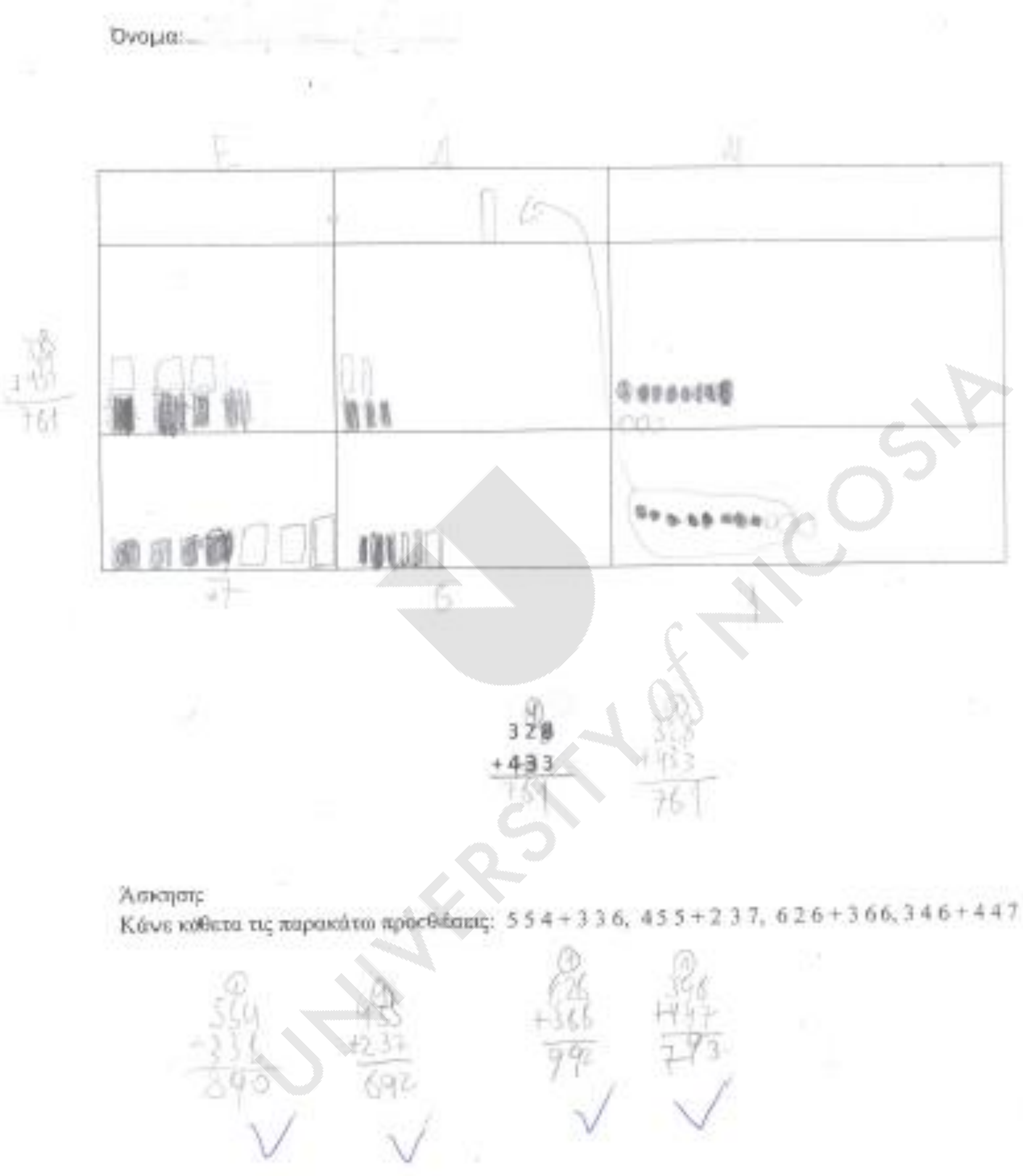
626 + 366 = 992

346 + 447 = 793

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δεύτερης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4

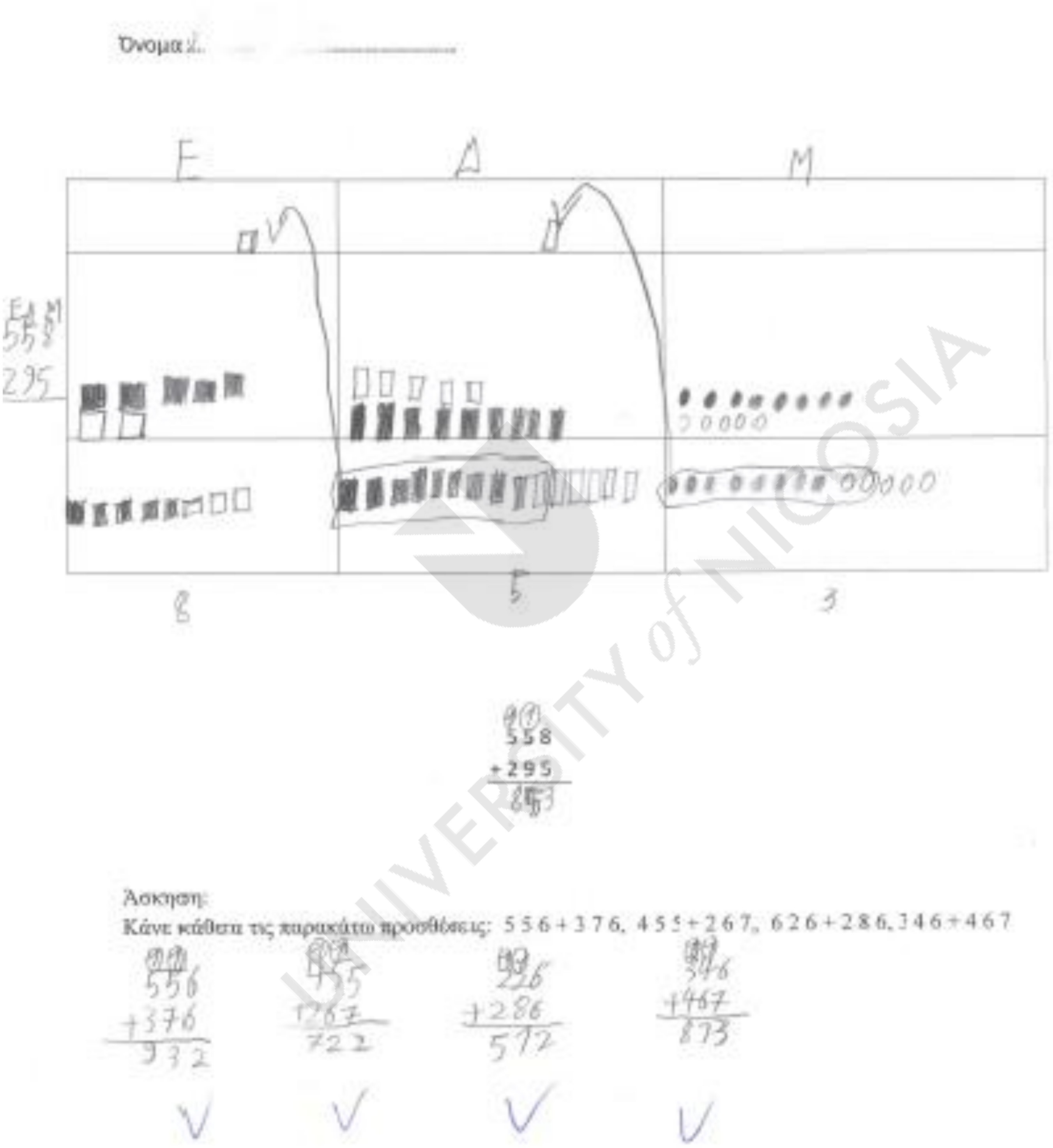


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δεύτερης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5



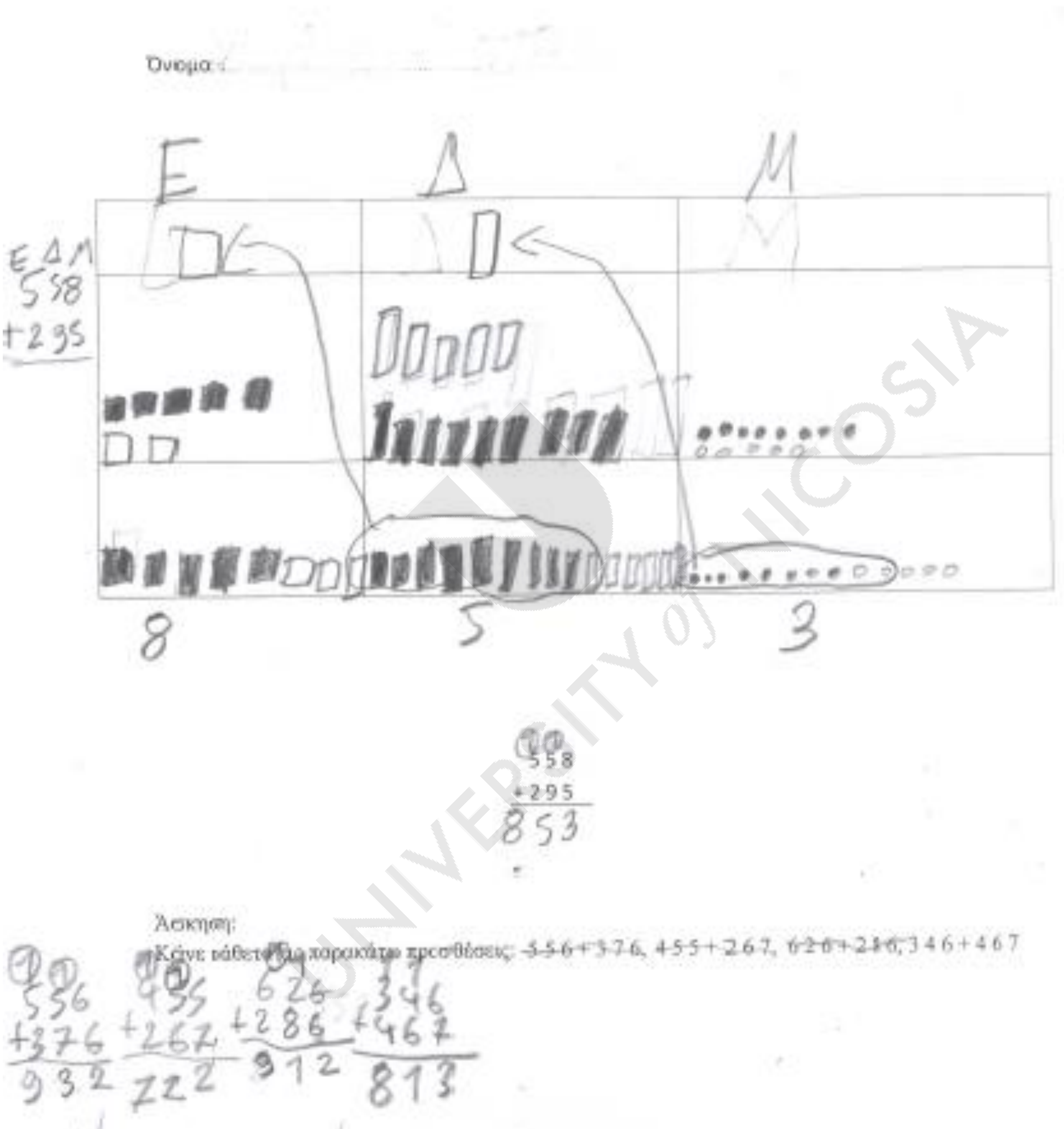
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τρίτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 1



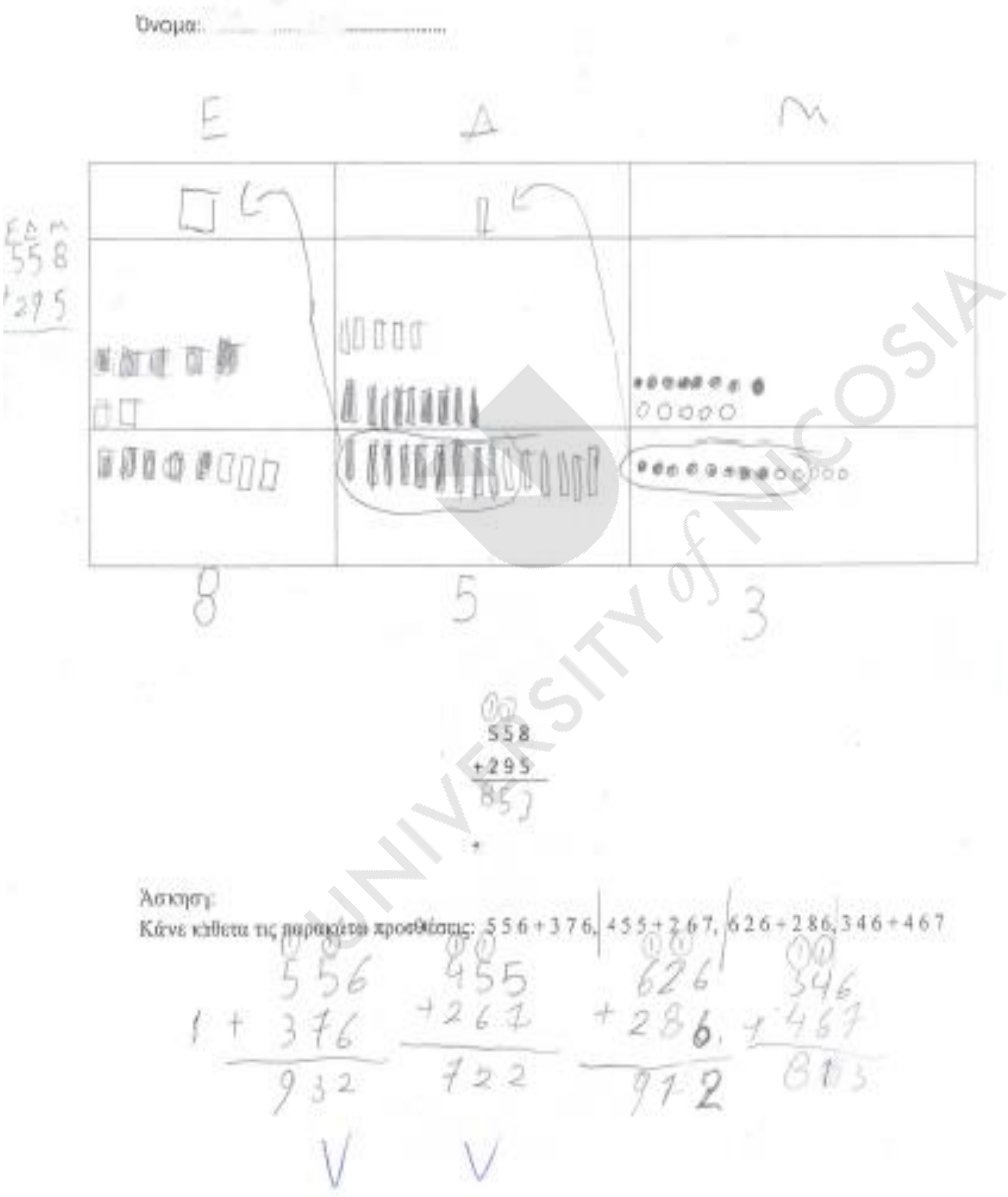
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τρίτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 2



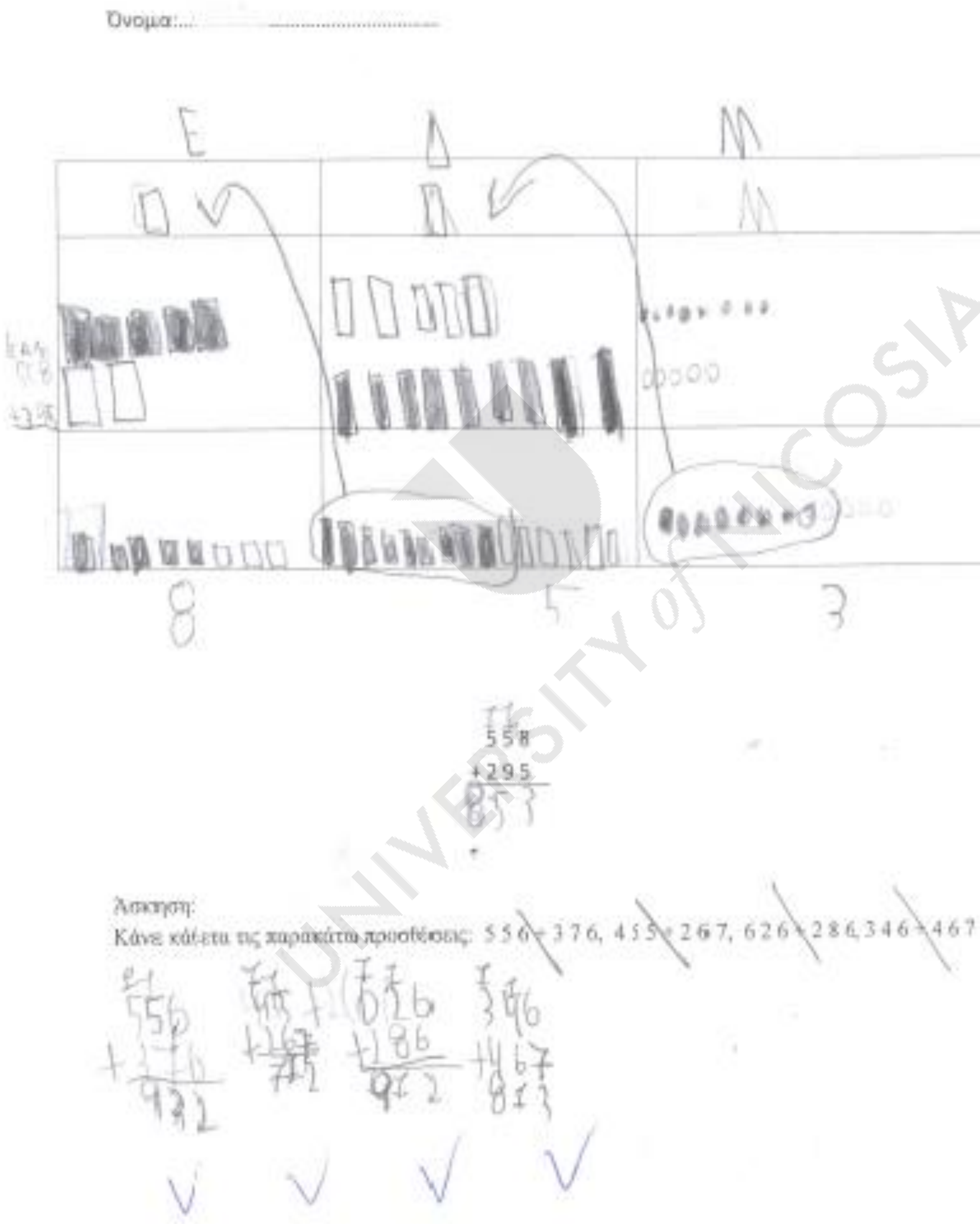
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τρίτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 3



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τρίτης παρέμβασης

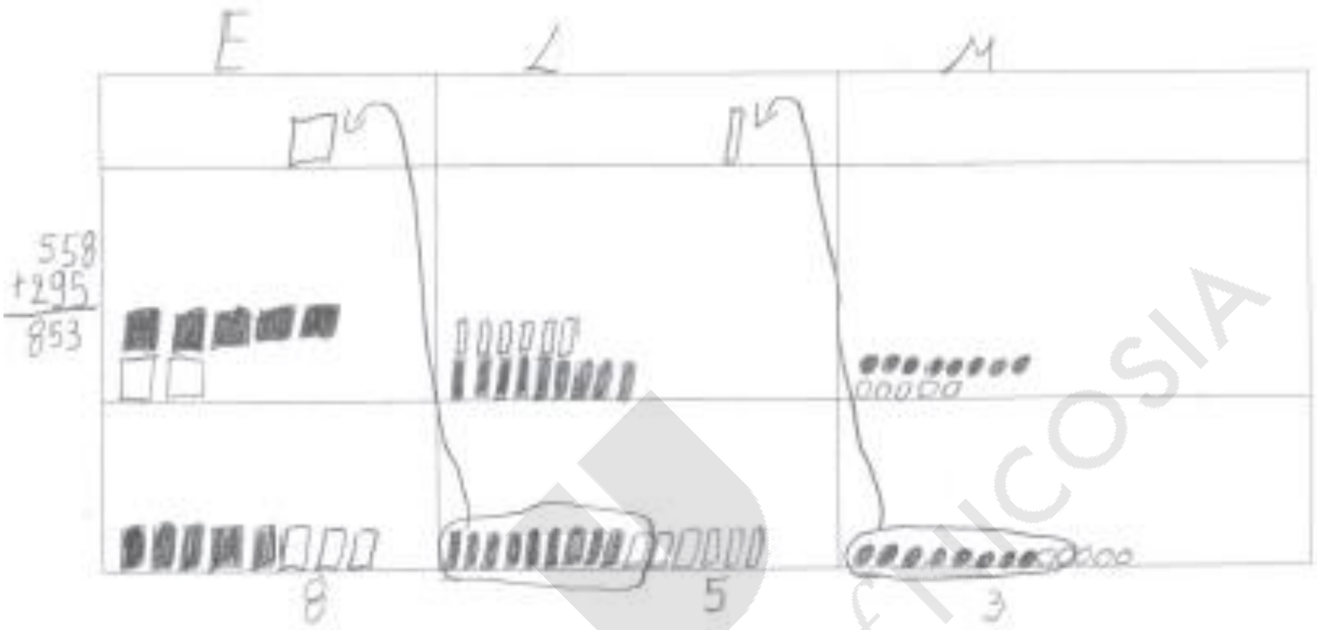
Κωδικός Μαθητή: 4



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τρίτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 5

Όνομα:...............................




558
+295
853

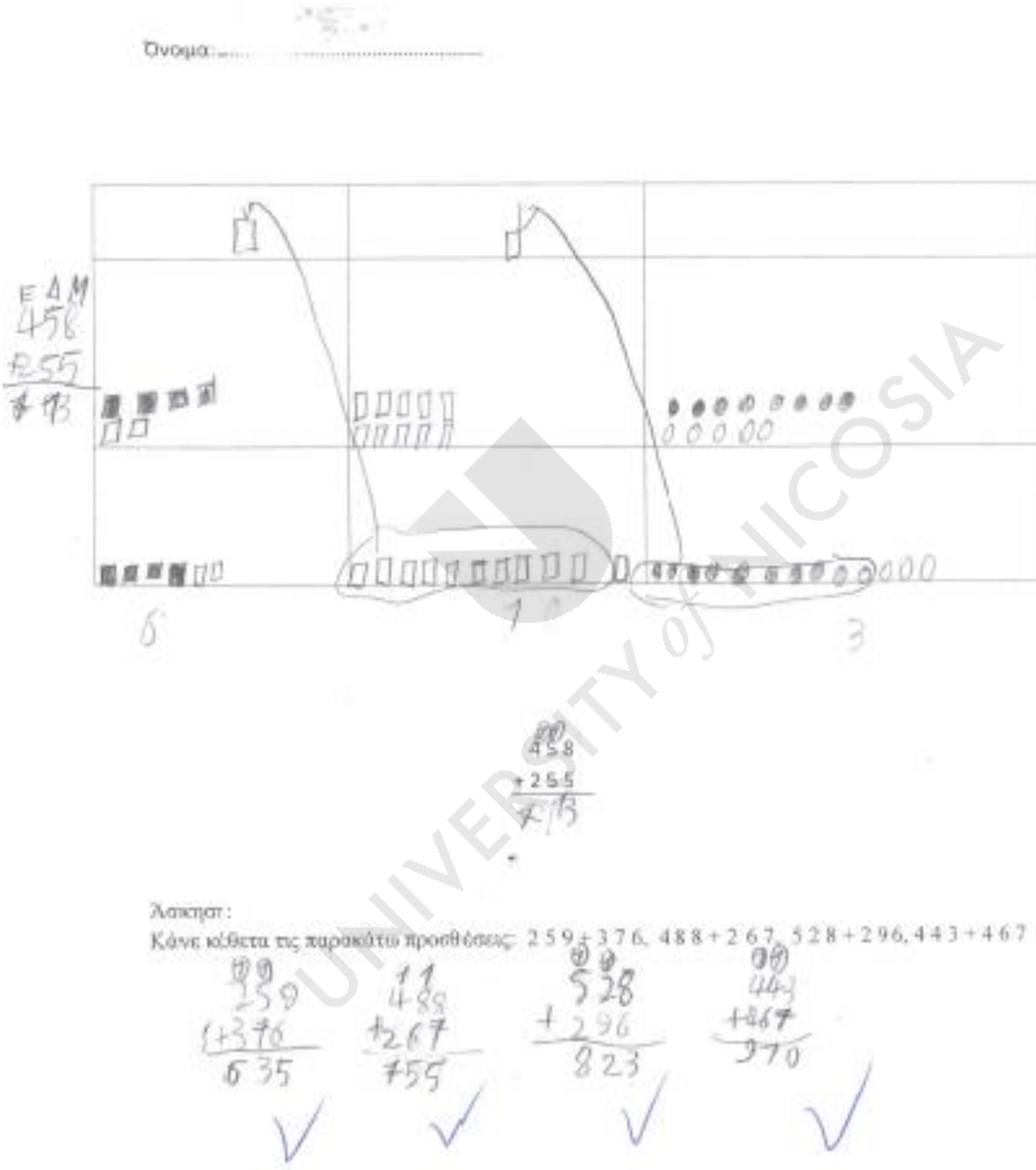
Άσκηση:

Κάνε κάθετα τις παρακάτω προσθέσεις: 556+376, 455+267, 626+286, 346+467

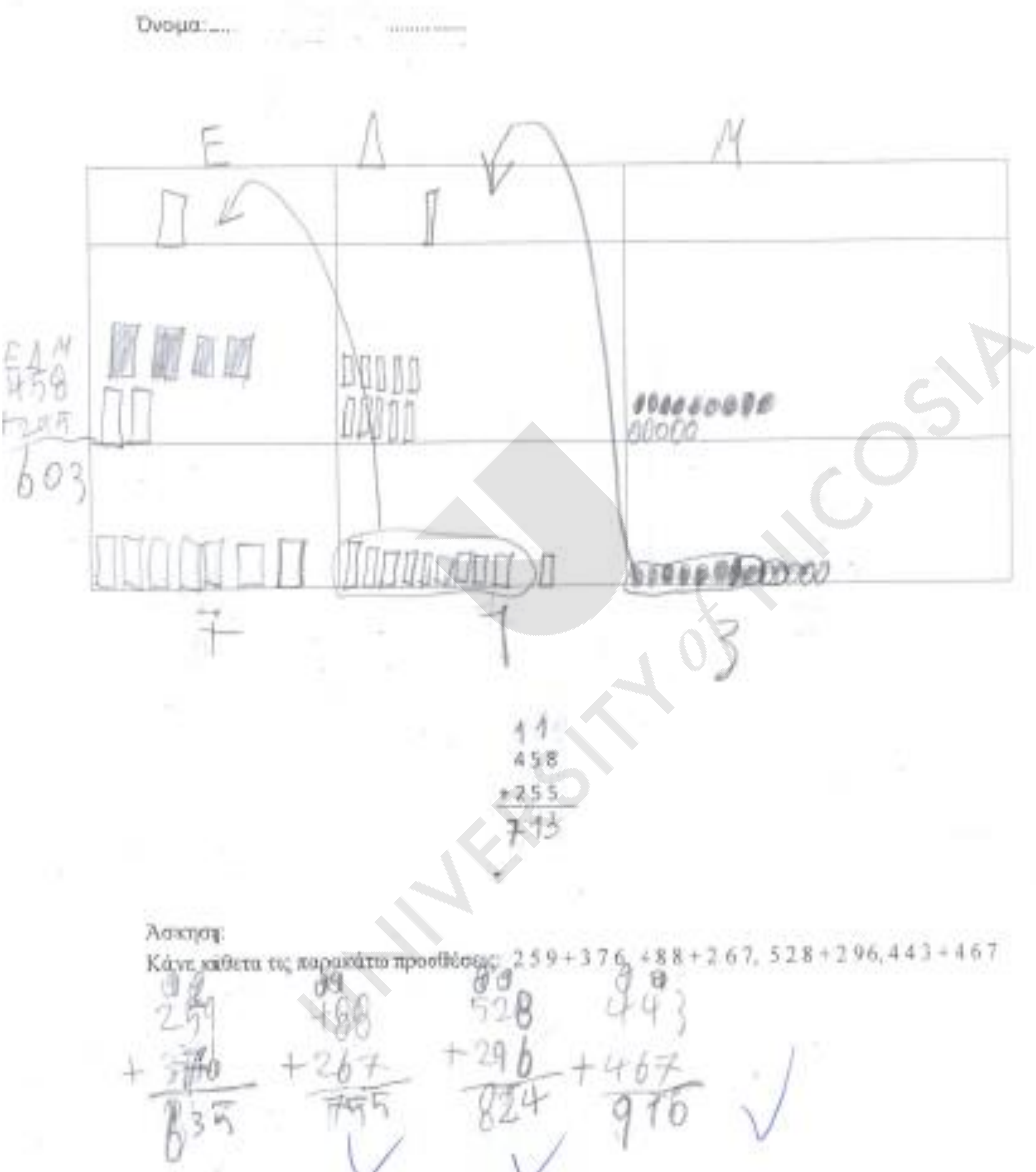
| | | | |
|---|---|---|---|
| 556 | 455 | 626 | 346 |
| +376 | +267 | +286 | +467 |
| 932 | 722 | 912 | 813 |

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τέταρτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 1

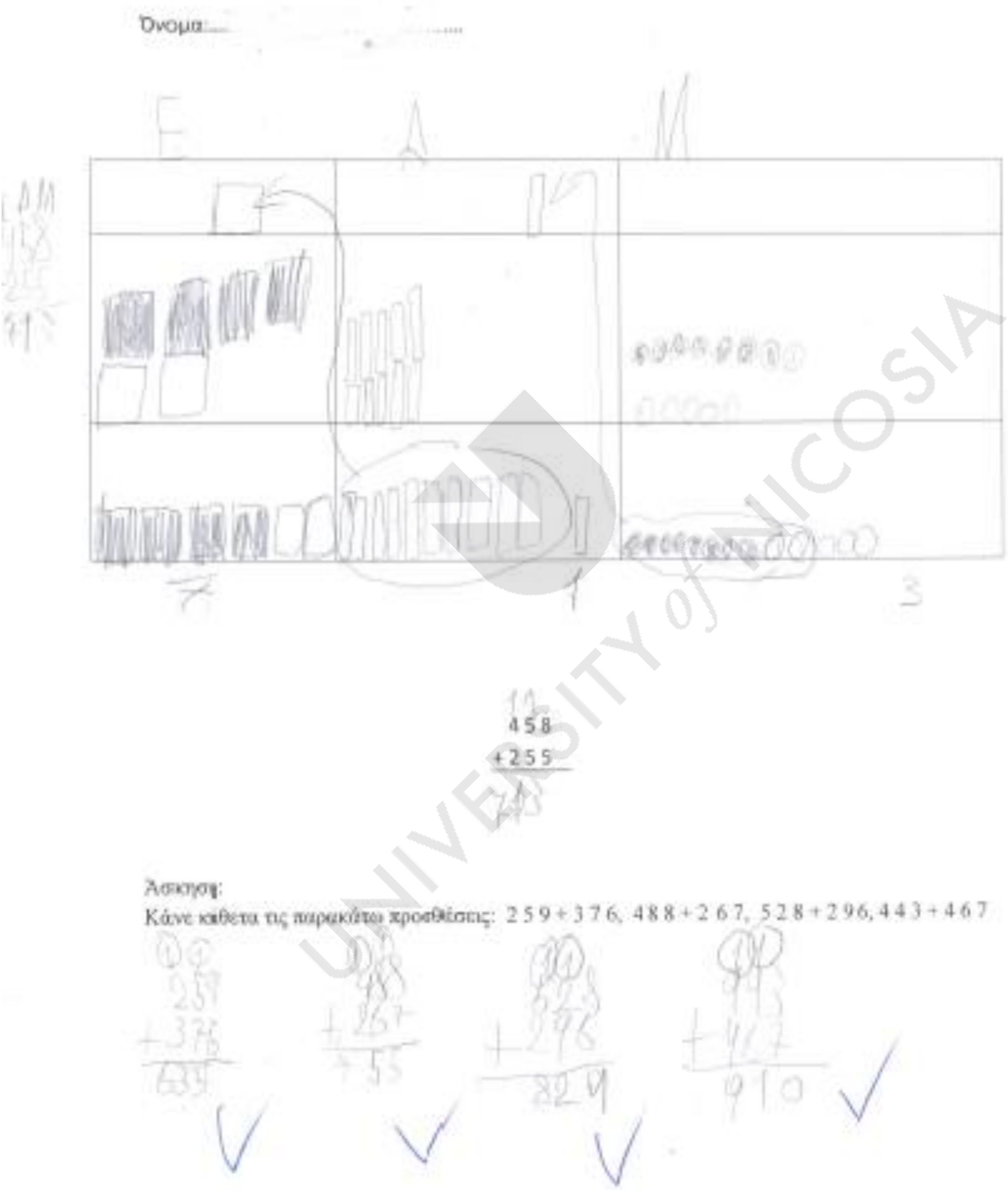


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τέταρτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2



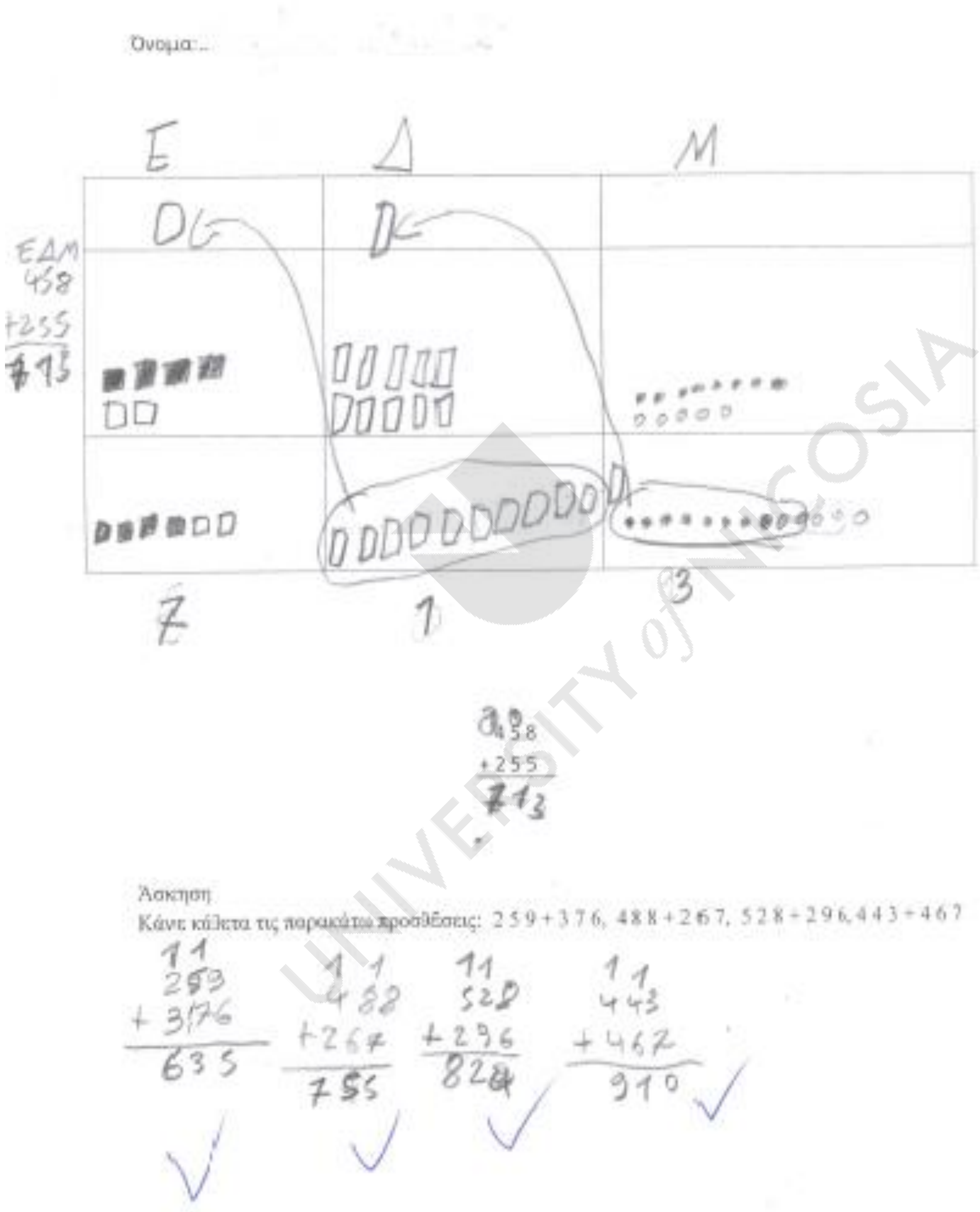
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τέταρτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 3



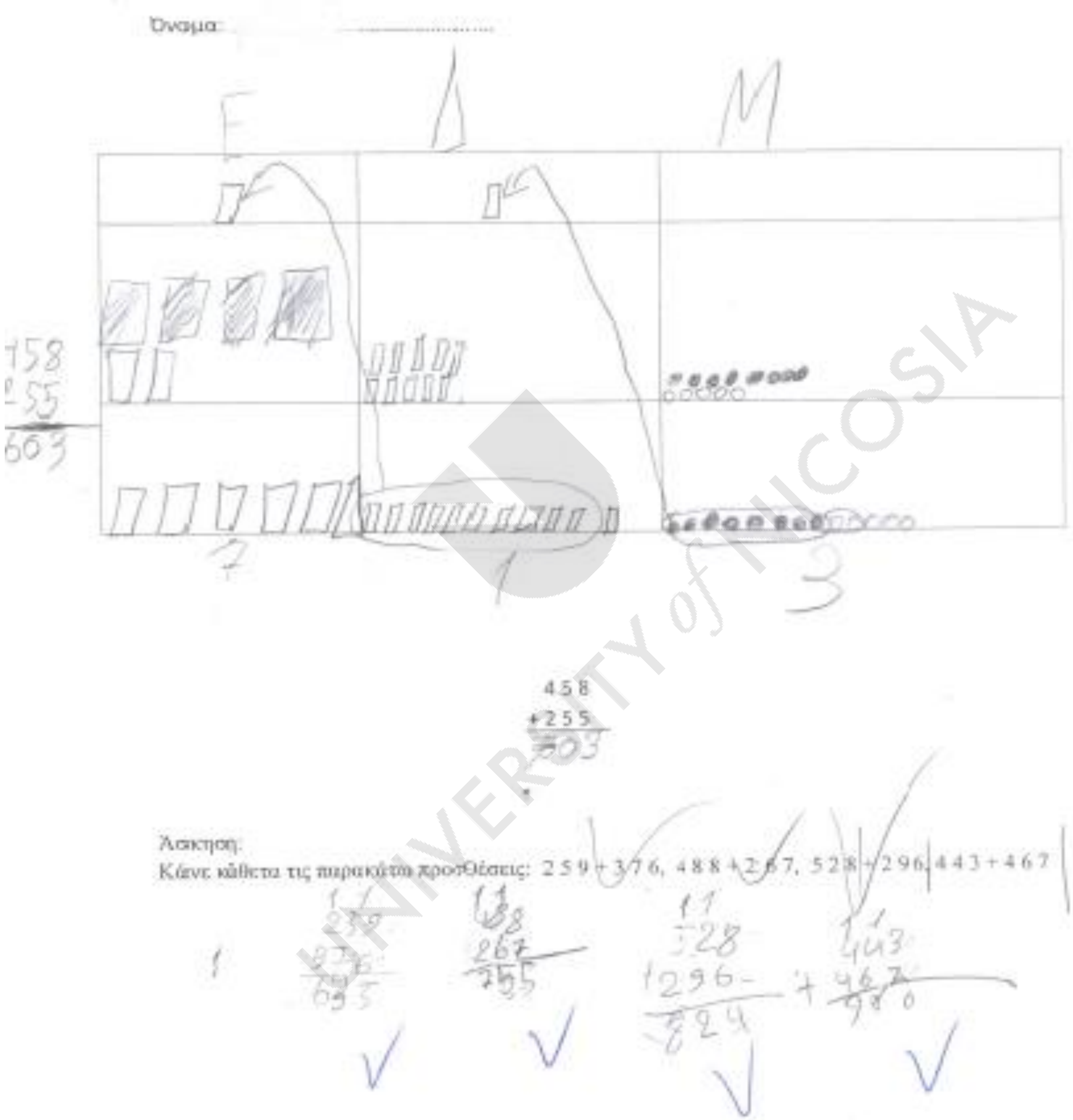
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τέταρτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 4



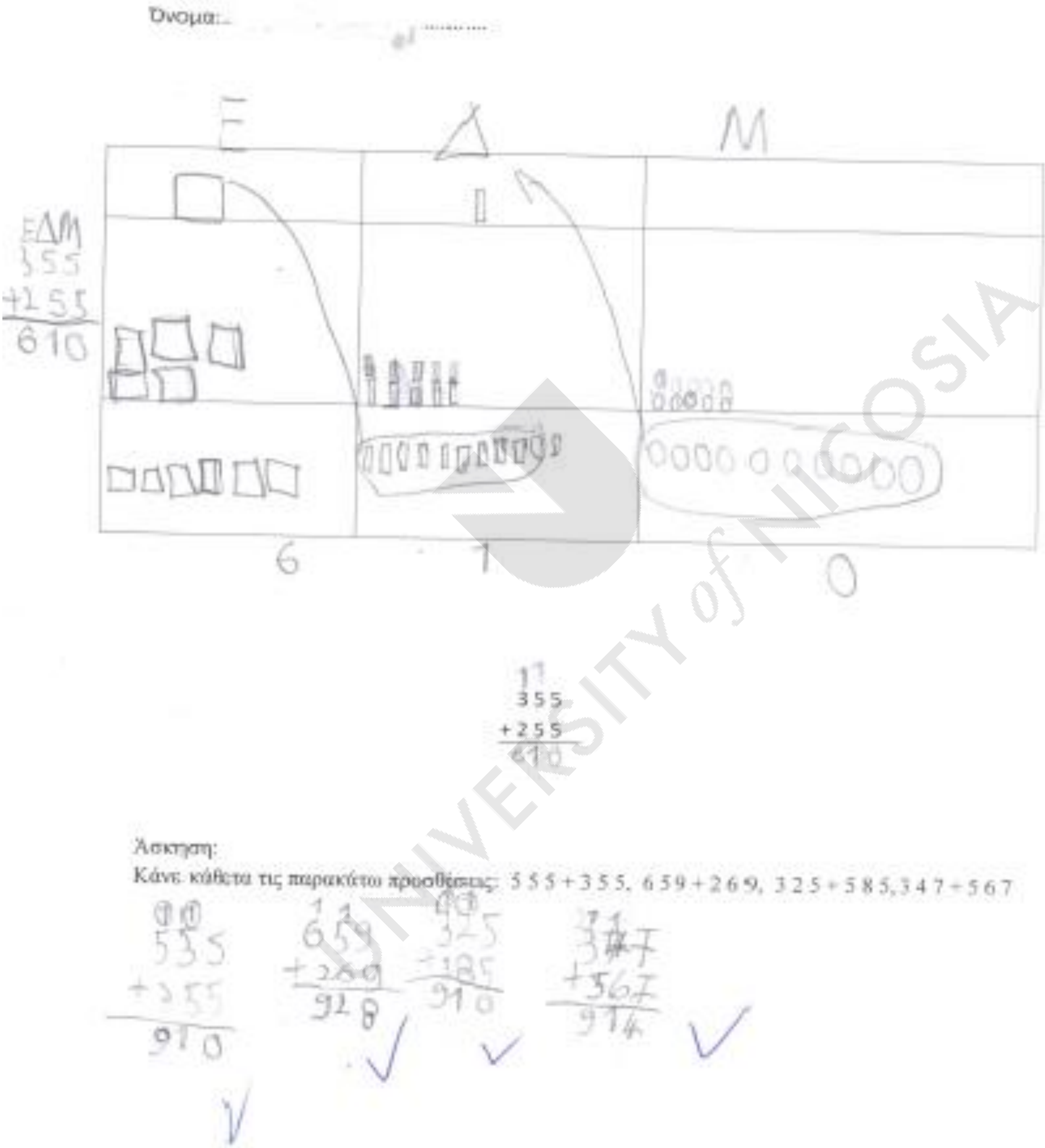
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της τέταρτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 5



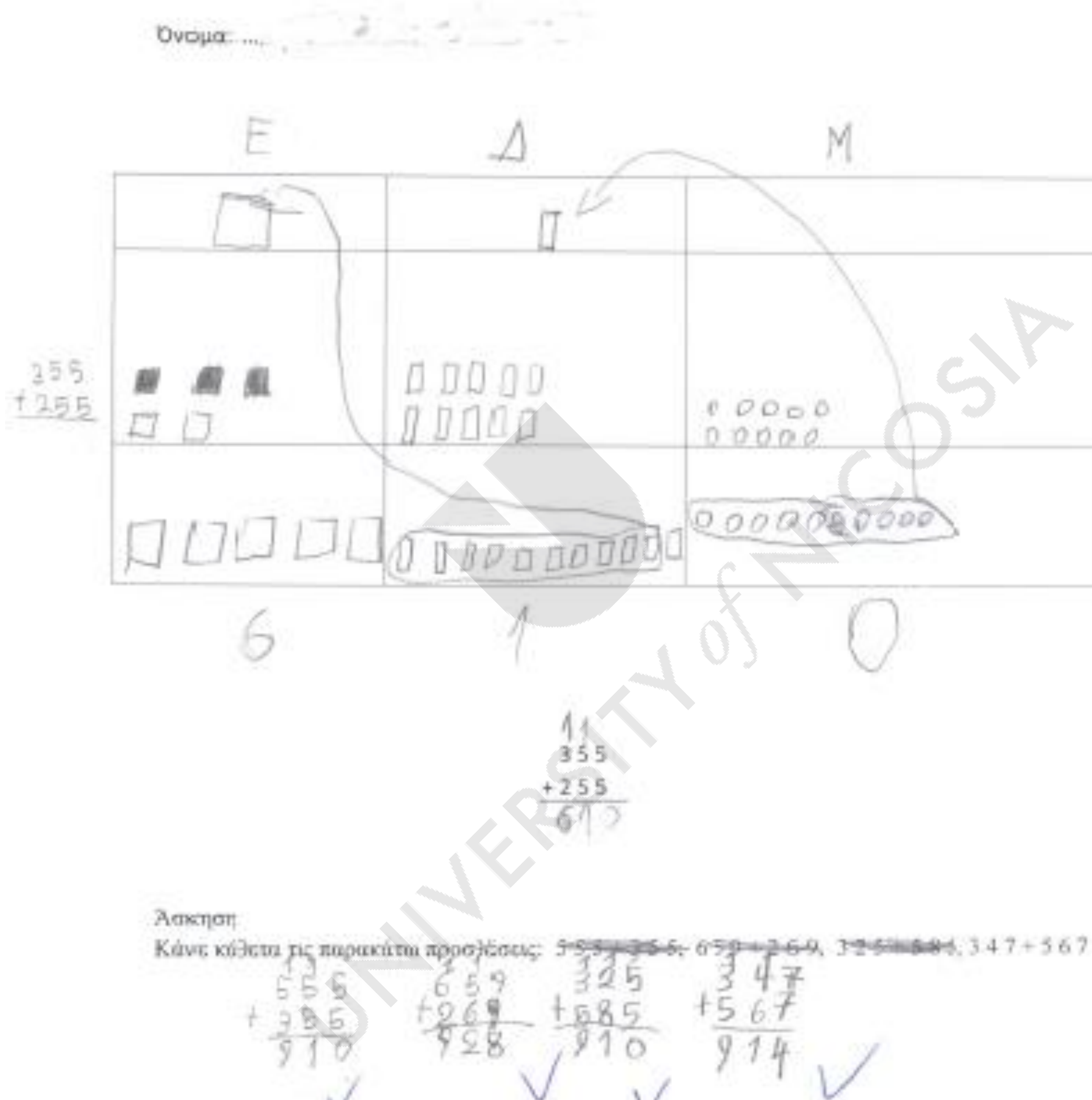
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της πέμπτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 1

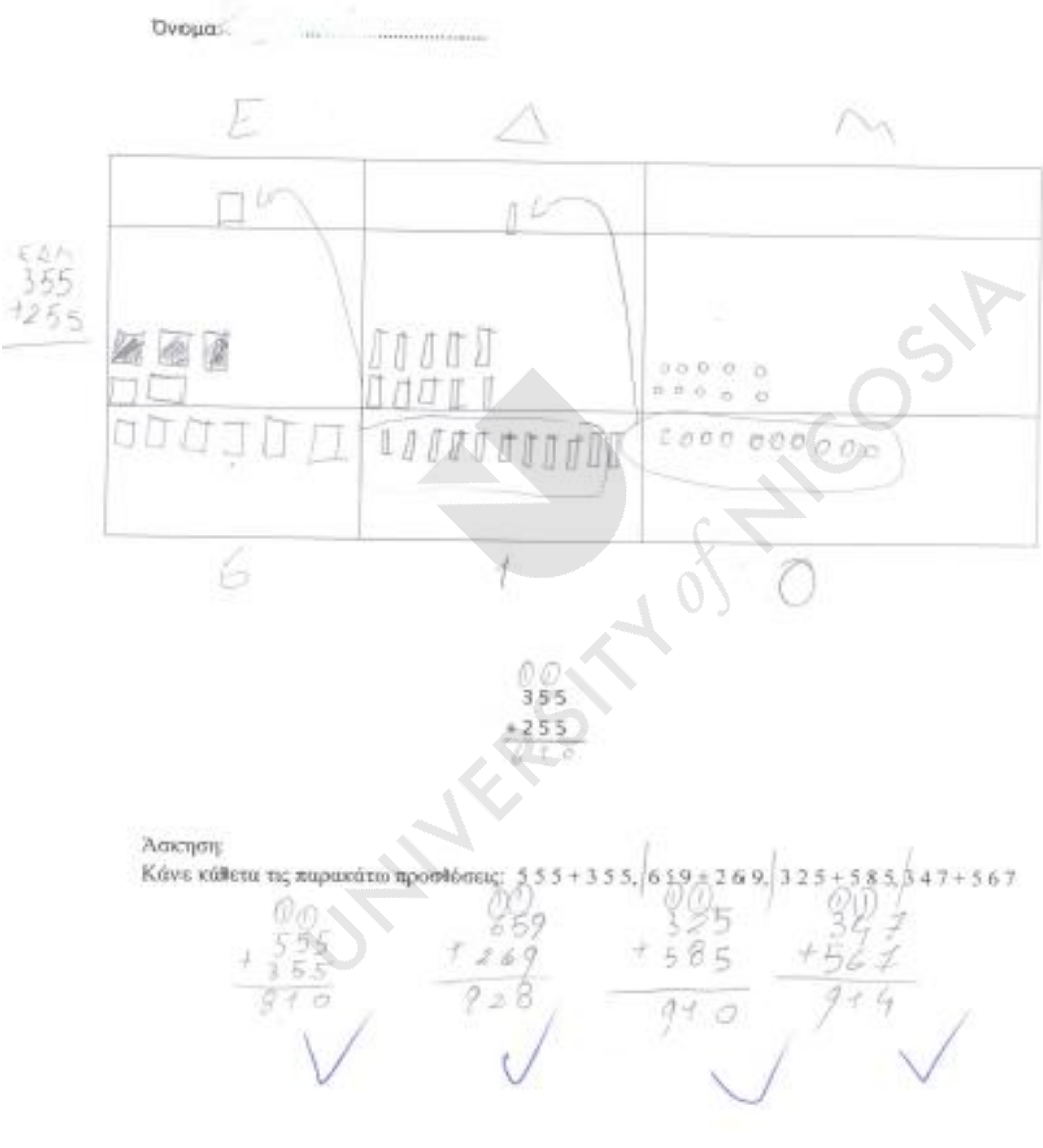


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της πέμπτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 2

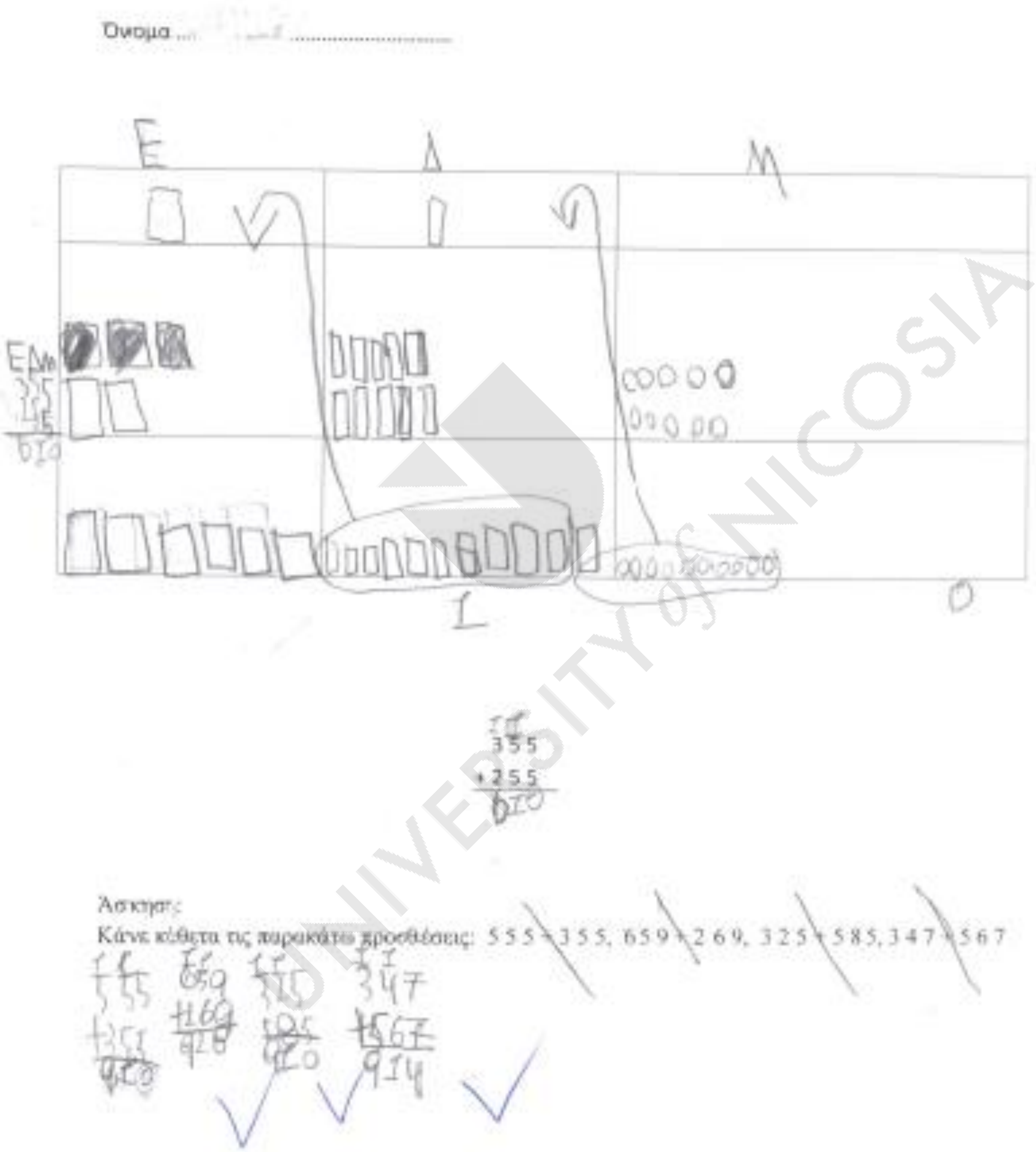


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της πέμπτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της πέμπτης παρέμβασης

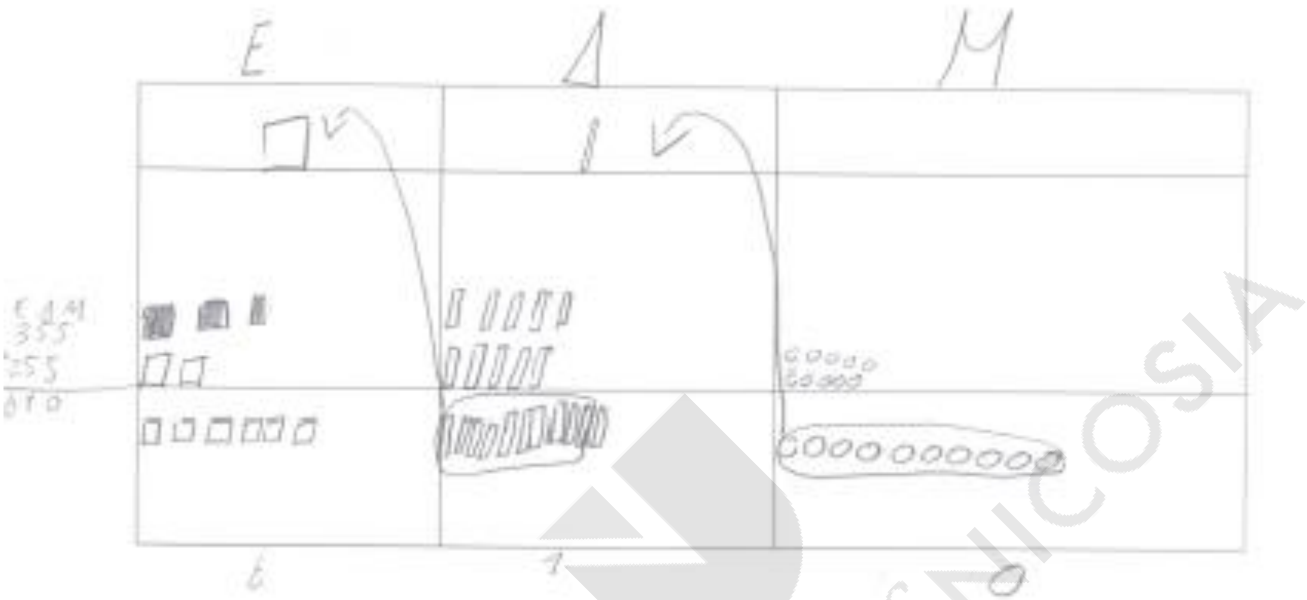
Κωδικός Μαθητή: 4



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην πρόσθεση με κρατούμενο στη στήλη των δεκάδων και στη στήλη των εκατοντάδων στο τέλος της πέμπτης παρέμβασης

Κωδικός Μαθητή: 5

Όνομα ..............................



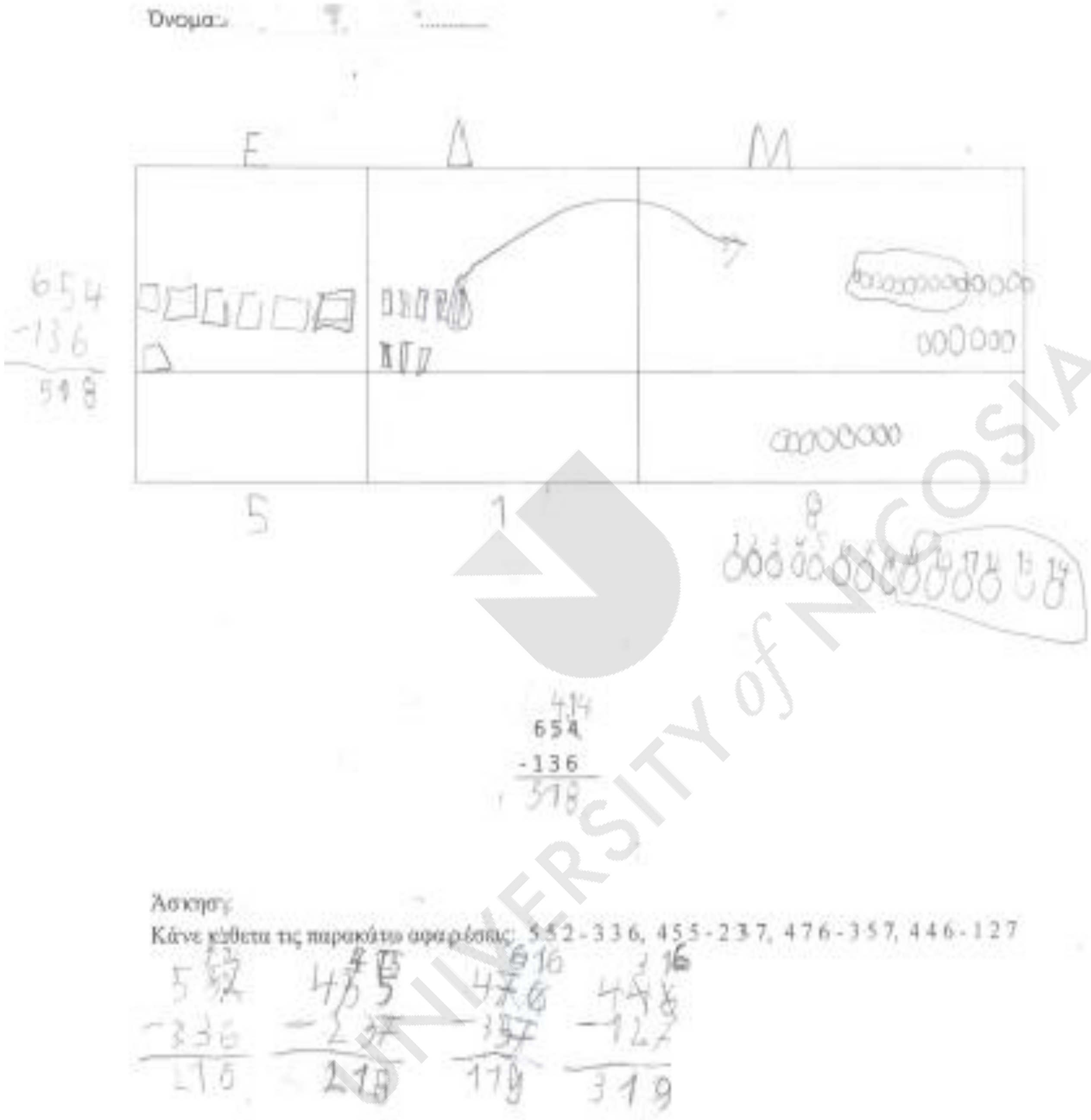

$$\begin{array}{r} 355 \\ +\,255 \\ \hline 610 \end{array}$$

Άσκηση:

Κάνε κάθετα τις παρακάτω προσθέσεις: 555 + 355, 659 + 269, 325 + 585, 347 + 567

$$\begin{array}{r} 555 \\ +\,355 \\ \hline 910 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 659 \\ +\,269 \\ \hline 928 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 325 \\ +\,585 \\ \hline 910 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 347 \\ +\,567 \\ \hline 914 \end{array}$$

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έκτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έκτης παρέμβασης
Κωδικός 2


Όνομα ..........................

Ε Δ Μ

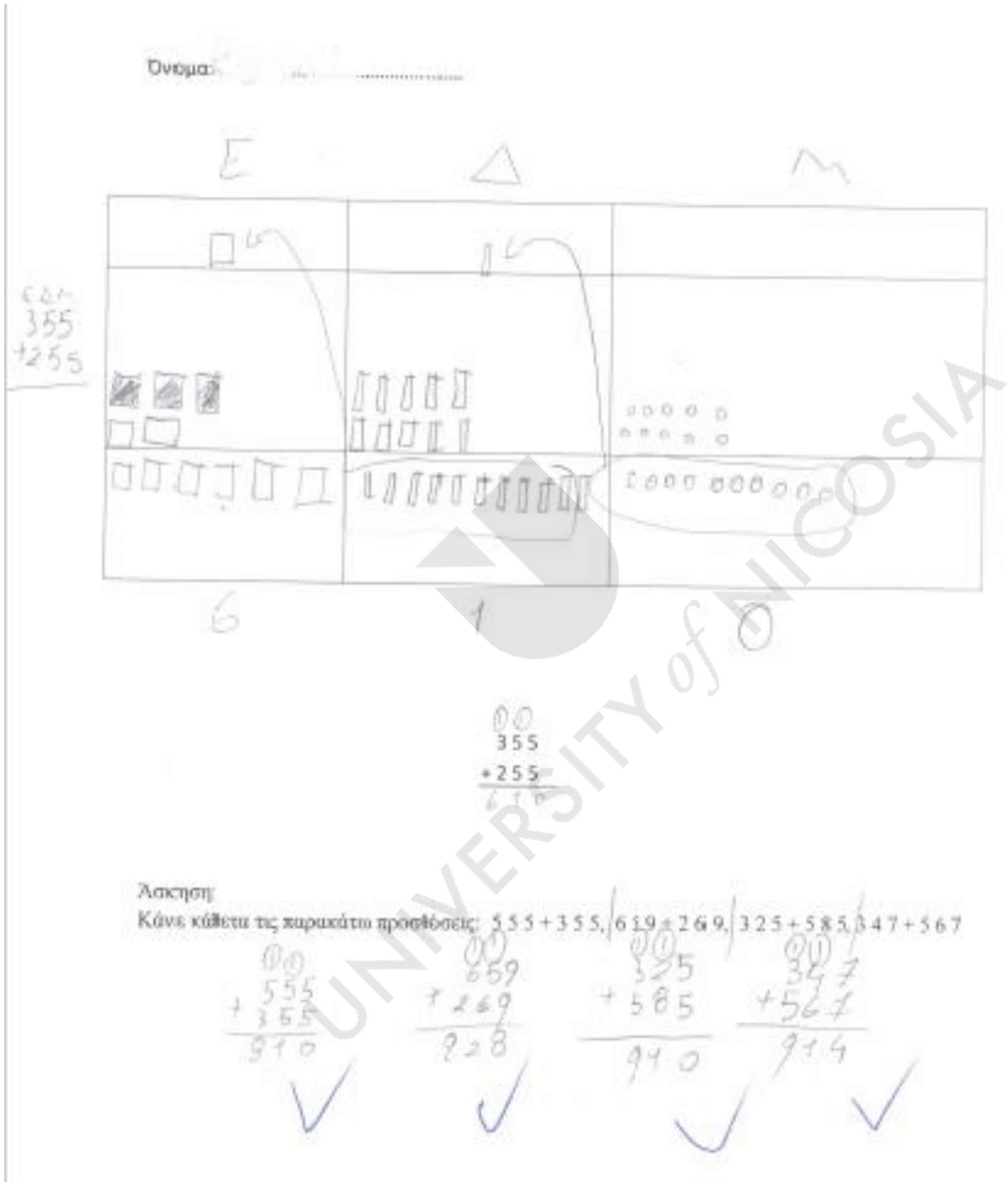
5 1

654
-136

Άσκηση:
Κάνε κάθετα τις παρακάτω αφαιρέσεις: 5 5 2 - 3 3 6, 4 5 5 - 2 3 7, 4 7 6 - 3 5 7, 4 4 6 - 1 2 7

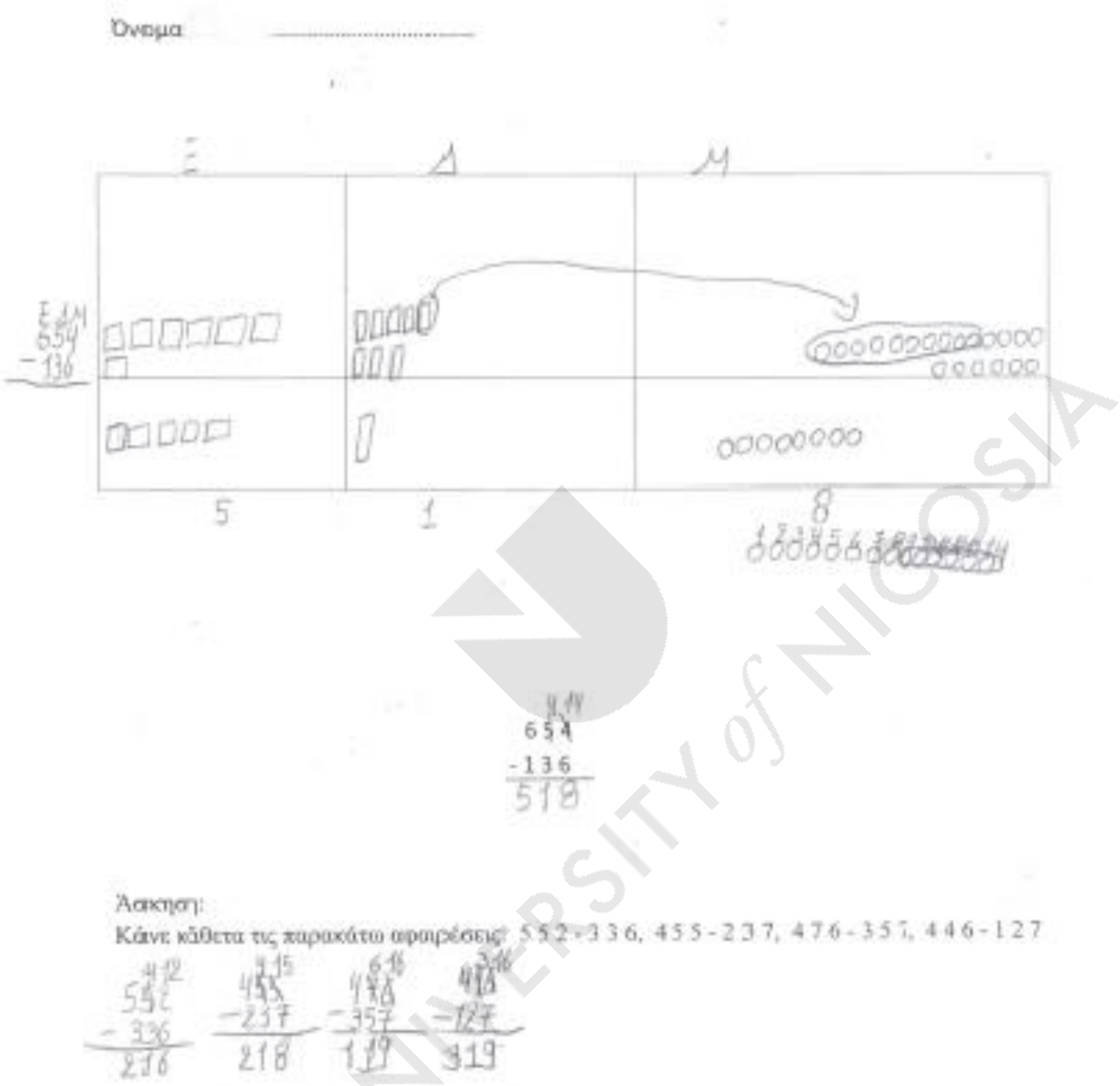
552 − 336 = 216
455 − 237 = 212
476 − 357 = 119
446 − 127 = 319

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έκτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3

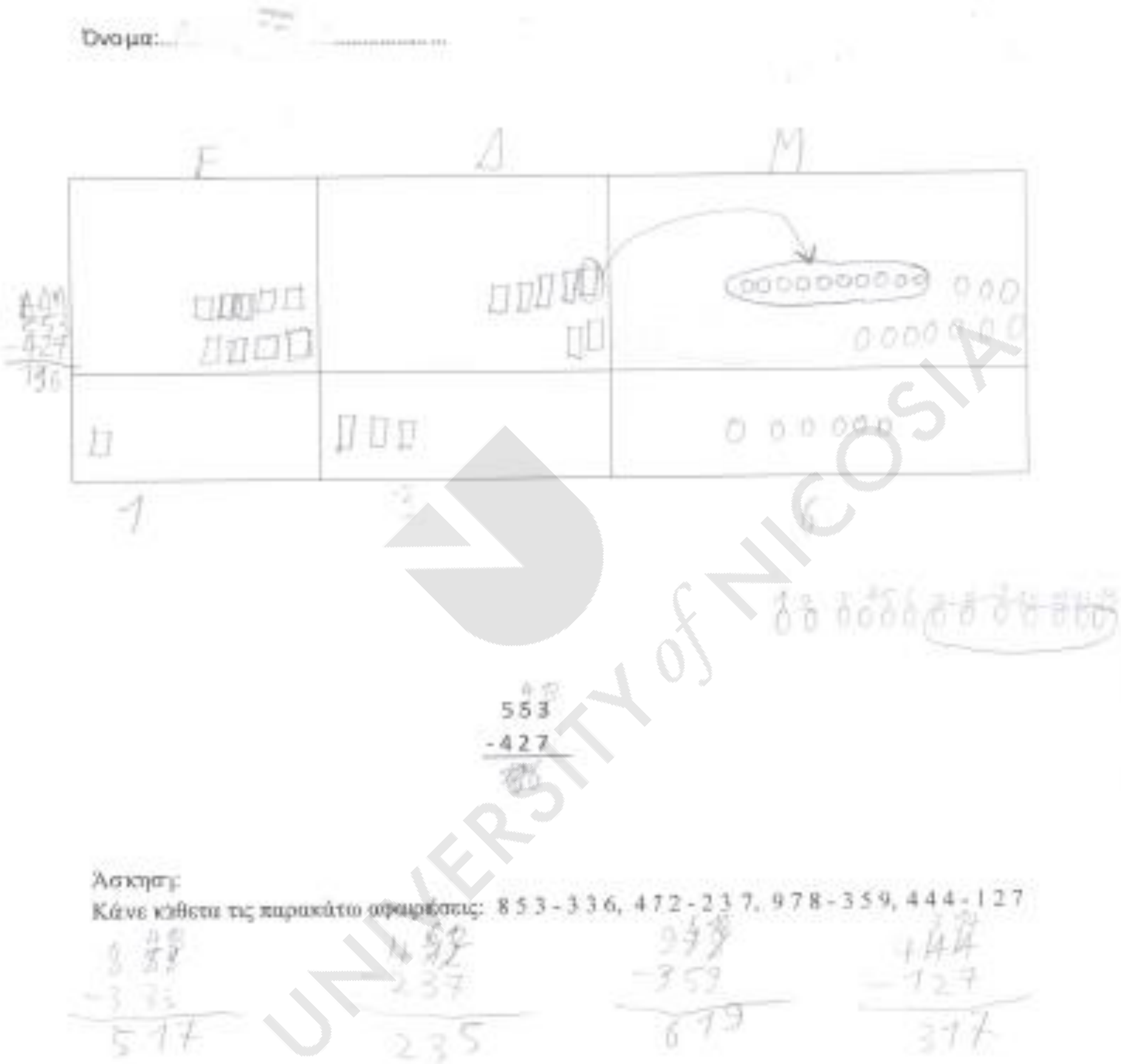


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έκτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4

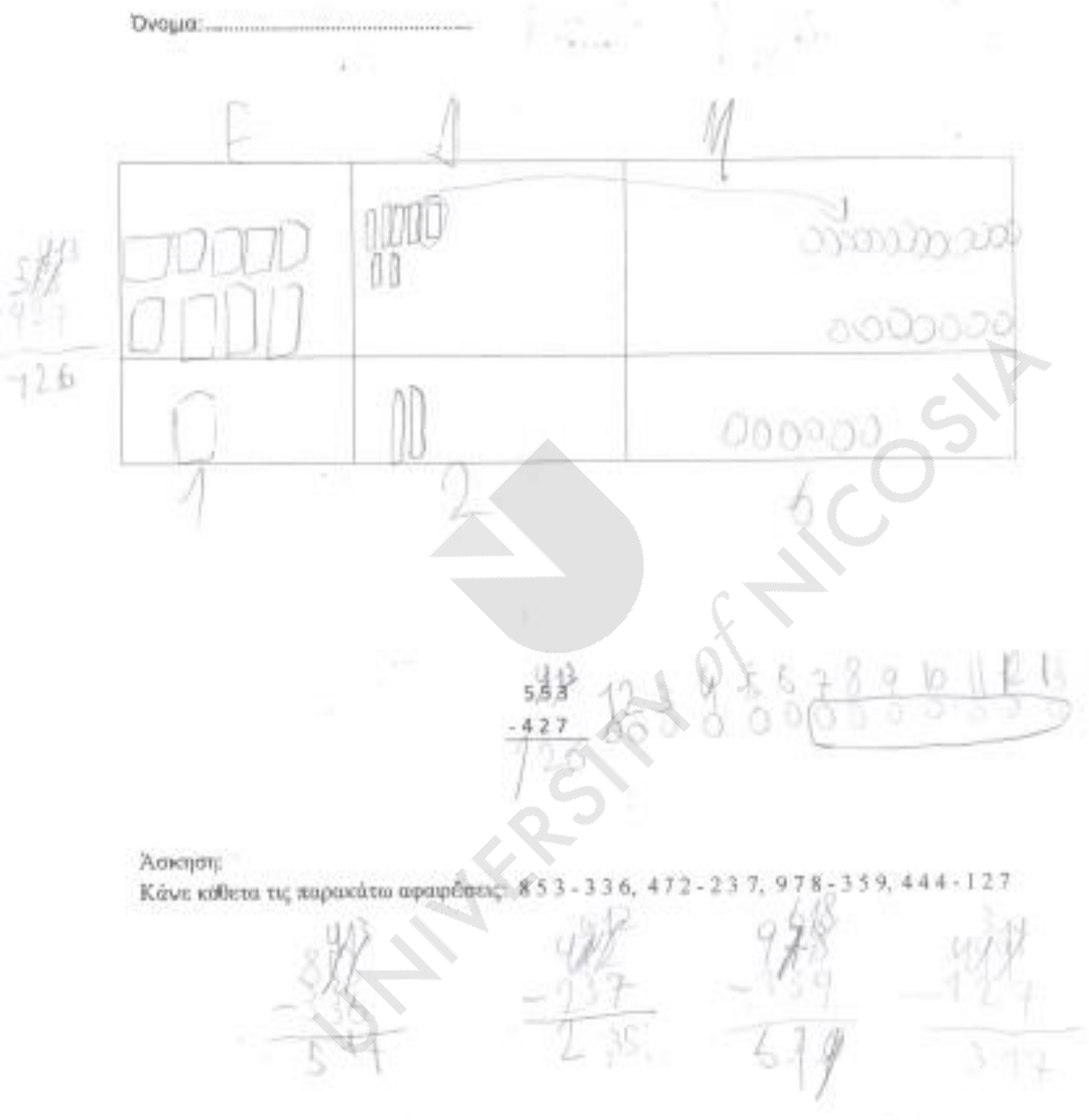
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έκτης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έβδομης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1



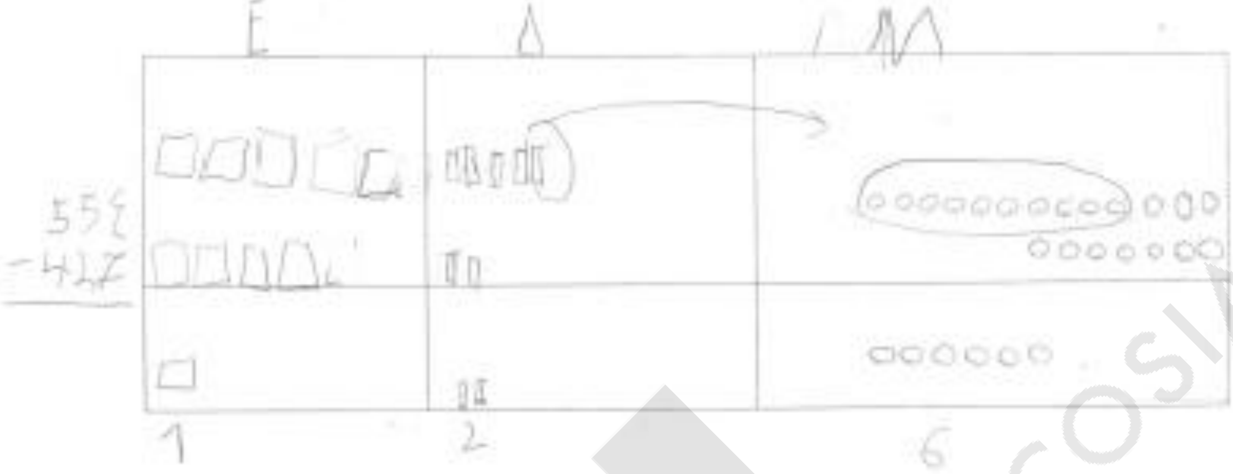
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έβδομης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2


Όνομα:..................................................

Άσκηση:
Κάνε κάθετα τις παρακάτω αφαιρέσεις: 853 - 336, 472 - 237, 978 - 359, 444 - 127

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έβδομης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3

Όνομα:




553
-427
126

Άσκηση:
Κάνε κάθετα τις παρακάτω αφαιρέσεις: 853 - 336, 472 - 237, 978 - 359, 444 - 127

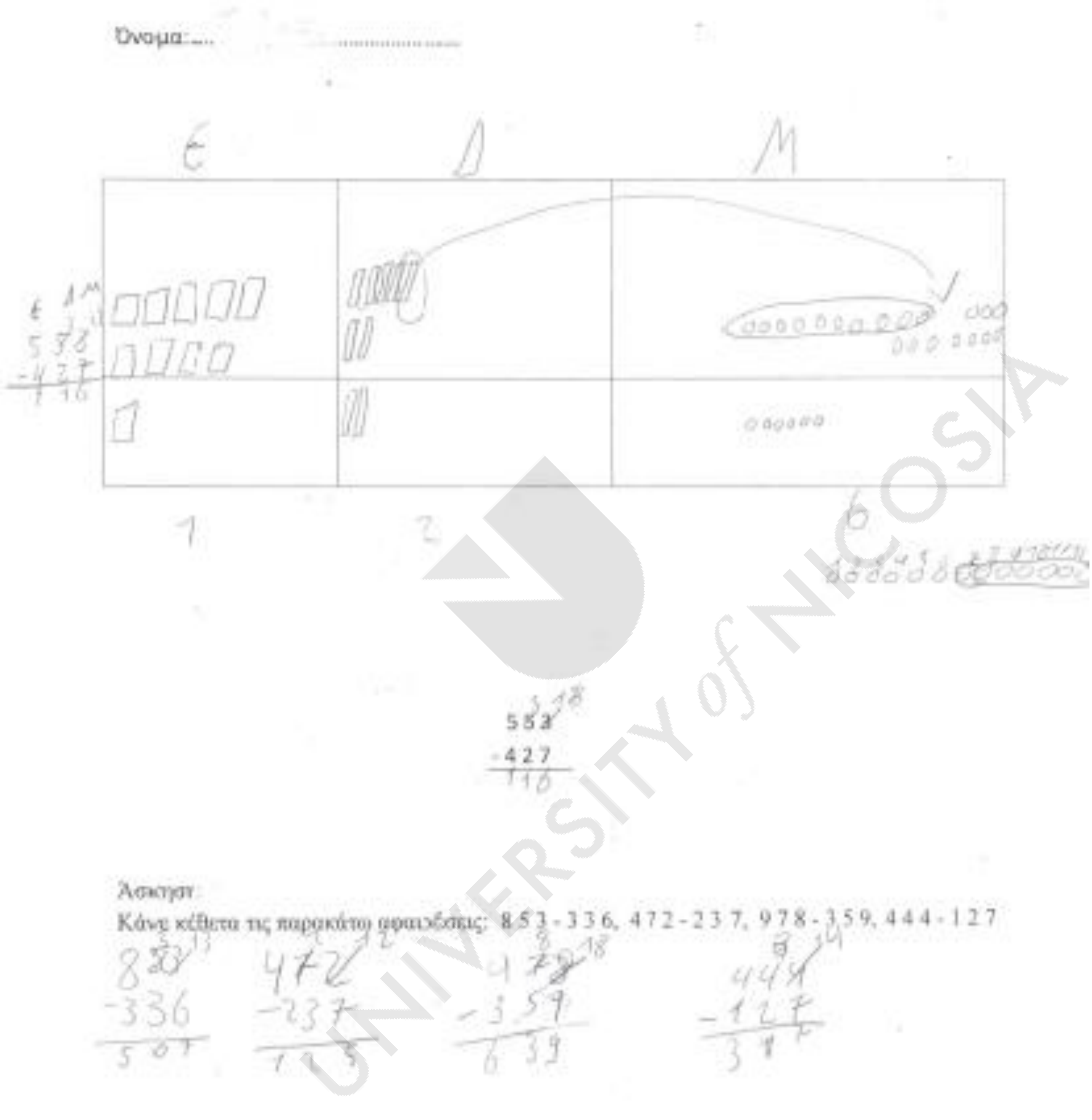
853 − 336 = 517

472 − 237 = 235

978 − 359 = 619

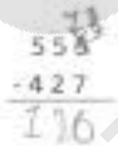
444 − 127 = 317

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έβδομης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4



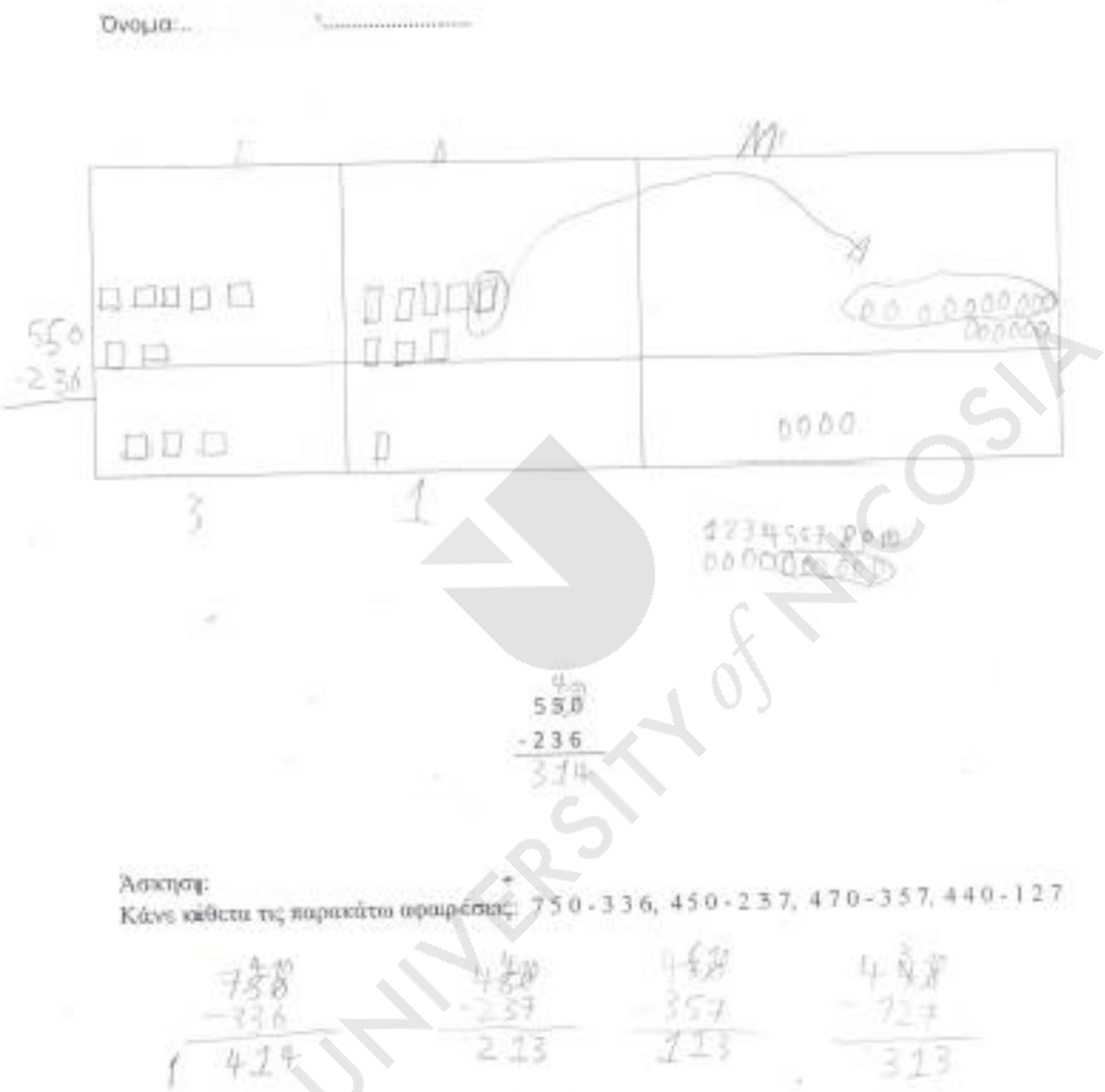
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της έβδομης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5

Όνομα: ..............................

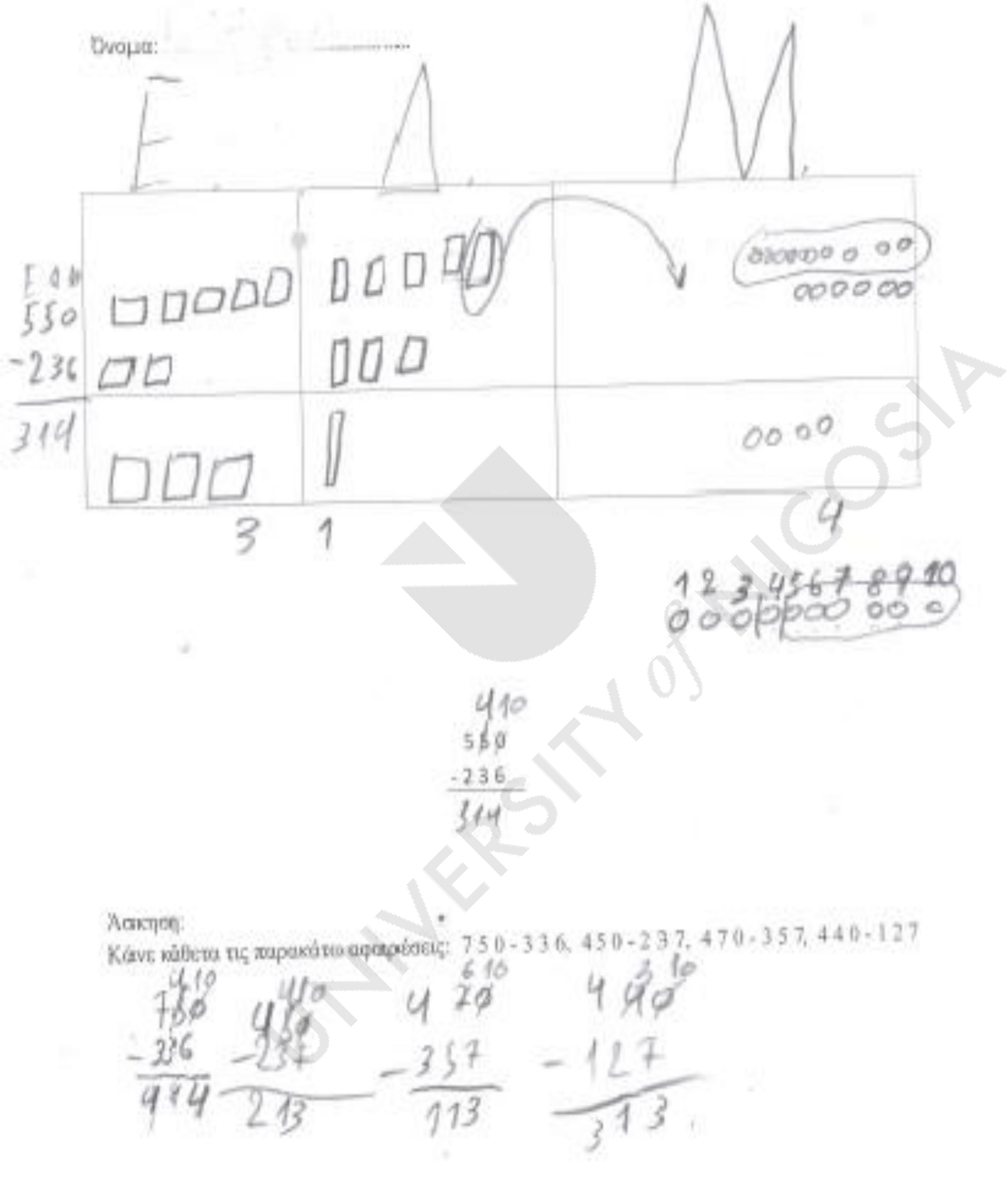


Άσκηση:
Κάνε κάθετα τις παρακάτω αφαιρέσεις: 853 - 336, 472 - 237, 978 - 359, 444 - 127

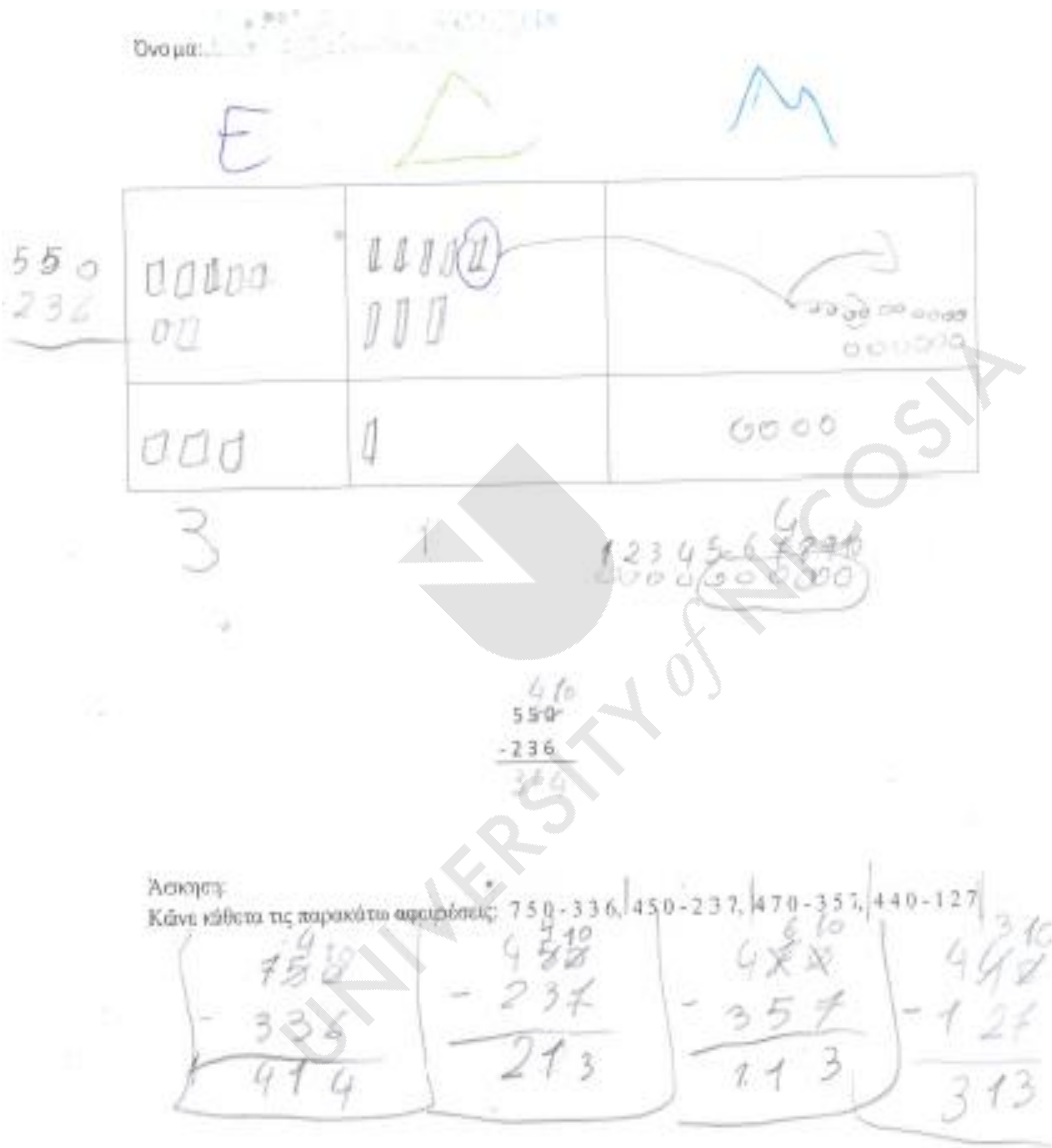
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της όγδοης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1



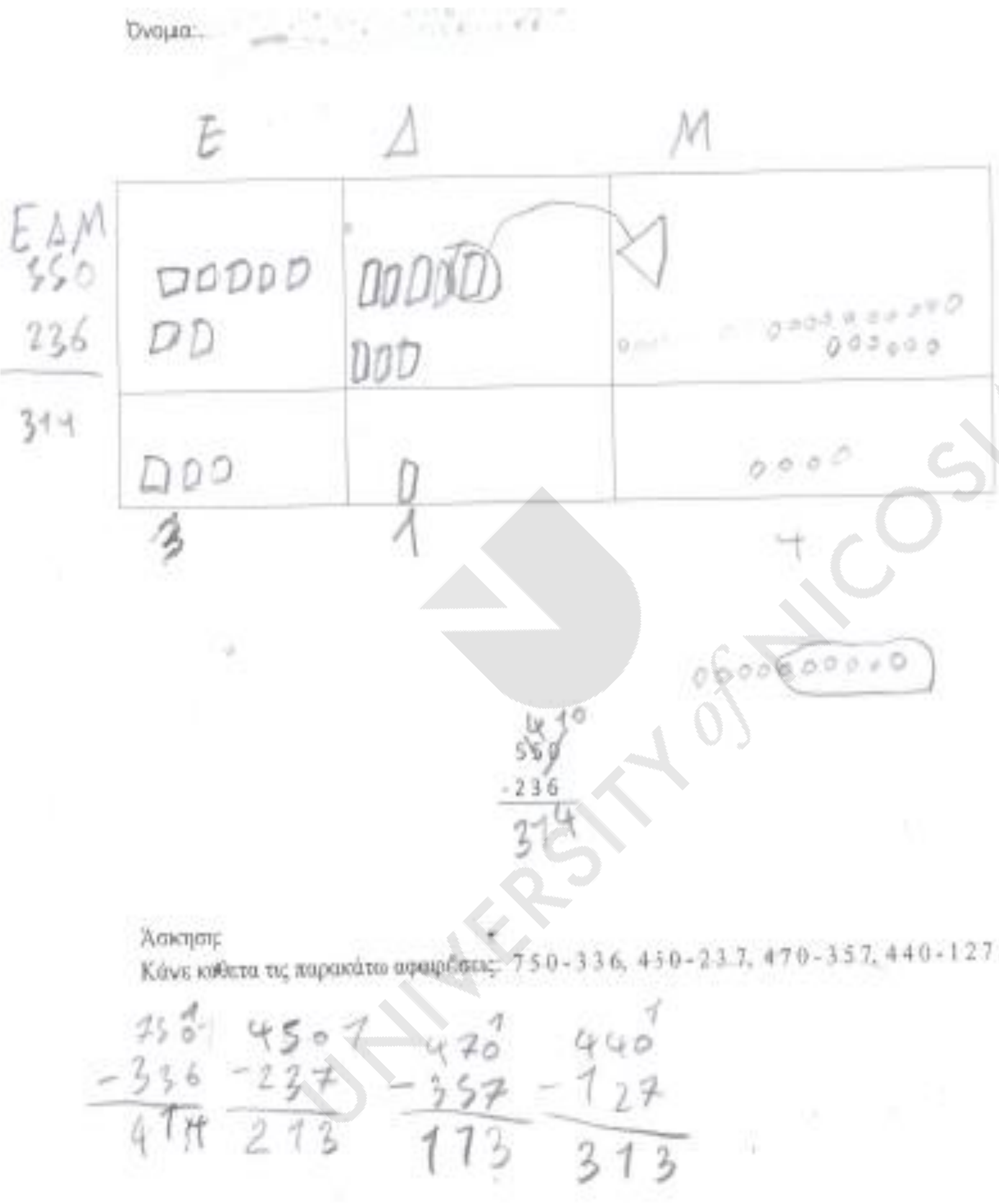
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της όγδοης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2



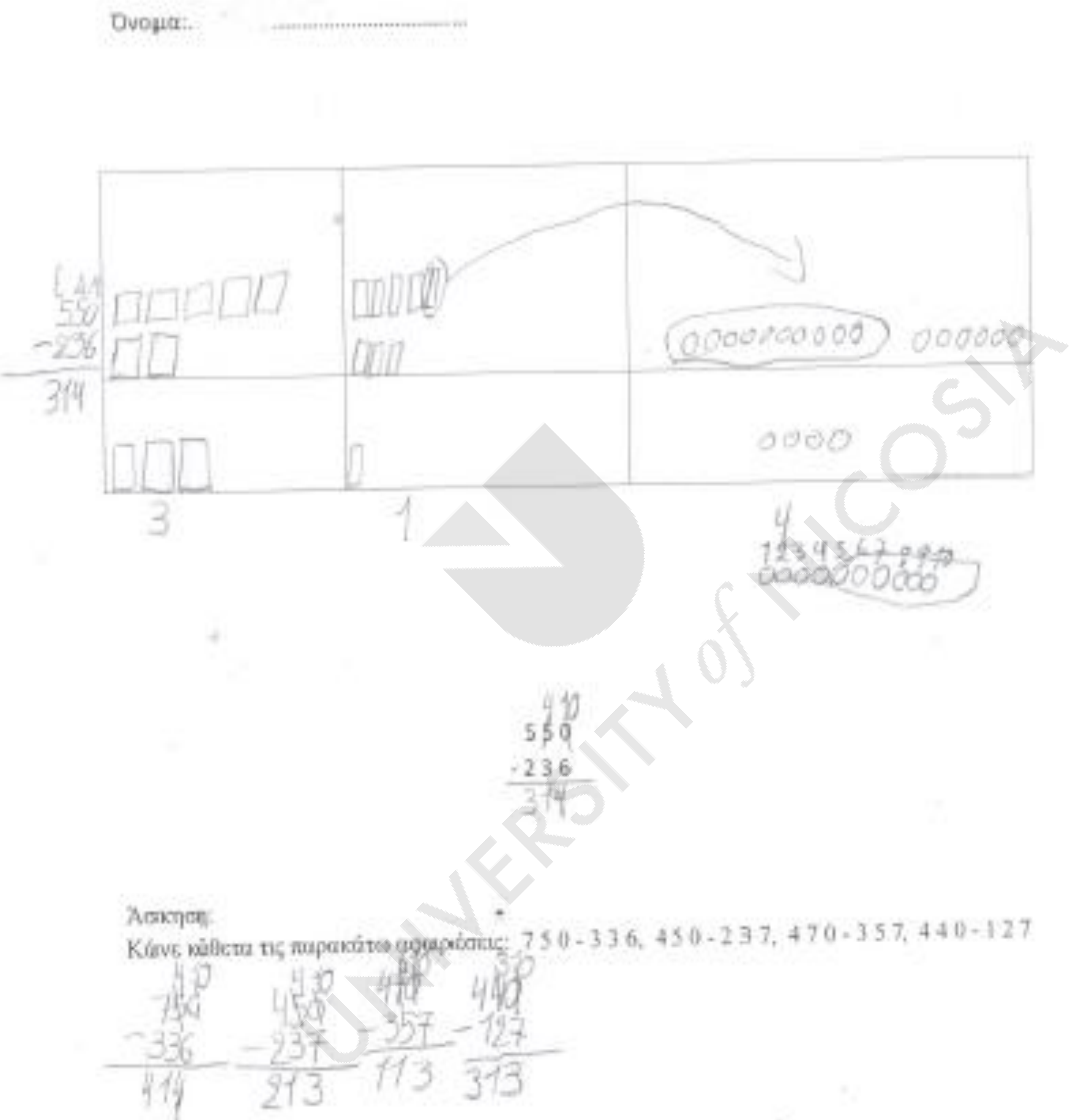
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της όγδοης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3



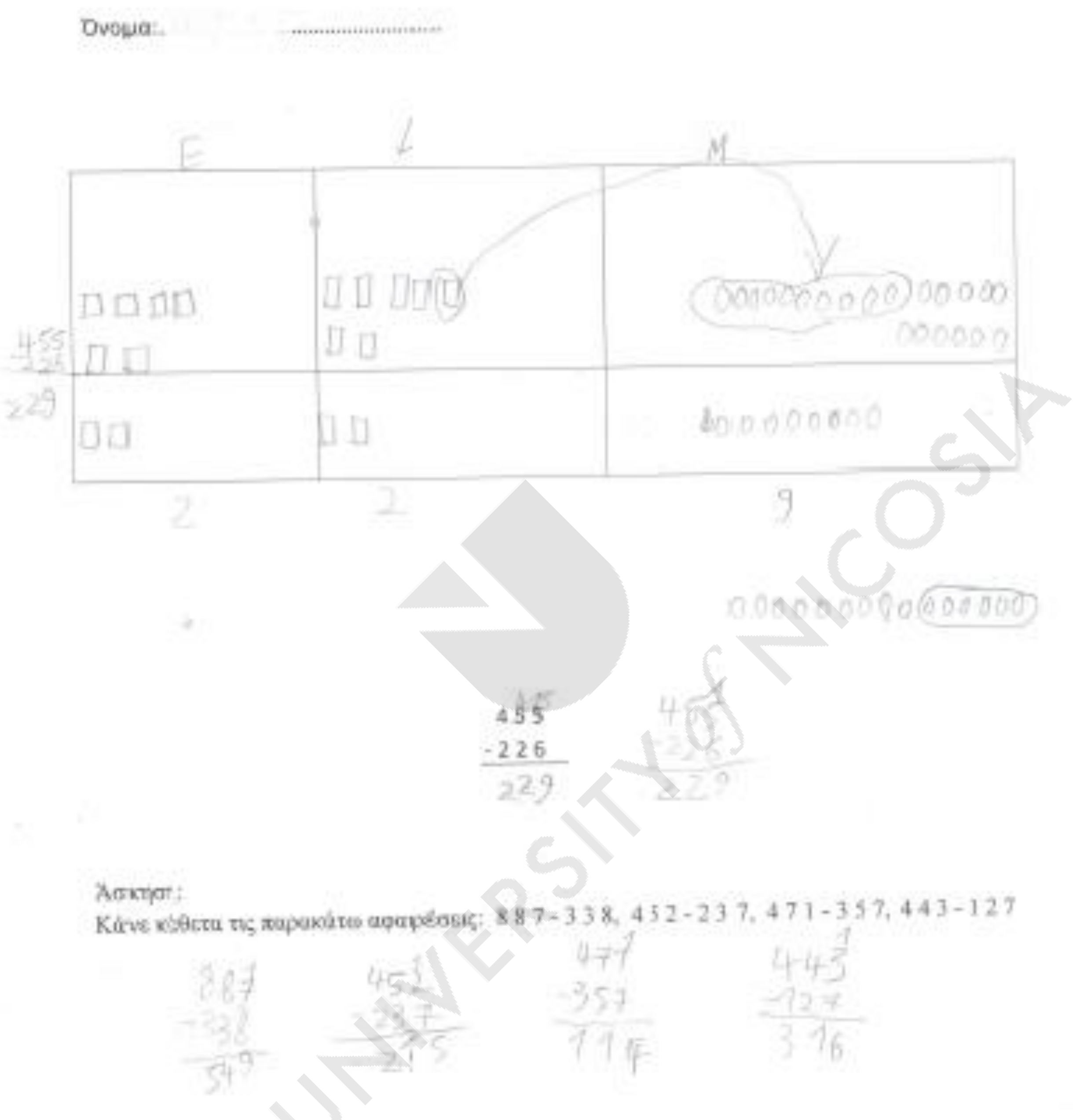
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της όγδοης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4



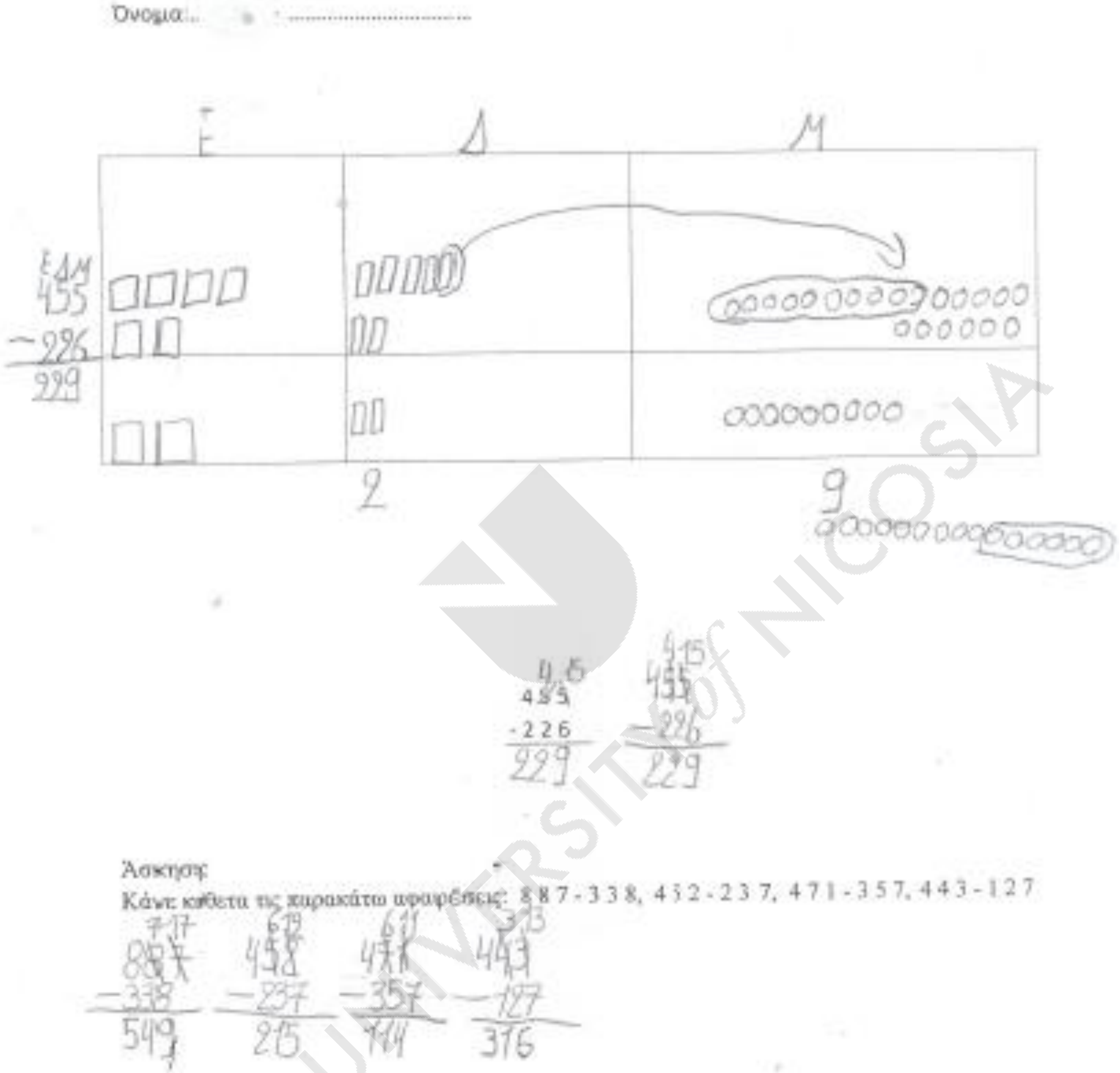
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της όγδοης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5



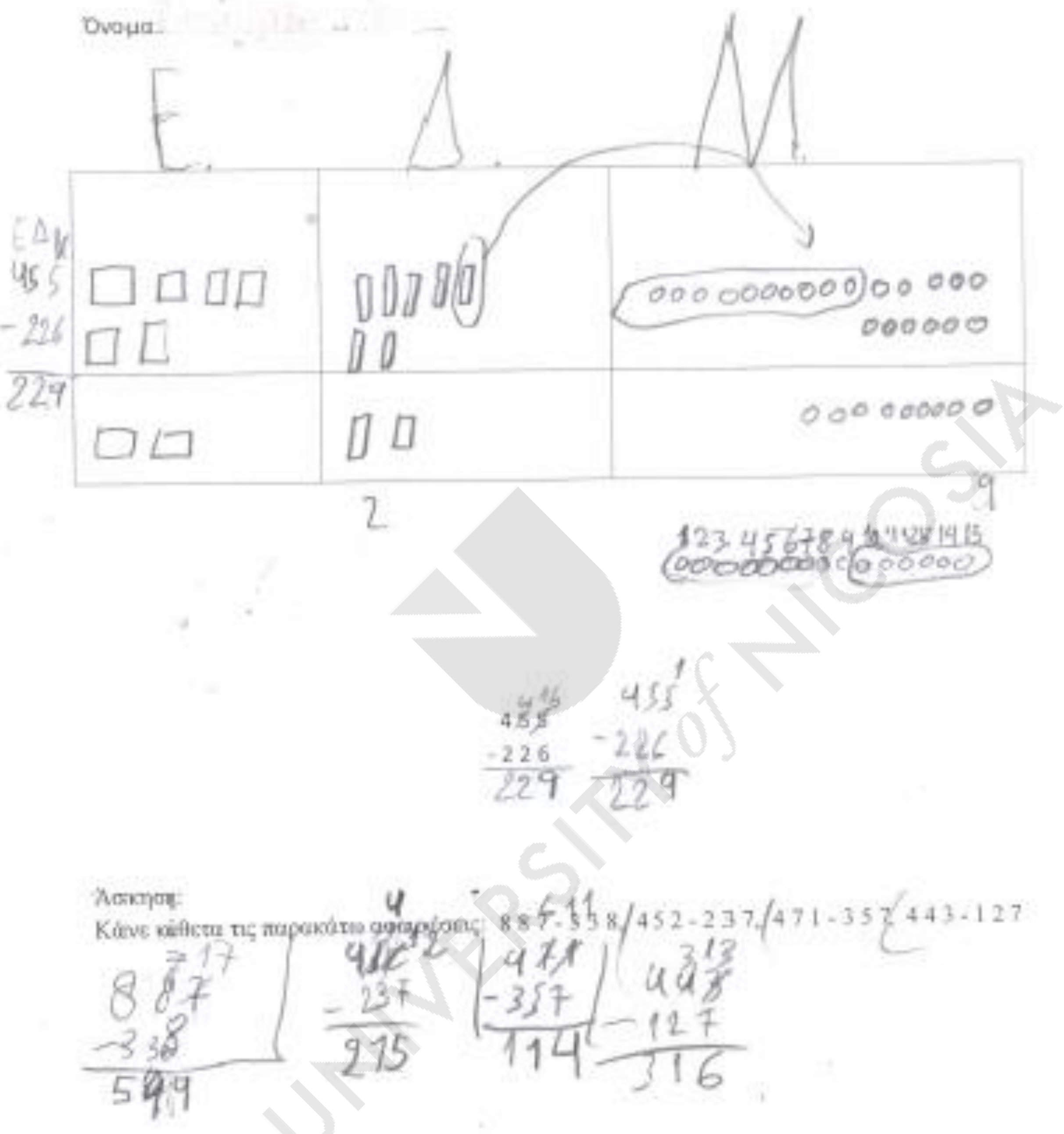
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της ένατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1



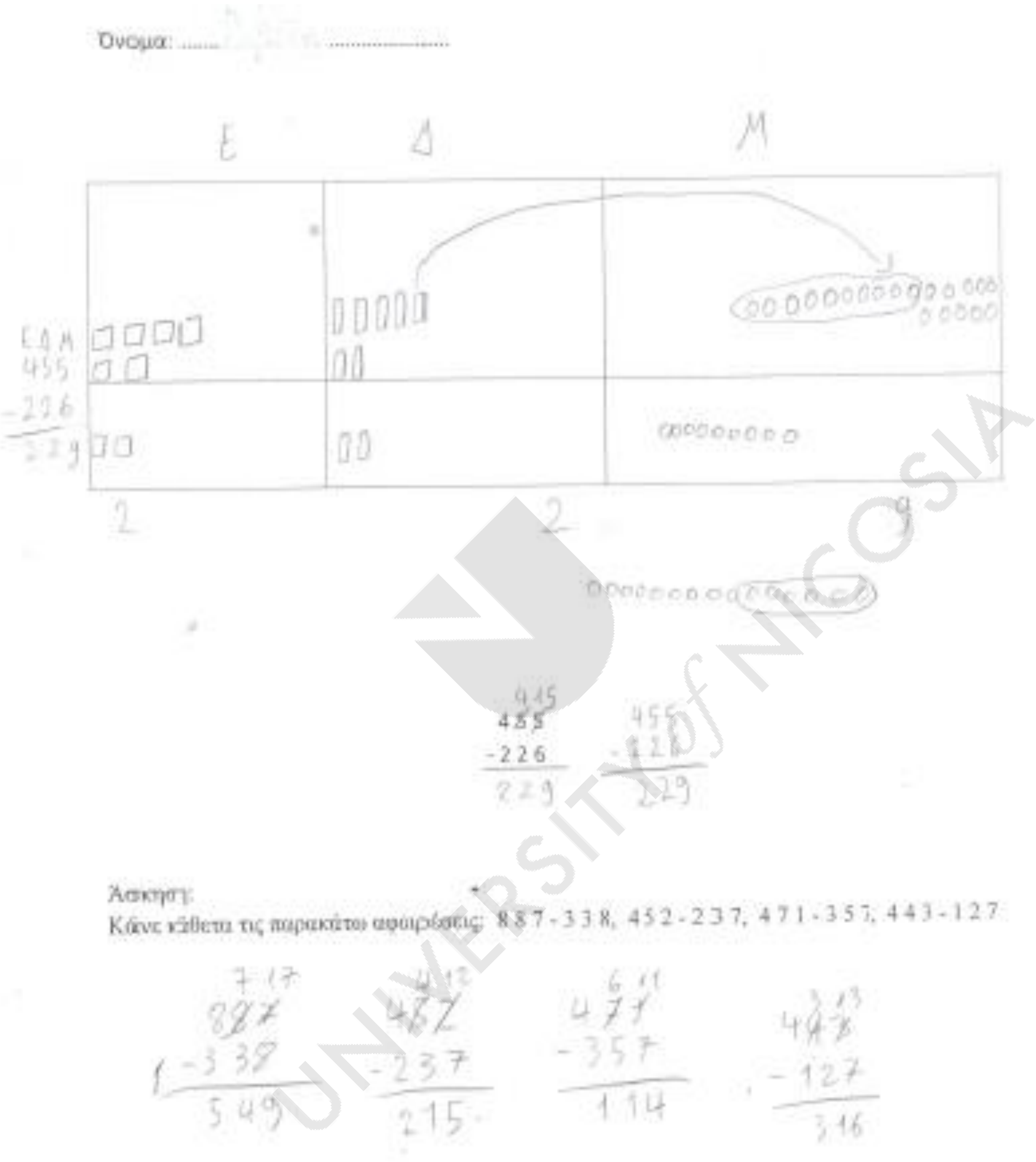
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της ένατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2



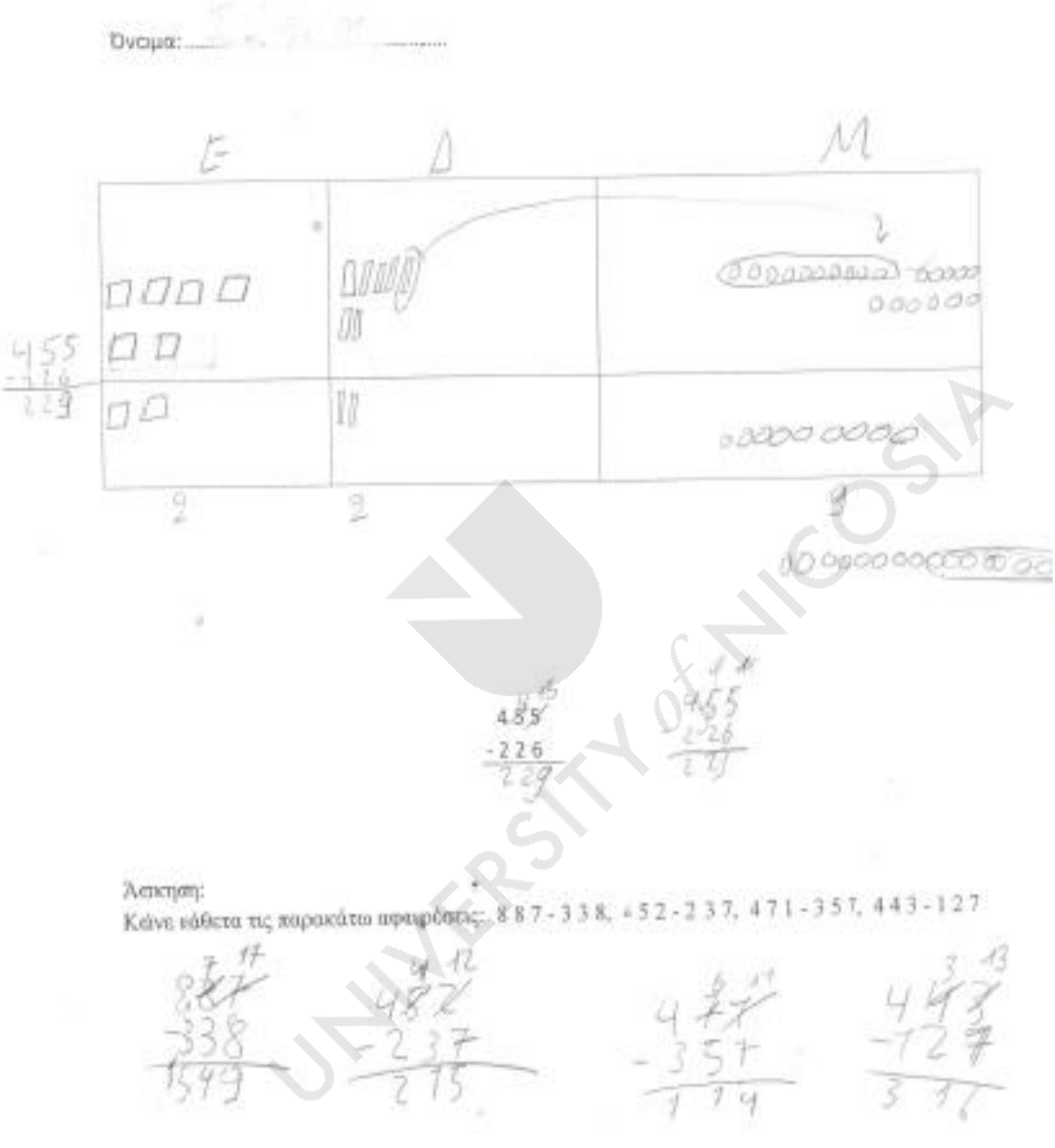
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της ένατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3



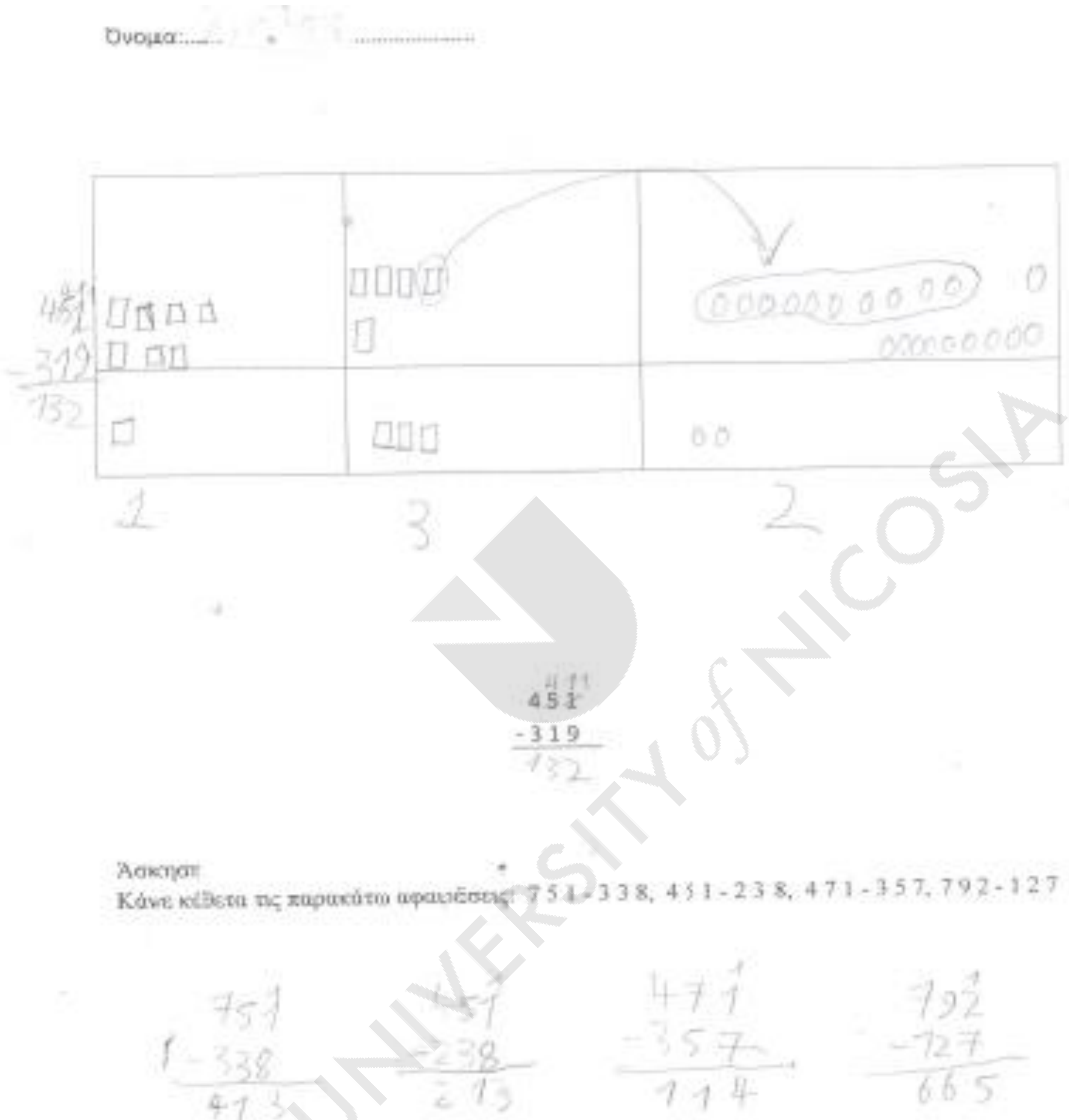
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της ένατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4



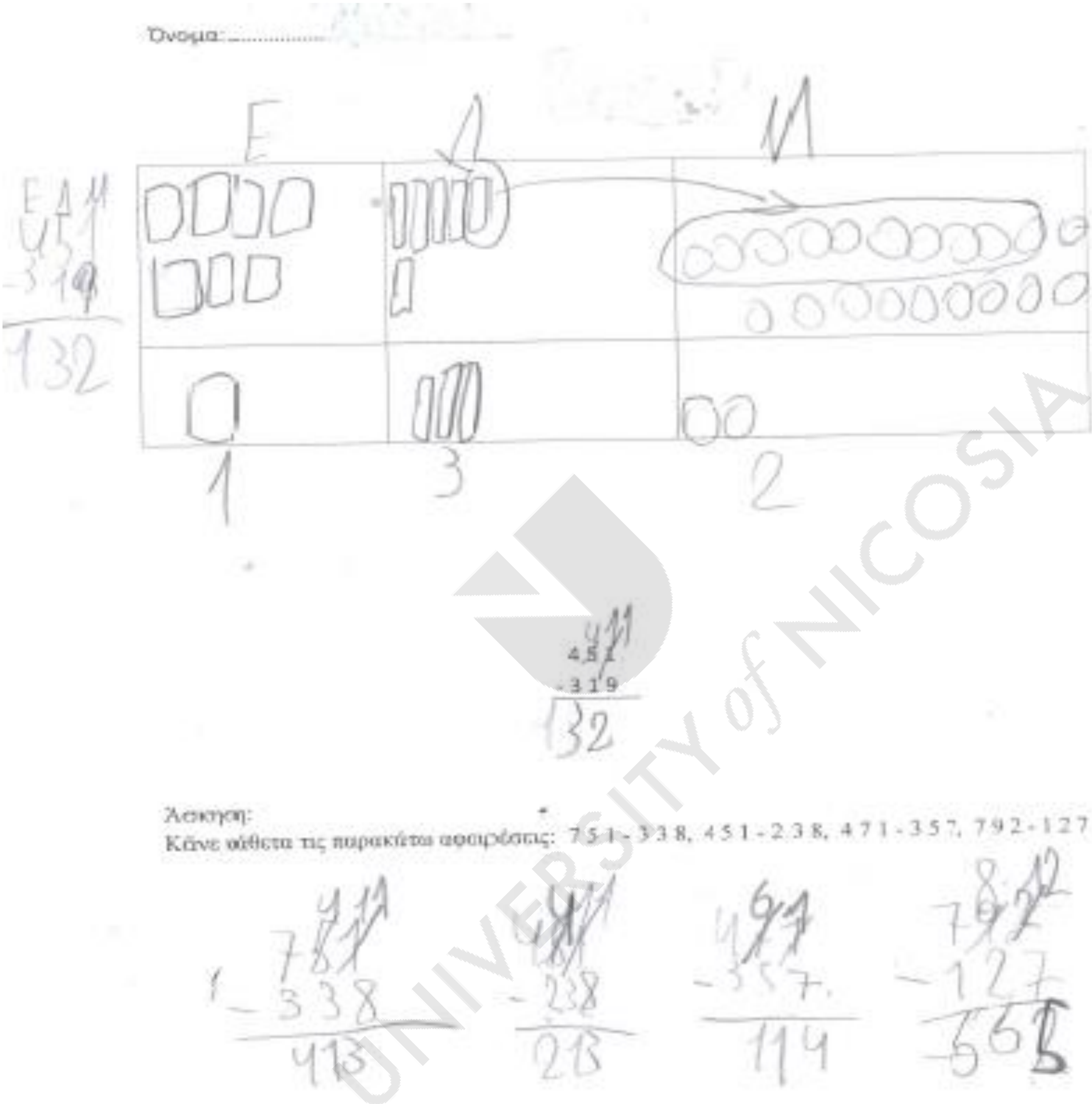
Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της ένατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δέκατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 1

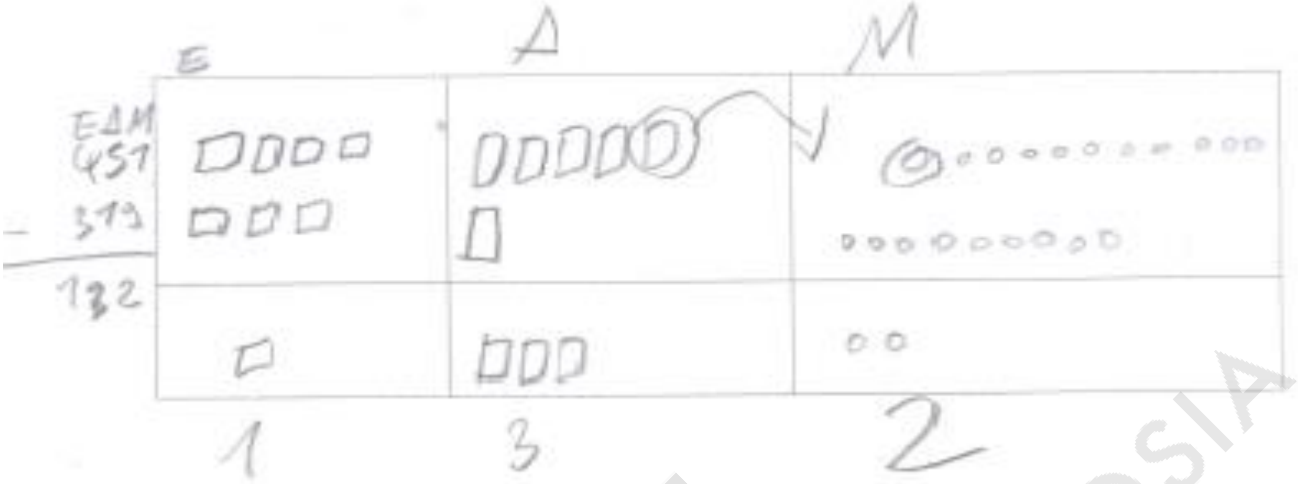


Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δέκατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 2



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δέκατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 3

Όνομα:

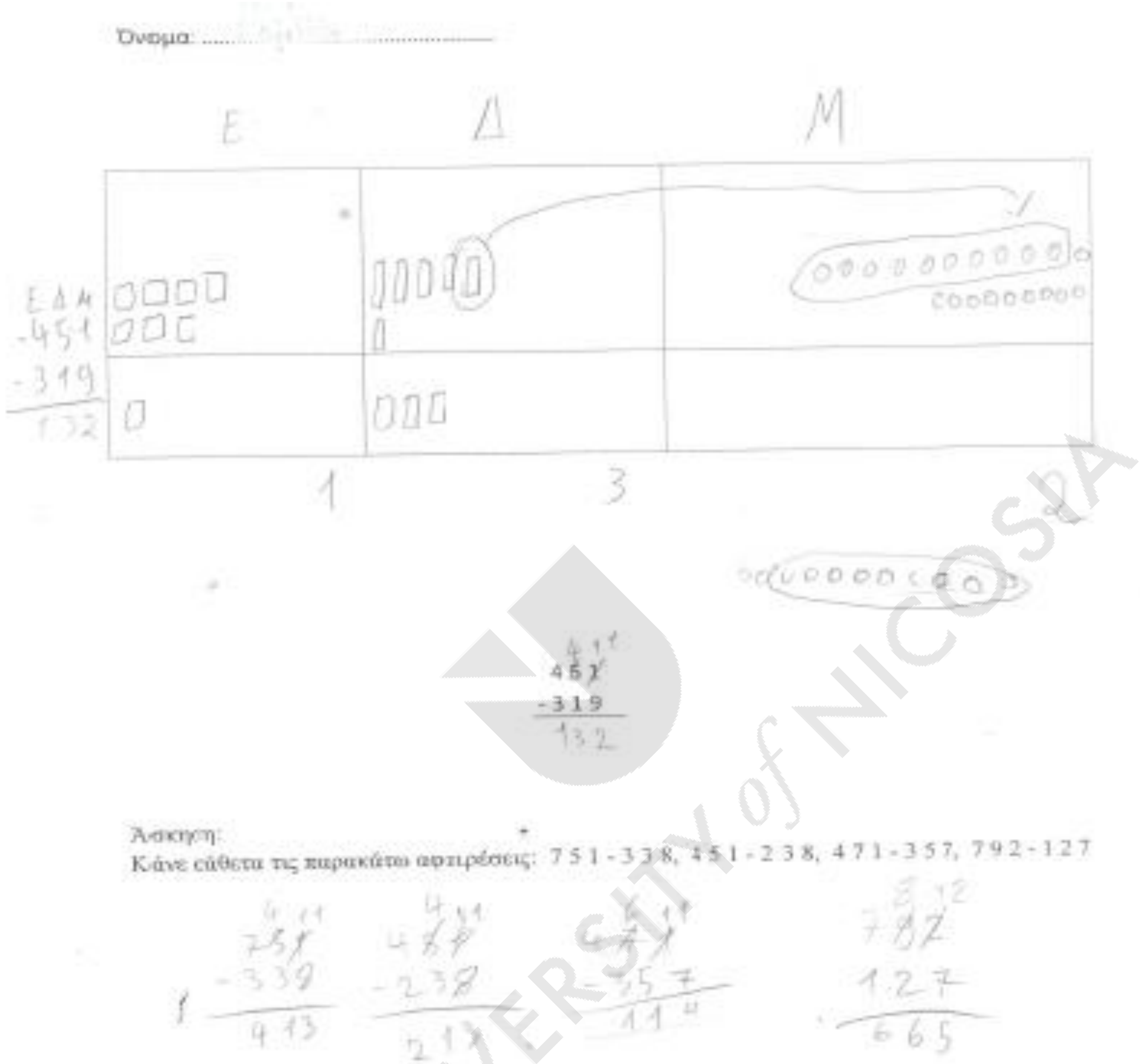



$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 451 \\ -319 \\ \hline 132 \end{array}$$

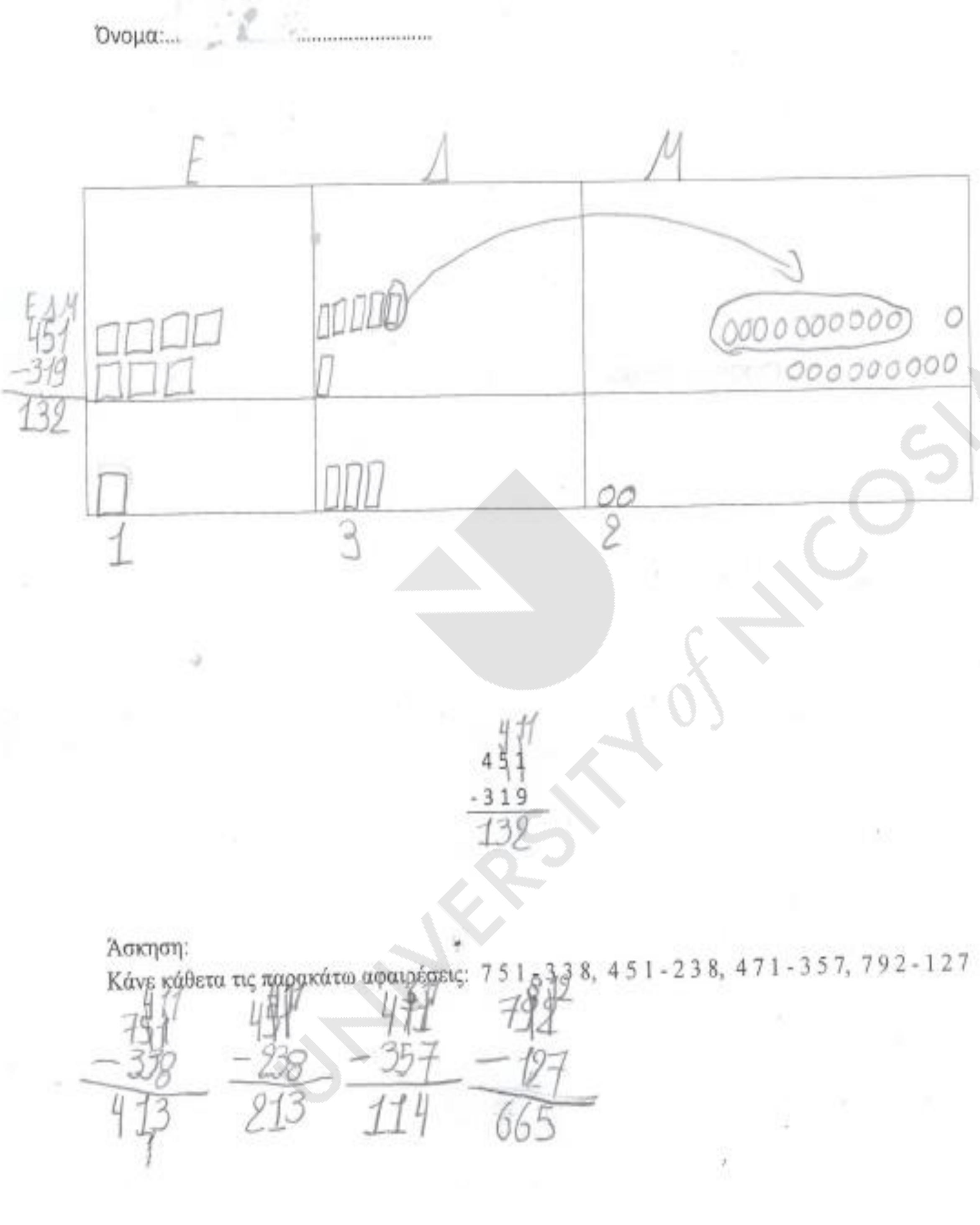
Άσκηση:
Κάνε κάθετα τις παρακάτω αφαιρέσεις: 751 - 338, 451 - 238, 471 - 357, 792 - 127

$$\begin{array}{r} 751 \\ -338 \\ \hline 413 \end{array} \quad \begin{array}{r} 451 \\ -238 \\ \hline 213 \end{array} \quad \begin{array}{r} 471 \\ -357 \\ \hline 114 \end{array} \quad \begin{array}{r} 792 \\ -127 \\ \hline 665 \end{array}$$

Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δέκατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 4



Φύλλο ελέγχου: Σχηματοποιήσεις/μοντελοποιήσεις μαθητών στην αφαίρεση με αναδόμηση μειωτέου στη στήλη των δεκάδων στο τέλος της δέκατης παρέμβασης
Κωδικός Μαθητή: 5



**Παράρτημα 14**

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση**

**Κωδικός Μαθητή: 1** **Βαθμός επίδοσης: 18/20**

**Όνομα μαθητή:.....** **Ημερομηνία:.......................**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2 6 4 | 3 4 8 | 4 5 3 | 3 5 8 | 2 5 3 | 1 2 4 |
| +3 2 7 | +4 4 2 | +2 6 2 | +2 7 1 | +3 4 7 | +3 8 8 |
| 581 | 790 | 715 | 629 | 600 | 512 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 4 6 7 | 3 0 8 | 2 4 2 | 3 4 7 |
| +3 3 2 ☐ | +2 7 5 ☑ | +2 9 4 ☑ | +1 8 2 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 15 | 2 15 | 5 17 | 8 13 | 8 14 | 5 10 |
| 3 4 5 | 2 4 5 | 9 6 7 | 8 9 3 | 7 9 4 | 3 6 0 |
| -1 3 6 | -1 2 7 | -3 0 9 | -3 6 6 | -2 7 8 | -1 5 8 |
| 209 | 118 | 658 | 527 | 516 | 202 |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 7 9 8 | 7 8 8 | 8 6 4 | 7 4 4 |
| -3 5 2 ☐ | -1 6 7 ☐ | -2 5 5 ☑ | -3 2 7 ☑ |

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση**

**Κωδικός Μαθητή: 2** **Βαθμός επίδοσης: 19/20**

**Όνομα μαθητή:...** **Ημερομηνία:...**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

(1) 264 + 327 = 591

(2) 348 + 442 = 790

(3) 453 + 262 = 715

(4) 358 + 271 = 629

(5) 253 + 347 = 600

(6) 124 + 388 = 512

Βάλε ένα ***V*** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 + 332 ☐

(8) 308 + 275 V

(9) 242 + 294 V

(10) 347 + 182 V

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(11) 345 − 136 = 209

(12) 243 − 127 = 118

(13) 967 − 309 = 658

(14) 893 − 366 = 529

(15) 794 − 278 = 516

(16) 360 − 158 = 202

Βάλε ένα ***V*** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικά για να εκτελεστούν.

(17) 798 − 352 ☐

(18) 788 − 167 ☐

(19) 864 − 255 V

(20) 744 − 327 V

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση**

**Κωδικός Μαθητή: 3** **Βαθμός επίδοσης: 20/20**

Όνομα μαθητή:............ Ημερομηνία:............

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 591 | 790 | 715 | 629 | 600 | 512 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☐ | +294 ☑ | +182 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 209 | 118 | 658 | 527 | 516 | 202 |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☐ | -167 ☐ | -255 ☑ | -327 ☑ |

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση**

**Κωδικός Μαθητή: 4** **Βαθμός επίδοσης: 20/20**

**Όνομα μαθητή:…. ….. Ημερομηνία:………………….**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 591 | 790 | 715 | 629 | 600 | 512 |

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 +332 ☐ (8) 308 +275 ☐ (9) 242 +294 ☑ (10) 347 +182 ☑

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 243 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 209 | 116 | 658 | 527 | 516 | 202 |

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

(17) 798 -352 ☐ (18) 788 -167 ☐ (19) 864 -255 ☑ (20) 744 -327 ☑

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση**

**Κωδικός Μαθητή: 5** **Βαθμός επίδοσης: 18/20**

**Όνομα μαθητή:**.......................... **Ημερομηνία:**......................

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

(1) 264 +327 = 591

(2) 348 +442 = 790

(3) 453 +262 = 715

(4) 358 +271 = 629

(5) 253 +347 = 600

(6) 124 +388 = 512

Βάλε ένα ***V*** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 +332 ☐

(8) 308 +275 ☑ √

(9) 242 +294 ☑ √

(10) 347 +182 ☑ √

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(11) 345 -136 = 209

(12) 245 -127 = 138

(13) 967 -309 = 658

(14) 893 -366 = 527

(15) 794 -278 = 516

(16) 360 -158 = 202

Βάλε ένα ***V*** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

(17) 798 -352 ☐

(18) 788 -167 ☐

(19) 864 -255 ☑ √

(20) 744 -327 ☑ √

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση (Ομάδα Ελέγχου)**

**Κωδικός Μαθητή: 6** **Βαθμός επίδοσης: 4/20**

**Όνομα μαθητή:… ……..** **Ημερομηνία:…………………**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 590 | 790 | 705 | 539 | 090 | 504 |

Βάλε ένα **ν** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 ☐ | +275 ☑ | +294 ☐ | +182 ☑ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 286 | 117 | 608 | 534 | 578 | 420 |

Βάλε ένα **ν** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 ☑ | -167 ☑ | -255 ☐ | -327 ☐ |

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση (Ομάδα Ελέγχου)**

**Κωδικός Μαθητή: 7** **Βαθμός επίδοσης: 4/20**

**Όνομα μαθητή:...** .......... **Ημερομηνία:.....................**

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

(1) 264 +327 = 591 (1)

(2) 348 +442 = 790 (0)

(3) 453 +262 = 625 (1)

(4) 358 +271 = 559 (0)

(5) 253 +347 = 898

(6) 124 +388 = 912 (1)

Βάλε ένα **V** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 +332 ☑

(8) 308 +275 ☑

(9) 242 +294 ☐

(10) 347 +182 ☐

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(11) 345 -136 = 109 (0)

(12) 245 -127 = 213 (0)

(13) 967 -309 = 658 (0)

(14) 893 -366 = 7 (0)

(15) 794 -278 = 08 (0)

(16) 360 -158 = 218

Βάλε ένα **V** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

(17) 798 -352 ☐

(18) 788 -167 ☑

(19) 864 -255 ☐

(20) 744 -327 ☐

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση (Ομάδα Ελέγχου)**

**Κωδικός Μαθητή: 8** **Βαθμός επίδοσης: 4/20**

**Όνομα μαθητή:**.................. **Ημερομηνία:**......................

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

(1) 264 + 327 = 581 (1)

(2) 348 + 442 = 780 (1)

(3) 453 + 262 = 623 (1)

(4) 358 + 271 = 539 (1)

(5) 253 + 347 = 690 (1)

(6) 124 + 388 = 602 (1) (1)

Βάλε ένα **ν** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

(7) 467 + 332 ☐

(8) 308 + 275 ☑

(9) 242 + 294 ☐

(10) 347 + 182 ☑

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(11) 345 − 136 = 209

(12) 245 − 127 = 118

(13) 967 − 309 = 668

(14) 893 − 366 = 587

(15) 794 − 278 = 526

(16) 360 − 158 = 210

Βάλε ένα **ν** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

(17) 798 − 352 ☐

(18) 788 − 167 ☐

(19) 864 − 255 ☐

(20) 744 − 327 ☐

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση (Ομάδα Ελέγχου)**

**Κωδικός Μαθητή: 9** **Βαθμός επίδοσης: 8/20**

Όνομα μαθητή: ........... Ημερομηνία:...

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) 264 | (2) 348 | (3) 453 | (4) 358 | (5) 253 | (6) 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 591 | 790 | 715 | 629 | 600 | 512 |

Βάλε ένα ***ν*** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (7) 467 | (8) 308 | (9) 242 | (10) 347 |
| +332 ☐ | +275 √ | +294 √ | +182 √ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (11) 345 | (12) 245 | (13) 967 | (14) 893 | (15) 794 | (16) 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |

Βάλε ένα ***ν*** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (17) 798 | (18) 788 | (19) 864 | (20) 744 |
| -352 ☐ | -167 ☐ | -255 ☐ | -327 ☐ |

**Μετατέστ επίδοσης μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους δεν εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση (Ομάδα Ελέγχου)**

**Κωδικός Μαθητή: 10** **Βαθμός επίδοσης: 8/20**

**Όνομα μαθητή:** ..... **Ημερομηνία:**.............

**Ασκήσεις προσθέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 348 | 453 | 358 | 253 | 124 |
| +327 | +442 | +262 | +271 | +347 | +388 |
| 591 | 790 | 715 | 629 | 509 | 512 |

Βάλε ένα **ν** στις προσθέσεις που είναι με κρατούμενο στις δεκάδες, δηλαδή όταν το άθροισμα των δύο αριθμών στις δεκάδες ξεπερνάει το 9.

| (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|
| 467 | 308 | 242 | 347 |
| +332 $\boxed{\checkmark}$ | +275 $\boxed{\checkmark}$ | +294 $\boxed{\checkmark}$ | +182 $\boxed{\checkmark}$ |

**Ασκήσεις αφαιρέσεων**

Να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις:

| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) |
|---|---|---|---|---|---|
| 345 | 245 | 967 | 893 | 794 | 360 |
| -136 | -127 | -309 | -366 | -278 | -158 |
| 211 | 122 | 662 | 533 | 524 | 218 |

Βάλε ένα **ν** στις αφαιρέσεις στις οποίες χρειάζεται δανεικό για να εκτελεστούν.

| (17) | (18) | (19) | (20) |
|---|---|---|---|
| 798 | 788 | 864 | 744 |
| -352 $\boxed{\checkmark}$ | -167 $\boxed{\checkmark}$ | -255 $\boxed{\checkmark}$ | -327 $\boxed{\checkmark}$ |

**Παράρτημα 15**

**Κλείδα παρατήρησης**

| | | **Χρόνος σε λεπτά** | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| **Μαθησιακό συμβόλαιο** | Προσανατολισμός της σκέψης των μαθητών (τι θα μάθουμε). | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| | Προσδιορίζεται ο τρόπος (πώς). | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| | Επεξήγηση ρόλων (τι θα κάνει ο εκπαιδευτικός και τι οι μαθητές. | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| | Αναφέρονται στους ρόλους. | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| **Προτυποποίηση ενεργήματος** | Δείχνει και εξηγεί πώς σκέφτεται | | | | **ν** | | | | | | | | | | | |
| | Εκτελούν το ίδιο έργο με εξωτερική καθοδήγηση. | | | | | **ν** | | | | | | | | | | |
| | Εκτελούν το ίδιο έργο με φωναχτό λόγο (λεκτική αυτοκαθοδήγηση). | | | | | | **ν** | | | | | | | | | |
| | Εκτελούν το ίδιο έργο με σιωπηρό λόγο (σιωπηρή αυτοκαθοδήγηση) | | | | | | **ν** | | | | | | | | | |
| | Δίνουν οδηγίες στον εαυτό τους τι να προσέξουν | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| | Αναφέρονται στο ενέργημα δράσης: τι θα κάνω, πώς, γιατί, κάθε πότε. | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| **Εξάσκηση** | Εξάσκηση με φύλλο εργασιών στις απεικονιστικές μοντελοποιήσεις. | | | | | | | | | | | | | | | **ν** |
| | Εξάσκηση με φύλλο εργασιών στη συμβολική εκτέλεση του αλγόριθμου | | | | | | | | | | | | | | | **ν** |
| **Αξιολόγηση** | Αυτοαξιολογούν τον εαυτό τους (πόσα σωστά πόσα όχι) | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |
| | Θετική ανατροφοδότηση από τον εκπαιδευτικό. | **ν** | | | | | | | | | | | | | | |

## Παράρτημα 16

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ**
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
-----

ΓΕΝΙΚΗ Δ/ΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Δ/ΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ & ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Π.Ε.
ΤΜΗΜΑ Α' ΣΠΟΥΔΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ


Ταχ. Δ/νση : Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη : 15180 – Μαρούσι
Ιστοσελίδα : http://www.minedu.gov.gr
Email : spudonpe@minedu.gov.gr
Πληροφορίες : Θ. Δημητρακόπουλος
Χ. Μαραγκός
Τηλέφωνο : 210 344 2425


<u>**Αποστολή με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο**</u>

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθμός Προτεραιότητας:

**Μαρούσι,** 15-3-2019

**Αρ. Πρωτοκόλλου :** Φ.15/30165/40489/Δ1

**Προς:** Τσικριτσή Αικατερίνη
tsikritsi@yahoo.gr

**Κοιν: 1) Δ/νση Π.Ε. Λάρισας**

**2) Σχολικές μονάδες της Δ/νσης Π.Ε. Λάρισας του συνημμένου πίνακα**
(μέσω της Δ/νσης Π.Ε. Λάρισας)

**ΘΕΜΑ :** Έγκριση διεξαγωγής έρευνας

**Σχετικά έγγραφα :** το σχετικό 30165/27-2-2019

Απαντώντας σε σχετικό αίτημα και έχοντας υπόψη τη με αρ. 7/21-2-2019 πράξη του Δ.Σ του Ι.Ε.Π, σας κάνουμε γνωστό ότι εγκρίνεται το αίτημα της κας Τσικριτσή Αικατερίνης, ως προς τη διεξαγωγή έρευνας, με τίτλο «Δυσαριθμησία μαθητών: δείκτες της διαταραχής στην ηλικιακή περίοδο των 8-9 ετών και η συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης στην αντιμετώπισή της», η οποία απευθύνεται σε μαθητές/τριες Γ΄ Δημοτικού, Δημοτικών Σχολείων του συνημμένου πίνακα της Διεύθυνσης Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Λάρισας, κατά τη σχολική χρονιά 2018- 2019.

Ωστόσο προϋποθέσεις θεωρούνται:

1. Η εξασφάλιση της σύμφωνης γνώμης του Συλλόγου Διδασκόντων για το σύνολο της έρευνας.
2. Η προηγούμενη επικοινωνία με τα σχολεία, ώστε η έρευνα να διεξαχθεί χωρίς να παρεμποδίζεται η ομαλή λειτουργία τους.
3. Να δοθούν δύο ξεχωριστές επιστολές συναίνεσης γονέων για κάθε φάση της έρευνας και να αναφέρεται ξεκάθαρα στις φόρμες συναίνεσης, αλλά και σε οποιαδήποτε επικοινωνία υπάρχει με γονείς και δασκάλους, ότι:

α) Οι διαδικασίες αξιολόγησης και τα εργαλεία της δεν είναι διαγνωστικά και οποιαδήποτε αξιολογική ενέργεια, πραγματοποιείται στα πλαίσια ιδιωτικής διδακτορικής έρευνας. Η διάγνωση μιας ειδικής μαθησιακής δυσκολίας όπως η δυσαριθμησία είναι αρμοδιότητα διεπιστημονικής επιτροπής (π.χ. ΚΕΣΥ, Ιατροπαιδαγωγικά Κέντρα).

β) Οι πειραματικές παρεμβάσεις δεν αποσκοπούν σε διαφήμιση ή προσωπικό όφελος.

γ) Οι γονείς και εκπαιδευτικοί δε θα λάβουν καμία ενημέρωση για την επίδοση των παιδιών τους στα ερευνητικά τεστ, προς αποφυγή λανθασμένης ταξινόμησης των παιδιών τους σε ομάδες διαταραχών.

4. Για την Α φάση της έρευνας θα απασχοληθούν οι μαθητές 2 διδακτικές ώρες, παρουσία των εκπαιδευτικών του μαθήματος και θα πραγματοποιηθεί εντός ωρολογίου προγράμματος. Δε θα απασχοληθεί κανένας μαθητής/τρια σε ώρα διαλείμματος, καθώς αυτή κρίνεται ως αντιπαιδαγωγική πράξη.

5. Η Β φάση θα πραγματοποιηθεί σε εξωδιδακτικό ωράριο σε συνεννόηση με τους γονείς και κατόπιν της έγγραφης συναίνεσής τους.

6. Η ερευνήτρια δεσμεύεται στα θέματα δεοντολογίας όπως: εξασφάλιση έγγραφης συναίνεσης των γονέων/κηδεμόνων για τη συμμετοχή των ανηλίκων μαθητών/τριών, ανωνυμία των συμμετεχόντων, δυνατότητα διακοπής της συμμετοχής τους οποιαδήποτε στιγμή της διαδικασίας, εμπιστευτικότητα προσωπικών δεδομένων και διασφάλιση ανωνυμίας, προστασία από την έκθεση σε πιθανό κίνδυνο, ταλαιπωρία ή δυσμενείς επιπτώσεις, καθώς και απαλλαγή από διαφημιστικό υλικό, σύμφωνα με την κείμενη νομοθεσία.

7. Κατά τη διάρκεια της έρευνας δεν επιτρέπεται η βιντεοσκόπηση ή μαγνητοφώνηση των μαθητών.

8. Η υποβολή ηλεκτρονικού αντιτύπου της ερευνητικής εργασίας σε ψηφιακό δίσκο στο πρωτόκολλο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Αν. Τσόχα 36, Τ.Κ. 115 21, Αθήνα), καθώς και η ενυπόγραφη, σύμφωνη ή όχι, γνώμη της ερευνήτριας για το εάν επιτρέπει στο Ι.Ε.Π. να προβεί σε ηλεκτρονική ανάρτηση της ερευνητικής εργασίας.

Παρακαλείται ο Διευθυντής ΠΕ Λάρισας να ενημερώσει σχετικά τα σχολεία στα οποία θα διεξαχθεί η εν λόγω έρευνα.

**Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,**

**ΕΡΕΥΝΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ**

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ**

THEODOROS DIMITRAKOPOULOS
2019.03.15 07:52:12

THEODOROS DIMITRAKOPOULOS
CN=THEODOROS DIMITRAKOPOULOS
C=GR
O=Hellenic Public Administration Certification Services
E=thdimitrakopoulos3@minedu.gov.gr
Public key:

**Παράρτημα 17**

**1η Επιστολή Συναίνεσης των Γονέων**

Αξιότιμοι γονείς,

Ονομάζομαι Τσικριτσή Αικατερίνη, είμαι εκπαιδευτικός Ειδικής Αγωγής (Π.Ε. 70,5) και υπηρετώ σε Τμήμα Ένταξης Δημοτικού Σχολείου του Ν. Λάρισας.

Στο πλαίσιο της διδακτορικής μου διατριβής στην Ειδική Αγωγή στο Πανεπιστήμιο Λευκωσίας της Κύπρου, με επόπτες τους κ. Σαλβαρά Ιωάννη, ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και Καθηγητή Διδακτικής του Πανεπιστημίου Λευκωσίας, τον κ. Στασινό Δημήτρη, Καθηγητή Ειδικής Αγωγής και Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Λευκωσίας και την κα. Μοσκοφόγλου – Χιονίδου Μαρία, Αναπληρώτρια καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αιγαίου, εκπονώ έρευνα με Τίτλο: «Δυσαριθμησία μαθητών: δείκτες της διαταραχής στην ηλικιακή περίοδο των 8-9 ετών και η συμβολή της μοντελοποίησης/σχηματοποίησης στην αντιμετώπισή της».

Ο σκοπός της έρευνας είναι διττός. Αφενός στοχεύει στη συνεξέταση των ικανοτήτων στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία και των γνωστικών λειτουργιών μαθητών Τρίτης Δημοτικού, με σκοπό την αποσαφήνιση του προτύπου των ελλειμμάτων που θεωρούνται αντιπροσωπευτικά της ειδικής μαθησιακής δυσκολίας στα μαθηματικά, και αφετέρου στη διερεύνηση της συμβολής παρέμβασης σε αυτά τα ελλείμματα μέσω των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεων τους για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Η διαδικασία στην παρούσα έρευνα συμπεριλαμβάνει τη χορήγηση αρχικά τριών εργαλείων για την ανίχνευση των μαθητών που ενδιαφέρει την έρευνα, η οποία διαρκεί περίπου 60 λεπτά, συμπεριλαμβανομένου ενός διαλείμματος 15΄. Μετά την εξεύρεση των συμμετεχόντων θα λάβουν χώρα οι ατομικές συνεδρίες. Η κάθε ατομική συνεδρία θα περιλαμβάνει την εξέταση της ικανότητας της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της ικανότητας της επεξεργασίας συμβολικών ποσοτήτων και τις γνωστικές λειτουργίες, με τη χορήγηση προς αυτόν τον σκοπό των κατάλληλων εργαλείων. Πρόκειται για μια βραχύχρονη διαδικασία αξιολόγησης των προαναφερθέντων ικανοτήτων, σε ατομικό επίπεδο, η οποία θα λάβει χώρα σε ξεχωριστό από την τάξη του μαθητή χώρο (π.χ. βιβλιοθήκη, γραφείο δασκάλων, κάποια άδεια τάξη συμπεριλαμβανομένου τμήματος ένταξης ή τμήματος ενισχυτικής διδασκαλίας) και η διάρκεια της οποίας δεν ξεπερνάει τα 20΄.

Μετά τη συλλογή των δεδομένων που αφορούν στις ανωτέρω ικανότητες θα πραγματοποιηθεί η αποκαταστασιακή παρέμβαση με τη μορφή της σχηματοποίησης / μοντελοποίησης των ποσοτήτων κατά την εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. σε πέντε μαθητές οι οποίοι θα προκύψουν με τυχαία δειγματοληψία. Οι μαθητές θα δεχτούν εξατομικευμένη υποστήριξη ίδιας μορφής, συνολικής διάρκειας 10 διδακτικών ωρών για τους δύο αλγόριθμους.

Η συμμετοχή των παιδιών σας στην έρευνα θα επιτρέψει τη συλλογή δεδομένων και τη συμπλήρωση της ήδη υπάρχουσας γνώσης για τη συγκεκριμένη δυσκολία στα μαθηματικά, τη βελτίωση της πρόωρης αναγνώρισής της και τη στοχοθέτηση ευστοχότερων προγραμμάτων.

Κατά τη διαδικασία συλλογής των δεδομένων θα ακολουθηθεί αυστηρά ο κώδικας ηθικής και δεοντολογίας, ο οποίος προϋποθέτει ότι τα στοιχεία των παιδιών σας θα είναι απόρρητα με τη χρήση κωδικών αντί ονομάτων, την εκούσια επιλογή της συμμετοχής τους και τη δική σας, τη δυνατότητά σας να αποσύρετε τη συμμετοχή του παιδιού σας σε οποιοδήποτε στάδιο της έρευνας, το σεβασμό σε μια ενδεχόμενη κούραση του μαθητή από τη χορήγηση εργαλείου και την αποδοχή της επιθυμίας του να μη συνεχίσει άλλο.

Σας ευχαριστώ εκ των προτέρων για τη συνεργασία σας! Στη συνέχεια σας ζητείται να δώσετε αρχικά τη συγκατάθεσή σας για τη συμμετοχή του παιδιού σας στη φάση της έρευνας, η οποία συμπεριλαμβάνει τη χορήγηση τριών εργαλείων για την ανίχνευση των μαθητών που ενδιαφέρει την έρευνα, και τη βραχύχρονη αξιολόγηση των ικανοτήτων στη μη συμβολική αριθμητική διάκριση, στη συμβολική αριθμητική επεξεργασία και στις γνωστικές λειτουργίες. Για τους εν δυνάμει συμμετέχοντες στην παρέμβαση θα δοθεί εκ νέου 2$^{o}$ έντυπο συγκατάθεσης.

Αν έχετε οποιεσδήποτε απορίες και χρειάζεστε περαιτέρω εξηγήσεις τηλεφωνήστε μου στο 6945…………………………………….

Έντυπο συγκατάθεσης γονέων

☐ Κατόπιν ανάγνωσης των προαναφερόμενων πληροφοριών συμφωνώ να συμμετέχει το παιδί μου στην προαναφερόμενη φάση της έρευνας

☐ Θα λάβω αντίγραφο του έντυπου συγκατάθεσης όταν αυτό υπογραφεί.

**Υπογραφή γονέα ή κηδόμενα**

**……………………………………………….**

**Τηλέφωνο επικοινωνίας**

**……………………………………………….**

**Ονοματεπώνυμο μαθητή**

**Υπογραφή ερευνήτριας που έλαβε τη συγκατάθεση**

………………………………………………..

**2η Επιστολή Συναίνεσης των Γονέων**

Αξιότιμοι γονείς,

Μετά την 1η επιστολή συναίνεσης κατά την οποία γίνεται αναλυτική ενημέρωση σχετικά με τη σημαντικότητα, τον σκοπό και τη διαδικασία της παρούσας έρευνας και εν γένει την πραγμάτωση της όλης ερευνητικής διαδικασίας τηρώντας απόλυτα τον κώδικα ηθικής και δεοντολογίας, σας ζητείται να δώσετε τη συγκατάθεσή σας για την εν δυνάμει συμμετοχή του παιδιού σας, αν και εφόσον επιλεγεί με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας, στη φάση της έρευνας, η οποία συμπεριλαμβάνει τη διερεύνηση της συμβολής παρέμβασης, μέσω των σχηματοποιήσεων / μοντελοποιήσεων, ως μέσου αναπαράστασης των αριθμητικών ποσοτήτων και των σχέσεών τους για την ενεργό κινητοποίηση των σύμπλοκων σχέσεων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και γνωστικών λειτουργιών κατά την εκμάθηση των αλγορίθμων των αριθμητικών πράξεων με τη στρατηγική διδασκαλίας της γνωστικής μαθητείας.

Ειδικότερα, ο κάθε μαθητής θα δεχτεί δέκα διδακτικές ώρες παρέμβασης (πέντε για προσθέσεις και πέντε για αφαιρέσεις) σε ώρες εκτός ωρολογίου προγράμματος και σε χώρο που θα ορίζετε εσείς οι γονείς, κατόπιν τηλεφωνικής συνεννόησης στο 6945…………………… Σας ευχαριστώ εκ νέου για τη συμβολή σας στην πραγμάτωση αυτής της ερευνητικής προσπάθειας.

Αναφορικά με την παρέμβαση που θα λάβει χώρα, θα πρέπει επιπροσθέτως να γνωστοποιηθούν τα κάτωθι:

Η εκπαιδευτική παρέμβαση με τη μορφή σχηματοποιήσεων/μοντελοποιήσεων με τη διδακτική στρατηγική της γνωστικής μαθητείας δε γίνεται με σκοπό τη διαφήμιση ή την προώθηση προσωπικού συμφέροντος.

Η αξιολόγηση <u>δεν έχει το κύρος γνωμάτευσης</u> (όπως π.χ. από αρμόδιο Κ.Ε.Σ.Υ. ή

Ιατροπαιδαγωγική Υπηρεσία) καθώς μόνο αρμόδια διεπιστημονική επιτροπή δύναται να διαγνώσει ειδικές μαθησιακές δυσκολίες. Η αξιολόγηση των παιδιών σας γίνεται καθαρά σε πλαίσια διδακτορικής διατριβής.

Δε θα λάβετε επιστολή-ενημέρωση περί διάγνωσης ή οποιασδήποτε αξιολογικής κατάταξης των παιδιών σας.

Έντυπο συγκατάθεσης γονέων

☐ Κατόπιν ανάγνωσης των προαναφερόμενων πληροφοριών συμφωνώ να συμμετέχει το παιδί μου στην προαναφερόμενη φάση της έρευνας

☐ Θα λάβω αντίγραφο του έντυπου συγκατάθεσης όταν αυτό υπογραφεί.

**Υπογραφή γονέα ή κηδόμενα**

**………………………………………………**

**Τηλέφωνο επικοινωνίας**

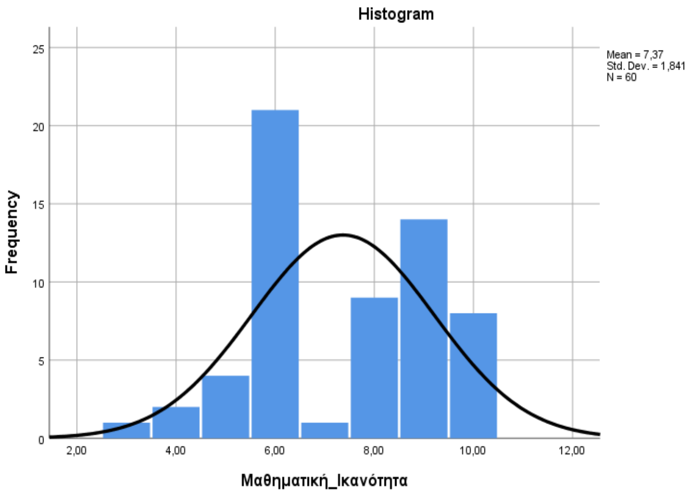
**………………………………………………**

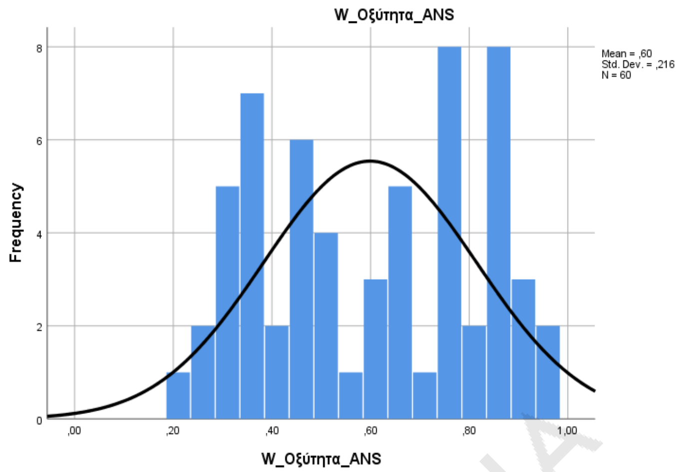
**Ονοματεπώνυμο μαθητή**

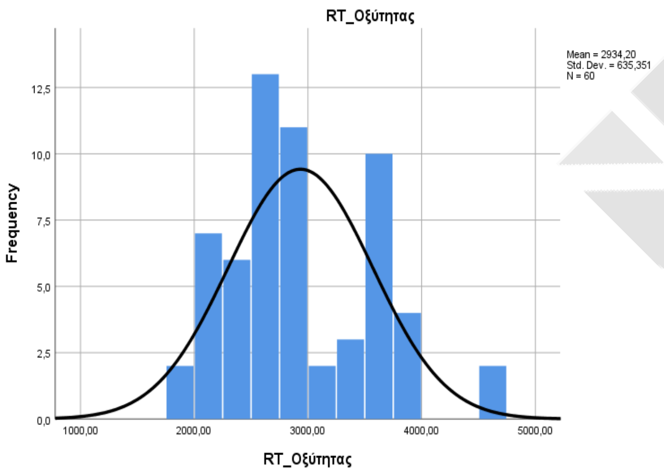
**Υπογραφή ερευνήτριας που έλαβε τη συγκατάθεση**

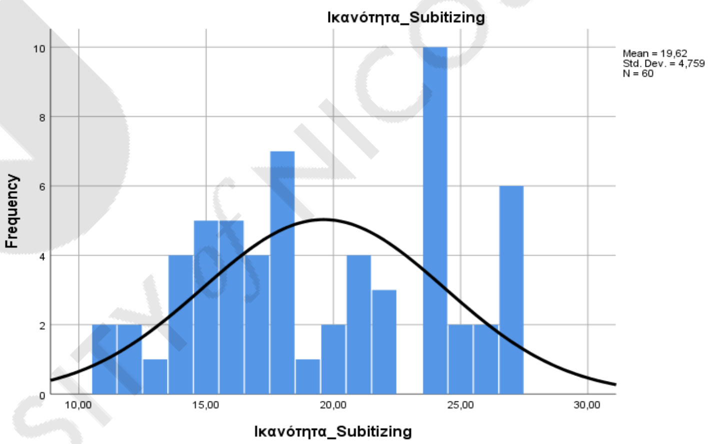
………………………………………………

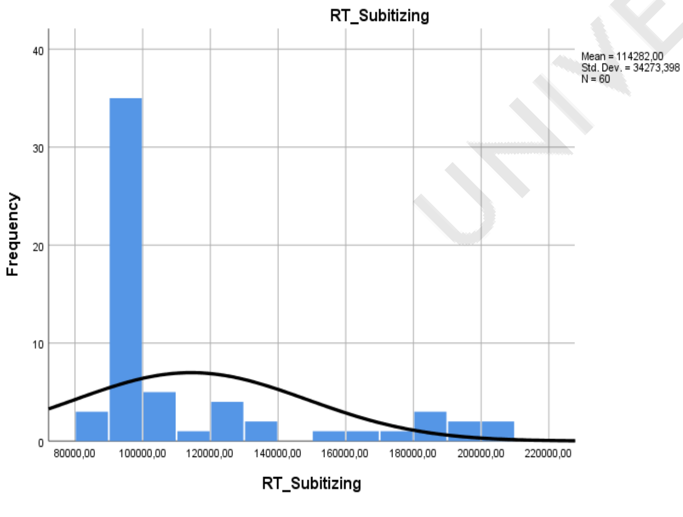
## Παράρτημα 18
**Ιστογράμματα των μεταβλητών της μαθηματικής ικανότητας και των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης**



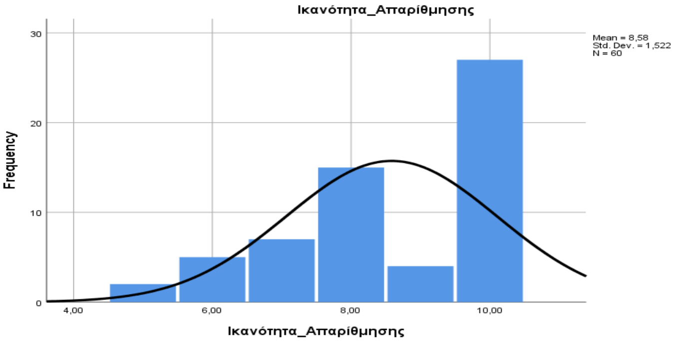



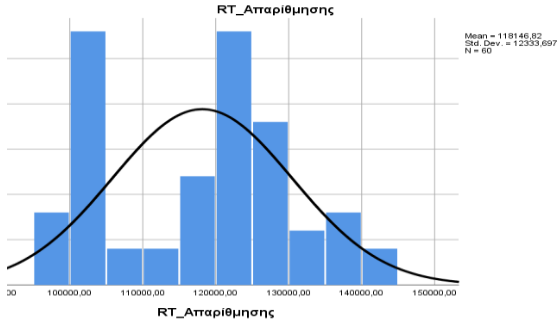



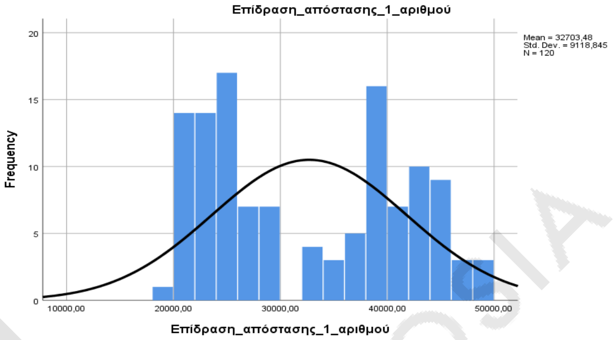



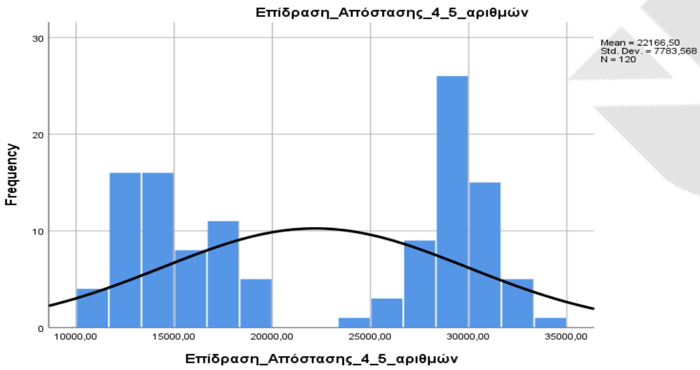
## Ιστογράμματα των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας

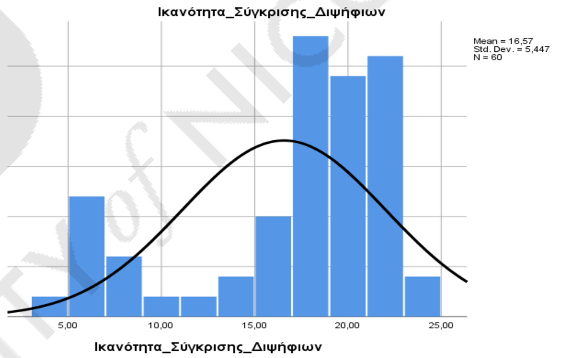


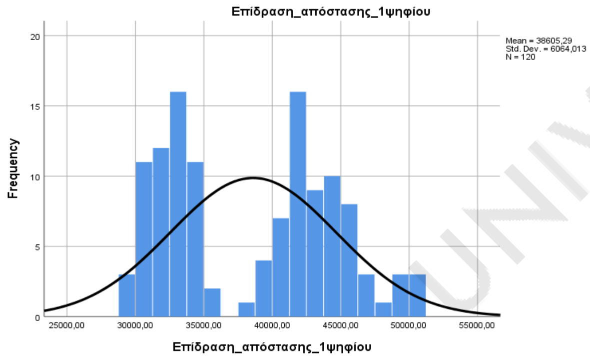



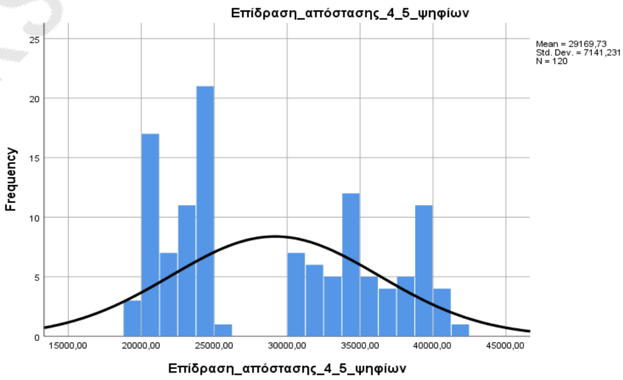


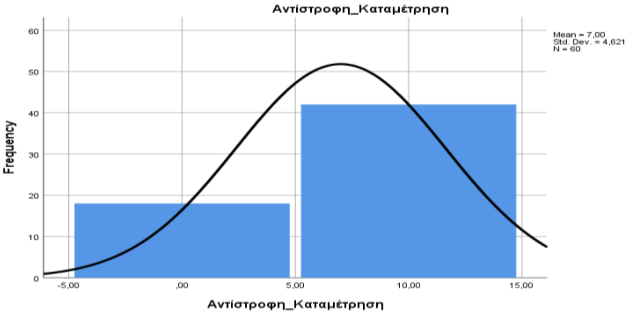


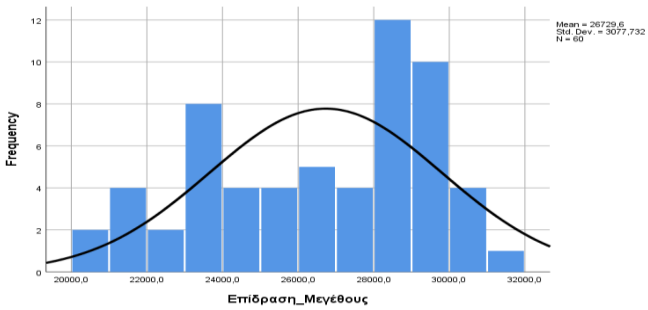



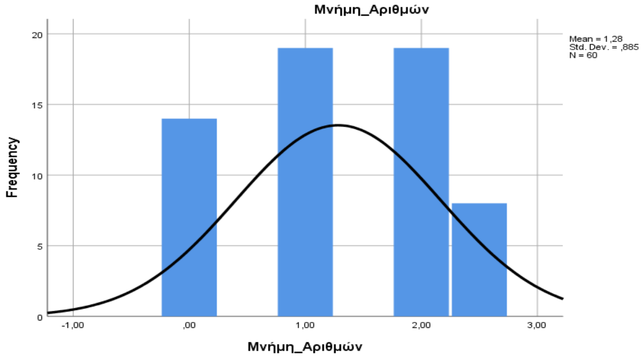



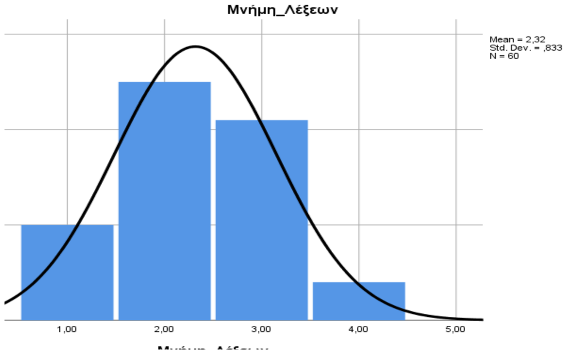



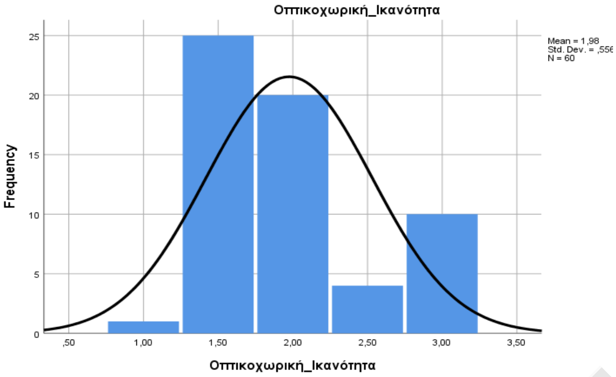



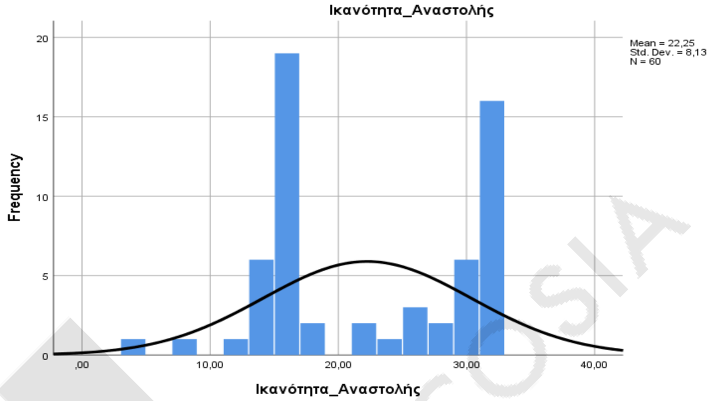



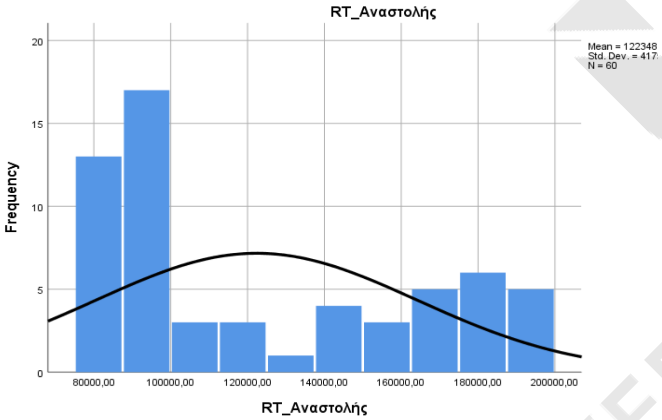
## Ιστογράμματα των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών

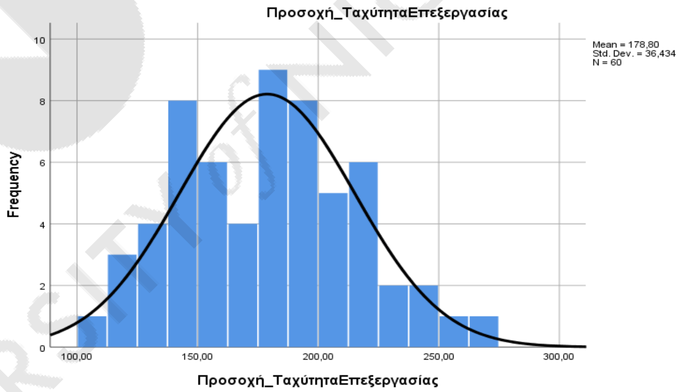


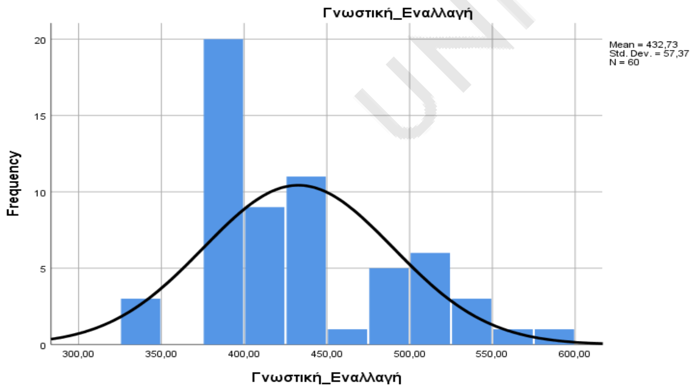



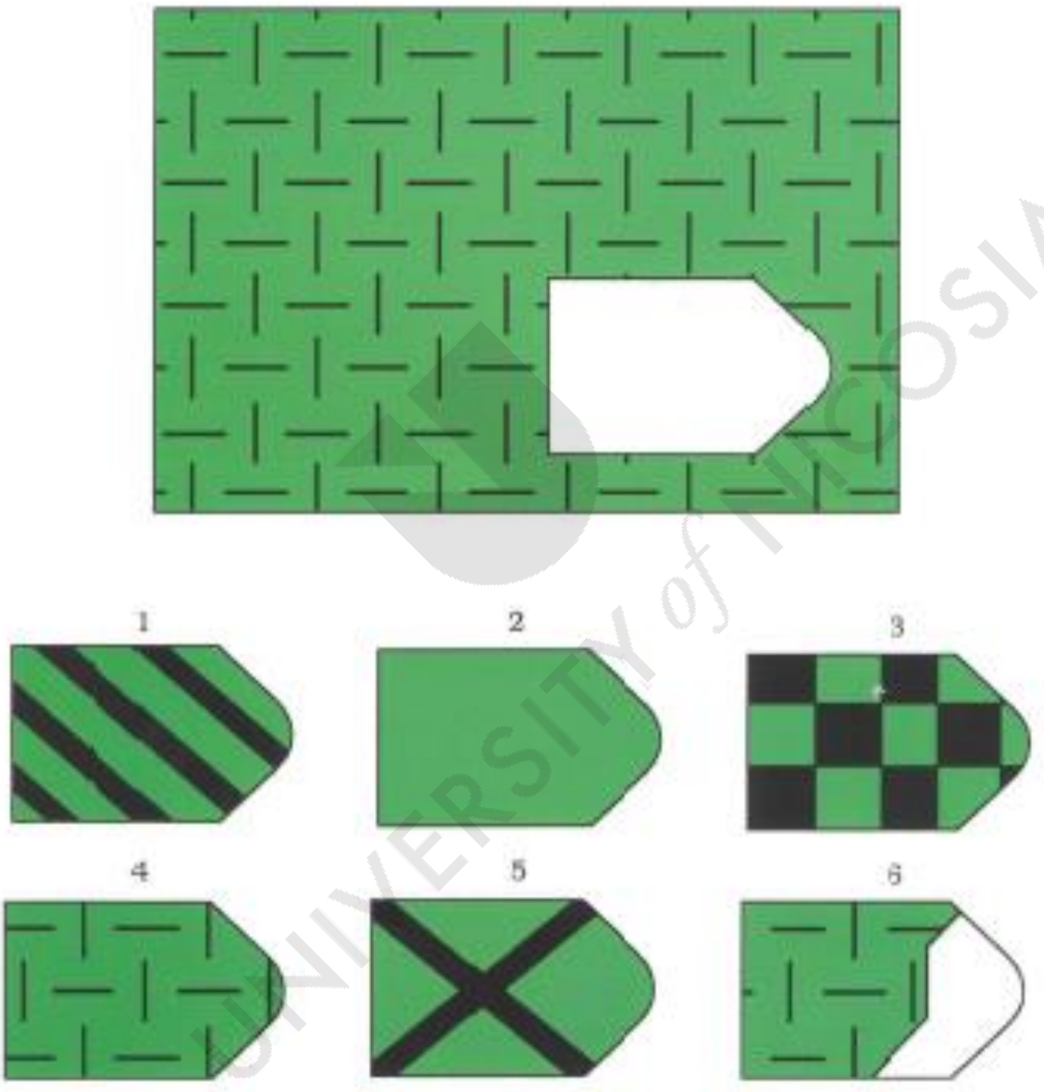



**Παράρτημα 19**
Ενδεικτικές μήτρες Raven

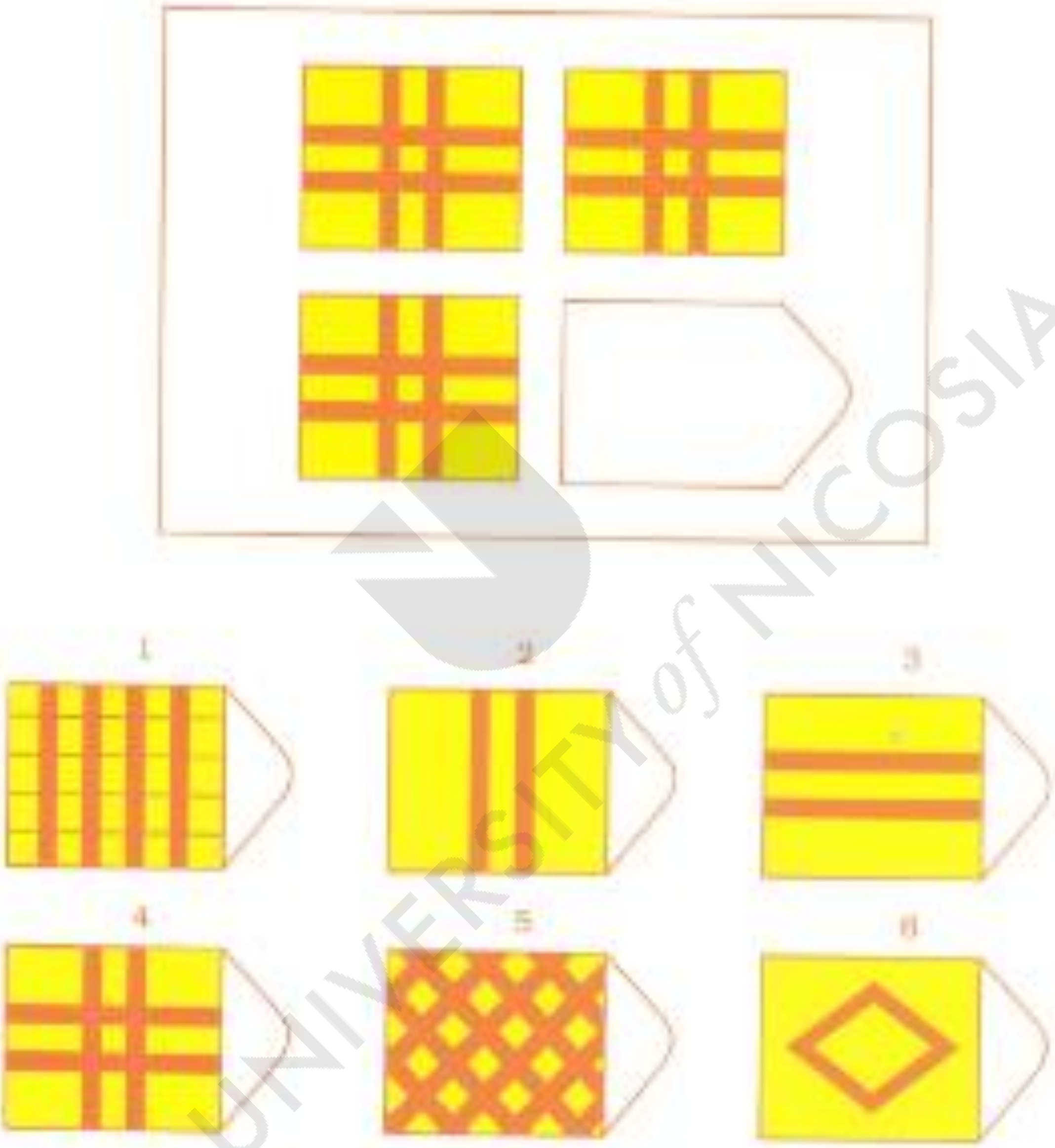
## ΥΠΟΚΛΙΜΑΚΑ Α

### A1

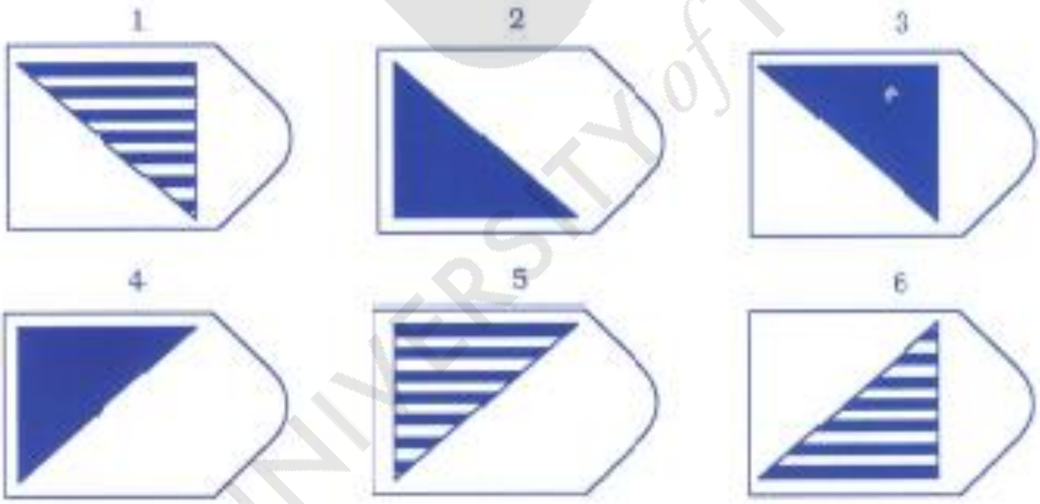


# ΥΠΟΚΛΙΜΑΚΑ ΑΒ

## $A_B 1$



## B7



**Παράρτημα 20**

Πίνακας 1.

*Στατιστικά test Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-wilk για τον έλεγχο κανονικής κατανομής της μαθηματικής ικανότητας και των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης*

| Test of Normality | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | P-value | Statistic | df | P-value |
| Μαθηματική Ικανότητα | 0,238 | 60 | 0,0001 | 0,899 | 60 | 0,0001 |
| W Οξύτητα ANS | 0,260 | 60 | 0,0001 | 0,471 | 60 | 0,0001 |
| R.T W | 0,131 | 60 | 0,012 | 0,950 | 60 | 0,016 |
| Ικανότητα Subitizing | 0,155 | 60 | 0,001 | 0,942 | 60 | 0,006 |
| RT Subitizing | 0,343 | 60 | 0,0001 | 0,683 | 60 | 0,0001 |

Πίνακας 2.

*Έλεγχος κανονικότητας των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας*

| Test of Normality | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | P-value | Statistic | df | P-value |
| Ικανότητα Απαρίθμησης | 0,274 | 60 | 0,0001 | 0,827 | 60 | 0,0001 |
| RT Απαρίθμησης | 0,161 | 60 | 0,0001 | 0,930 | 60 | 0,002 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | 0,208 | 60 | 0,0001 | 0,865 | 60 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού | 0,077 | 60 | 0,200 | 0,986 | 60 | 0,002 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών | 0,107 | 60 | 0,086 | 0,979 | 60 | 0,002 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | 0,215 | 60 | 0,0001 | 0,857 | 60 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | 0,130 | 60 | 0,013 | 0,901 | 60 | 0,0001 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων | 0,146 | 60 | 0,003 | 0,929 | 60 | 0,002 |
| Επίδραση Μεγέθους | 0,196 | 60 | 0,0001 | 0,919 | 60 | 0,001 |
| Αντίστροφη Καταμέτρηση | 0,442 | 60 | 0,0001 | 0,576 | 60 | 0,0001 |

Πίνακας 3.

*Έλεγχος κανονικότητας των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών*

| Test of Normality | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | Shapiro-Wilk | |
| | Statistic | P-value | Statistic | P-value |
| Μνήμη Αριθμών | 0,241 | 0,0001 | 0,852 | 0,0001 |
| Μνήμη Λέξεων | 0,231 | 0,0001 | 0,868 | 0,0001 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη | 0,249 | 0,0001 | 0,810 | 0,0001 |
| Ικανότητα Αναστολής | 0,246 | 0,0001 | 0,841 | 0,0001 |
| RT Αναστολής | 0,229 | 0,0001 | 0,854 | 0,0001 |
| Προσοχή-Ταχύτητα Επεξεργασίας | 0,075 | 0,200 | 0,985 | 0,658 |
| Γνωστική Εναλλαγή | 0,184 | 0,0001 | 0,911 | 0,0001 |

Πίνακας 4.

*Έλεγχος κανονικότητας προτέστ και μετατέστ επίδοσης των μαθητών με δυσαριθμησία στους οποίους εφαρμόστηκε η πειραματική παρέμβαση.*

| Test of Normality | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| Προτέστ Επίδοσης | ,141 | 5 | ,200* | ,979 | 5 | ,928 |
| Μετατέστ Επίδοσης | ,231 | 5 | ,200* | ,881 | 5 | ,314 |

* This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Πίνακας 5.

*Έλεγχος κανονικότητας των μεταβλητών των πρωτοκόλλων αξιολόγησης*

| Test of Normality | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| Λάθη Α.Σ. Πρόσθεσης ΠΔΑ | ,367 | 5 | ,076 | ,684 | 5 | ,206 |
| Αλγοριθμικά Λάθη Πρόσθεσης ΠΔΑ | ,227 | 5 | ,200* | ,910 | 5 | ,468 |
| Οπτικοχωρικά Λάθη Πρόσθεση ΠΔΑ | ,367 | 5 | ,076 | ,684 | 5 | ,206 |
| Συνδυασμός Λαθών Πρόσθεση ΠΔΑ | ,254 | 5 | ,200* | ,914 | 5 | ,492 |
| Λάθη Διάκρισης Προσθέσεων ΠΔΑ | ,367 | 5 | ,726 | ,684 | 5 | ,206 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Λάθη Α.Σ Αφαίρεσης ΠΔΑ | ,473 | 5 | ,061 | ,552 | 5 | ,386 |
| Αλγοριθμικά Λάθη Αφαίρεσης ΠΔΑ | ,473 | 5 | ,061 | ,552 | 5 | ,206 |
| Οπτικοχωρικά Λάθη Αφαίρεση ΠΔΑ | ,473 | 5 | ,061 | ,552 | 5 | ,206 |
| Συνδυασμός Λαθών Αφαίρεση ΠΔΑ | ,213 | 5 | ,200* | ,963 | 5 | ,826 |
| Λάθη Διάκρισης Αφαίρεσης ΠΔΑ | ,237 | 5 | ,200* | ,961 | 5 | ,814 |
| Αλγοριθμικά Λάθη Πρόσθεσης ΠΑΑ | ,473 | 5 | ,061 | ,552 | 5 | ,206 |
| Λάθη Διάκρισης Προσθέσεων ΠΑΑ | ,367 | 5 | ,076 | ,684 | 5 | ,206 |
| Λάθη Α.Σ. Αφαίρεσης ΠΑΑ | ,473 | 5 | ,071 | ,552 | 5 | ,206 |
| Αλγοριθμικά Λάθη Αφαίρεσης ΠΑΑ | ,473 | 5 | ,071 | ,552 | 5 | ,206 |

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Πίνακας 6.

*Έλεγχος κανονικότητας μη συμβολικών μεταβλητών για μαθητές με δυσαριθμησία που δέχτηκαν παρέμβαση*

| | Test of Normality | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| W Οξύτητα ANS M.Π | ,262 | 5 | ,200* | ,894 | 5 | ,376 |
| R.T W M.Π | ,194 | 5 | ,200* | ,983 | 5 | ,948 |
| Ικανότητα Subitizing M.Π | ,132 | 5 | ,200* | ,998 | 5 | ,998 |
| RT Subitizing M.Π | ,308 | 5 | ,137 | ,734 | 5 | ,221 |

* This is a lower bound of the true significance.
a. Lilliefors Significance Correction



Πίνακας 7.

*Έλεγχος κανονικότητας των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας μετά παρέμβασης στην πειραματική ομάδα*

| | Test of Normality | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| Ικανότητα Απαρίθμησης Μ.Π | ,246 | 5 | ,200* | ,956 | 5 | ,777 |
| R.T Απαρίθμησης Μ.Π | ,314 | 5 | ,121 | ,881 | 5 | ,314 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων Μ.Π | ,224 | 5 | ,200* | ,938 | 5 | ,655 |
| Επίδραση απόστασης 1 αριθμού Μ.Π | ,279 | 5 | ,200* | ,925 | 5 | ,565 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών Μ.Π | ,208 | 5 | ,200* | ,919 | 5 | ,522 |
| Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων Μ.Π | ,315 | 5 | ,117 | ,860 | 5 | ,228 |
| Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου Μ.Π | ,294 | 5 | ,182 | ,868 | 5 | ,259 |
| Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων Μ.Π | ,182 | 5 | ,200* | ,962 | 5 | ,822 |
| Επίδραση μεγέθους Μ.Π | ,185 | 5 | ,200* | ,942 | 5 | ,683 |
| Αντίστροφη καταμέτρηση Μ.Π | ,367 | 5 | ,026 | ,684 | 5 | ,076 |

* This is a lower bound of the true significance.
a. Lilliefors Significance Correction

Πίνακας 8.

*Έλεγχος κανονικότητας των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών μετά παρέμβασης στην πειραματική ομάδα*

| | Test of Normality | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kolmogorov-Smirnov | | | Shapiro-Wilk | | |
| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| Μνήμη Αριθμών Μ.Π | ,367 | 5 | ,056 | ,817 | 5 | ,123 |
| Μνήμη Λέξεων Μ.Π | ,367 | 5 | ,056 | ,817 | 5 | ,123 |
| Οπτικοχωρική Μνήμη Μ.Π | ,367 | 5 | ,056 | ,817 | 5 | ,123 |
| Ικανότητα Αναστολής Μ.Π | ,237 | 5 | ,200* | ,961 | 5 | ,814 |
| RT Αναστολής Μ.Π | ,287 | 5 | ,200* | ,908 | 5 | ,457 |
| Προσοχή-Ταχύτητα Επεξεργασίας Μ.Π | ,179 | 5 | ,200* | ,951 | 5 | ,746 |
| Γνωστική Εναλλαγή Μ.Π | ,243 | 5 | ,200* | ,846 | 5 | ,182 |

*, This is a lower bound of the true significance,
a, Lilliefors Significance Correction

Πίνακας 9.

*Προσαρμοσμένοι μέσοι μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου κατά τον έλεγχο ANCOVA*

**Estimated Marginal Means**
**Εκτιμώμενοι οριακοί μέσοι όροι των δύο ομάδων**

Dependent Variable: Μετατέστ Επίδοσης

| Κατηγορία παιδιών | Mean | Std. Error | 95% Confidence Interval Lower Bound | 95% Confidence Interval Upper Bound |
|---|---|---|---|---|
| Πειραματική ομάδα | 19,523[a] | ,685 | 17,903 | 21,144 |
| Ομάδα ελέγχου | 5,277[a] | ,685 | 3,656 | 6,897 |

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Προτέστ_Επίδοσης = 5,5000.

Πίνακας 10.

*Κριτήριο Levene's για την ισότητα των διασπορών μεταξύ των δύο ομάδων*

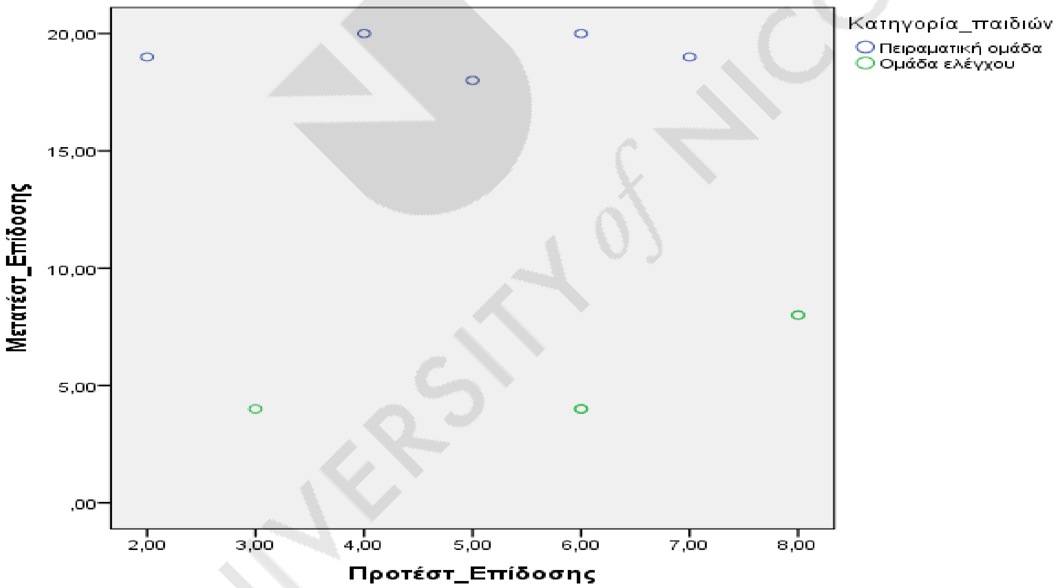
Levene's Test of Equality of Error Variances[a]

Dependent Variable: Μετατέστ Επίδοσης

| F | df1 | df2 | Sig. |
|---|---|---|---|
| ,537 | 1 | 8 | ,484 |

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + Κατηγορία παιδιών + Προτέστ Επίδοσης




*Γράφημα 1.*
Έλεγχος ομοιογένειας της παλινδρόμησης

Πίνακας 11.

*Έλεγχος κανονικότητας των διαγνωστικών εργαλείων της έρευνας*

Tests of Normality

| | Kolmogorov-Smirnov | Shapiro-Wilk |
|---|---|---|

| | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ηλικία | ,159 | 120 | ,000 | ,903 | 120 | ,000 |
| Μη λεκτική νοημοσύνη | ,191 | 120 | ,000 | ,866 | 120 | ,000 |
| Υπολογισμοί προσθέσεων αφαιρέσεων | ,282 | 120 | ,000 | ,849 | 120 | ,000 |
| Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων | ,267 | 120 | ,000 | ,807 | 120 | ,000 |
| Αριθμητική ευχέρεια | ,217 | 120 | ,000 | ,855 | 120 | ,000 |
| Αποκωδικοποίηση | ,130 | 120 | ,000 | ,961 | 120 | ,002 |
| Αναγνωστική ευχέρεια | ,095 | 120 | ,009 | ,977 | 120 | ,036 |

Πίνακας 12.

*Μέσες τιμές (M), Τυπικές αποκλίσεις (SD), Mann-Whitney U και P-value στην ηλικία και στα διαγνωστικά εργαλεία της έρευνας, των δύο ομάδων συμμετεχόντων*

| | Μαθητές με δυσαριθμησία (N=60) | | Τυπικοί μαθητές (N=60) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *M* | *SD* | *M* | *SD* | *Mann-Whitney* | *P-value* |
| Ηλικία | 101,5333 | 1,17122 | 101,8000 | 1,2595 | 1576,5 | 0,227 |
| Μη λεκτική νοημοσύνη (Raven CPM) | 23,5833 | 1,46475 | 24,0333 | 1,1493 | 1381,5 | 0,071 |
| Υπολογισμοί προσθέσεων-αφαιρέσεων | 2,08332 | 1,38137 | 21,4000 | 5,2696 | ,00001 | 0,0001 |
| Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων | 1,3333 | 1,32341 | 12,3667 | 6,6688 | 151,0 | 0,0001 |
| Αριθμητική ευχέρεια | 4,0667 | 1,75506 | 23,550 | 6,6903 | 4,50 | 0,0001 |
| Αποκωδικοποίηση | 49,700 | 5,51516 | 51,666 | 6,0272 | 1416,0 | 0,075 |
| Αναγνωστική ευχέρεια | 50,4667 | 6,24762 | 52,500 | 5,4973 | 1480,50 | 0,092 |

**Παράρτημα 21**

Πίνακας 1.

*Πρώτο μοντέλο πρόβλεψης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία με τη συνεισφορά των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης*

| Μη συμβολική αριθμητική διάκριση | R | R Square | Adjusted R Square |
|---|---|---|---|
| 1 | ,941[a] | ,886 | ,878 |

Πίνακας 2.

*Δεύτερο μοντέλο πρόβλεψης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία με τη συνεισφορά των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας*

| Συμβολική αριθμητική επεξεργασία | R | R Square | Adjusted R Square |
|---|---|---|---|
| 1 | ,832 | ,691 | ,628 |

Πίνακας 3.

*Τρίτο μοντέλο πρόβλεψης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών με δυσαριθμησία με τη συνεισφορά των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών*

| Γνωστικές λειτουργίες | R | R Square | Adjusted R Square |
|---|---|---|---|
| 1 | ,912 | ,831 | ,808 |

Πίνακας 4.

*Τελικό μοντέλο πρόβλεψης της δυσαριθμησίας με τη συνεισφορά των ικανοτήτων της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, των ικανοτήτων της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών*

| Μεταβλητές μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης, μεταβλητές συμβολικών αριθμητικών αναπαραστάσεων και μεταβλητές γνωστικών λειτουργιών | R | R Square | Adjusted R Square |
|---|---|---|---|
| 1 | ,961 | ,924 | ,912 |

**Παράρτημα 22**

Πίνακας 1.

*Συντελεστές συσχέτισης Spearman μεταξύ των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7. W Οξύτητα ANS | _ | | | | | | | | | | | | | |
| 8. R.T W | ,462** | _ | | | | | | | | | | | | |
| 9. Ικανότητα Subitizing | -,283* | -,019 | _ | | | | | | | | | | | |
| 10. R.T Subitizing | ,283* | ,094 | -,654** | _ | | | | | | | | | | |
| 11. Ικανότητα Απαρίθμησης | -,324* | -,240 | ,538 | -,540** | _ | | | | | | | | | |
| 12. R.T Απαρίθμησης | ,209 | ,212 | -,273* | ,338** | -,277** | _ | | | | | | | | |
| 13. Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | ,012 | -,175 | ,531 | -,379** | ,282* | -,346** | _ | | | | | | | |
| 14. Επίδραση απόστασης 1 αριθμού | -,011 | ,179 | -,329* | ,414** | -,197 | ,029 | -,296* | _ | | | | | | |
| 15. Επίδραση απόστασης 4-5 αριθμών | ,378** | ,224 | -,301* | ,344** | -,243 | ,146 | -,235 | ,155 | _ | | | | | |
| 16. Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | -,222 | -,079 | ,777** | -,720** | -,536** | -,269* | ,406** | -,369** | -,298* | _ | | | | |
| 17. Επίδραση απόστασης 1 ψηφίου | ,206 | ,211 | -,421** | ,271* | -,383** | ,167 | -,204 | ,408** | ,270 | -,326* | _ | | | |
| 18. Επίδραση απόστασης 4-5 ψηφίων | ,073 | -,128 | -,374** | ,265* | -,278* | -,042 | -,008 | ,268* | -,021 | -,315* | ,231 | _ | | |
| 19. Επίδραση Μεγέθους | ,090 | ,003 | -,584** | ,370** | -,100 | ,273* | -,431** | ,276* | ,035 | -,538** | ,083 | ,372** | _ | |
| 20. Αντίστροφη Καταμέτρηση | -0,067 | ,58 | ,565** | -,592** | ,431** | -,195 | ,357** | -,316* | -,214 | ,696** | -,329* | -,260** | -,365** | _ |

Σημείωση. *$p$ < .05 **p < .01

Πίνακας 2.

*Συντελεστές Συσχέτισης Spearman μεταξύ των μεταβλητών της μη συμβολικής αριθμητικής διάκρισης και των μεταβλητών των γνωστικών λειτουργιών*

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** W Οξύτητα ANS | _ | | | | | | | | | | |
| **2.** RT W | ,462** | _ | | | | | | | | | |
| **3.** Ικανότητα Subitizing | -,283* | -,019 | _ | | | | | | | | |
| **4.** RT Subitizing | ,283* | ,094 | -,654** | _ | | | | | | | |
| **5.** Μνήμη Αριθμών | -,279* | -,055 | ,921** | -,699** | _ | | | | | | |
| **6.** Μνήμη Λέξεων | -,174 | -,027 | ,337** | -,238 | ,367** | _ | | | | | |
| **7.** Οπτικοχωρική Μνήμη | ,113 | -,049 | ,127 | -,348** | ,096 | -,005 | _ | | | | |
| **8.** Ικανότητα Αναστολής | ,266* | ,073 | ,492** | -,369** | ,435** | ,276* | ,192 | _ | | | |
| **9.** RT Αναστολής | -,379** | -,205 | -,257* | ,224 | -,216 | -,214 | -,453** | -,502** | _ | | |
| **10.** Προσοχή - Ταχύτητα Επεξεργασίας | -,099 | -,043 | -,532** | ,462** | -,508** | -,265* | -,414** | -,376** | ,306* | _ | |
| **11.** Γνωστική Εναλλαγή | ,235 | ,052 | -,821** | ,612** | -,863** | -,318* | -,225 | -,403** | ,120 | ,490** | _ |

Σημείωση. *$p$ < .05 **p < .01

Πίνακας 3.

*Συντελεστές συσχέτισης Spearman μεταξύ των μεταβλητών της συμβολικής αριθμητικής επεξεργασίας και των γνωστικών λειτουργιών*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Ικανότητα Απαρίθμησης | _ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **2.** R.T Απαρίθμησης | -,277* | _ | | | | | | | | | | | | | | | |
| **3.** Ικανότητα Σύγκρισης Μονοψήφιων | ,282* | -,346** | _ | | | | | | | | | | | | | | |
| **4.** Επίδραση απ/σης 1 αριθ. | -,276* | ,504** | -,482** | _ | | | | | | | | | | | | | |
| **5.** Επίδραση απ/σης 4-5 αρ. | -,350** | ,283* | -,373** | ,300* | _ | | | | | | | | | | | | |
| **6.** Ικανότητα Σύγκρισης Διψήφιων | ,536** | -,269* | ,406** | -,357** | -,489** | _ | | | | | | | | | | | |
| **7.** Επίδραση απ/σης 1 ψηφ. | -,160 | ,291* | -,509** | ,810** | ,246 | -,289* | _ | | | | | | | | | | |
| **8.** Επίδραση απ/σης 4-5 ψ. | -,292* | -,036 | -,079 | -,045 | ,237 | -,349** | -,175 | _ | | | | | | | | | |
| **9.** Επίδραση Μεγέθους | -,100 | ,273* | -,431** | ,226 | ,286* | -,538** | ,083 | ,372** | _ | | | | | | | | |
| **10.** Αντίστροφη Καταμέτρηση | ,431** | -,195 | ,357** | -,374** | -,374** | ,696** | -,329* | -,260* | -,365** | _ | | | | | | | |
| **11.** Μνήμη Αριθμών | ,504** | -,258* | ,453** | -,421** | -,221 | ,775** | -,336** | -,391** | -,561** | ,606** | _ | | | | | | |
| **12.** Μνήμη Λέξεων | ,235 | -,252 | ,369** | -,133 | ,06 | ,254* | -,201 | -,050 | -,345** | ,292* | ,367** | _ | | | | | |
| **13.** Οπτικοχωρική Μνήμη | ,179 | -,154 | ,281* | -,134 | -,096 | ,277* | ,073 | ,100 | -,068 | ,271* | ,096 | -,005 | _ | | | | |
| **14.** Ικανότητα Αναστολής | ,261* | -,094 | ,689** | -,299* | -,001 | ,353** | -,060 | -,027 | -,270* | ,444** | ,435** | ,185 | ,192 | _ | | | |
| **15.** R.T Αναστ/λής | -,120 | ,263* | -,591** | ,245 | ,122 | -,267* | ,059 | -,056 | ,250 | -,305* | -,216 | -,276* | -,453** | -,502** | _ | | |
| **16.** Προσοχή - Ταχύτητα Επ/σίας | -,131 | -,043 | -,366** | ,268* | ,188 | -,534** | ,099 | ,118 | ,373** | -,557** | -,508** | -,207 | -,414** | -,376** | ,306* | _ | |
| **17.** Γνωστική Εναλλαγή | -,554** | ,209 | -,379** | ,359** | ,388** | -,730** | ,304* | ,285* | ,429** | -,603** | -,863** | -,318* | -,225 | -,403** | ,120 | ,490** | _ |

*$p < .05$ **$p < .01$